Parte II - Aula 2
Laboratório de informática
Funções, continuidade e diferenciabilidade

Alex Abreu

Conteúdo

1 Funções reais

Também conseguimos definir funções reais (ou complexas) no Sage. Basta escrever

```
sage: f(x)=x^2+1
sage: g(x)=2*x+3
```

Isto nos permite avaliar as funções.

```
sage: f(4)
17
sage: g(3)
9
sage: f(pi)
pi^2 + 1
sage: f
x |--> x^2 + 1
sage: g
x |--> 2*x + 3
```

Note que se tentarmos usar a variável y, obtemos uma mensagem de erro, apesar da função definida ser a mesma.

```
sage: h(y)=y^2+1
```

Isto se dá porque não introduzimos y como variável simbólica.

```
sage: y=var('y')
sage: h(y)=y^2+1
```

```
sage: h(4)
17
```

Com o Sage podemos fazer o gráfico de funções reais usando a função `plot`. Usamos a função `plot` com 3 argumentos. O primeiro é a função que queremos esboçar, enquanto o segundo e o terceiro os extremos dos intervalos. Como no exemplo abaixo (o gráfico pode ser visto na Figure 1).

```
sage: plot(f,-3,3)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
```

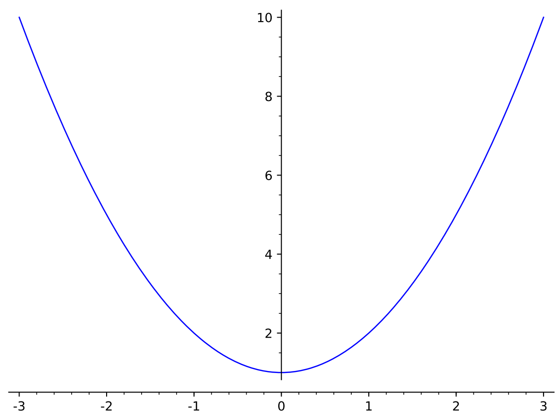

Figura 1: Gráfico da função f no intervalo $[-3, 3]$.

Em alguns casos, pode acontecer da função ter valores muito grandes, o que distorce o gráfico.

```
sage: g(x)=1/abs(x)
sage: plot(g,-1,1)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
```

O que podemos fazer neste caso, é limitar o eixo y com os comandos `ymin` e `ymax`.

```
sage: plot(g,-1,1,ymin=0,ymax=20)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
```

1.1 Atividade

1. Esboce o gráfico da função $f(x)$ nos casos abaixo
   (a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ no intervalo $[-4, 4]$.
   (b) $f(x) = \text{sen}(x)$ no intervalo $[-6\pi, 6\pi]$.
   (c) $f(x) = \cos(x)$ no intervalo $[-6\pi, 6\pi]$.
   (d) $f(x) = \log(x)$ no intervalo $[-5, 10]$.
   (e) $f(x) = e^x$ no intervalo $[-3, 2]$.
   (f) $f(x) = |x - 1| + |x|$ no intervalo $[-3, 3]$.

2 Funções afins

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de *afim* se $f(x) = ax + b$ para números reais a e b. O número real a é chamado de *inclinação* ou *coeficiente angular* da função afim f. Abaixo vemos exemplos de funções afins.

```
sage: f(x)=3*x+1
sage: g(x)=x/2+3
sage: h(x)=-2*x+4
```

O gráfico de funções afins são sempre retas.

```
sage: plot(f,-5,5)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
sage: plot(g,-5,5)
Graphics object consisting of 2 graphics primitives
sage: plot(h,-5,5)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
```

Você provavelmente notou que os gráficos das funções f e g são muito parecidos, isso se dá porque o Sage reescala os eixos para os gráficos parecerem melhores. Se quisermos fixar a escala dos eixos podemos escrever. Você pode ver os gráficos na figura 2.

```
sage: plot(f,-5,5,aspect_ratio=1)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
sage: plot(g,-5,5,aspect_ratio=1)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
```

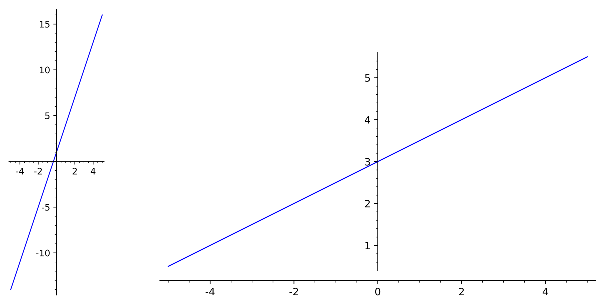

Figura 2: Gráfico das funções f e g no intervalo $[-5, 5]$.

Note que usualmente vamos deixar o Sage fixar a escala, mas temos que ter em mente que a escala do eixo y pode ser diferente da escala do eixo x.

Podemos também esboçar o gráfico de várias funções ao mesmo tempo.

```
sage: plot(f,-5,5)+plot(g,-5,5,color='green')+plot(h,-5,5,color='
    red')
Graphics object consisting of 3 graphics primitives
```

Para finalizar, vamos lembrar que a função afim f que passe pelo ponto (x_0, y_0) e tem inclinação a é $f(x) = a(x - x_0) + y_0$. De fato, podemos checar.

```
sage: x0,y0,a=var('x0,y0,a')
sage: f(x)=a*(x-x0)+y0
sage: f(x0)
y0
```

2.1 Atividades

1. Sejam f e g as funções afins que passam pelo ponto $(4, 5)$ e tem inclinações $\sqrt{3}$ e π, respectivamente. Esboce o gráfico de f e g no intervalo $[0, 6]$ e na mesma figura, com cores diferentes.

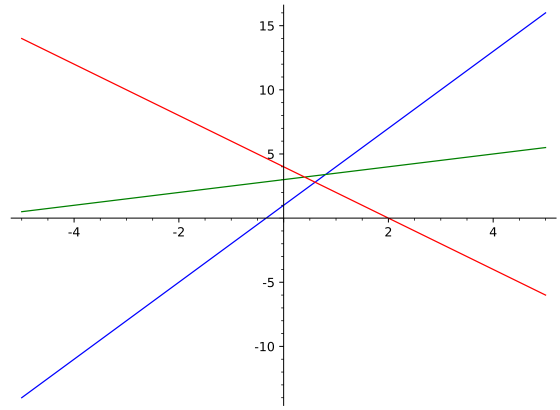

Figura 3: Gráficos das funções f, g e h.

3 Funções por partes

Muitas vezes em matemática vamos encontrar funções que são definidas em partes. Por exemplo,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ \sqrt{x} + 2 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

A função f definida tem uma expressão quando $x \leq 0$ e outra expressão quando $x > 0$. Quando quisermos definir funções por partes no Sage, podemos usar o comando `piecewise`.

```
sage: f=piecewise([([-10,1],x^2),((1,oo),sqrt(x)+2)] , var=x)
sage: f
piecewise(x|-->x^2 on [-10, 1], x|-->sqrt(x) + 2 on (1, +oo); x)
sage: f(-3)
9
sage: f(4)
4
sage: f(0)
0
```

Usamos o comando `piecewise` do seguinte modo. O primeiro argumento é uma lista de pares da forma $(I, expr)$, onde I é um intervalo e *expr* é uma expressão. No nosso caso temos dois pares, o primeiro é $([-10, 0], x^2)$ e o segundo é $((0, \infty), \sqrt{x} + 2)$. Lembre que (a, b) é o intervalo aberto enquanto que $[a, b]$ é o intervalo fechado. Também existem intervalos abertos de um lado e fechados do outro, como $(a, b]$, mas estes são um pouco mais complicados de definir no Sage. Lembre que intervalos que começam em $-\infty$ ou terminam em ∞ são sempre abertos.

No exemplo acima, usamos $[-10, 1]$ para o intervalo, em vez de $(-\infty, 1]$, para não termos que usar um intervalo aberto de um lado e fechado do outro. Se precisarmos calcular ou esboçar o gráfico da função em valores menores que -10, teríamos que aumentar nosso intervalo de definição. O segundo argumento do comando `piecewise` é a váriavel simbólica na qual a função está definida, se a nossa função é definida por partes na variável x, escrevemos `var=x`. O segundo argumento não é necessário se a variável simbólica for x.

```
sage: g=piecewise([((-oo,2),abs(x)),([2,5],log(x))])
sage: g
piecewise(x|-->abs(x) on (-oo, 2), x|-->log(x) on [2, 5]; x)
sage: g(3)
log(3)
sage: g(1)
```

```
1
```

Podemos esboçar os gráficos das funções f e g definidas acima com o comando `plot` (os gráficos podem ser vistos na Figura 4).

```
sage: plot(f,-5,5)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
sage: plot(g,-5,5)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
```

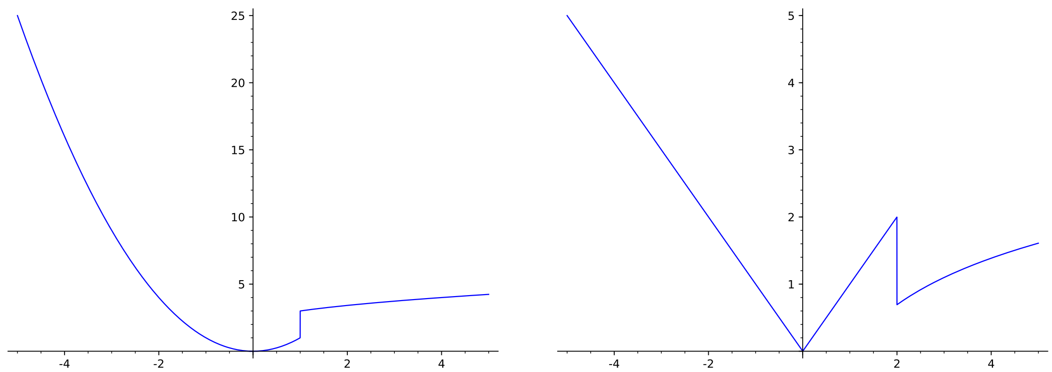

Figura 4: Gráficos das funções por partes f e g.

Você provavelmente reparou dois segmentos verticais, um no gráfico da f (na abcissa $x = 1$) e outro no gráfico da g (na abcissa $x = 2$). Note que os pontos são justamente os pontos onde os intervalos de definição da f e g se tocam. Isto se dá pelo modo como é implementado os gráficos no Sage. Para termos um gráfico mais fiel, precisamos excluir esses pontos do gráfico. Usamos o comando `exclude` para isso.

```
sage: plot(f,-5,5, exclude=[1])
Graphics object consisting of 2 graphics primitives
sage: plot(g,-5,5, exclude=[2])
Graphics object consisting of 2 graphics primitives
```

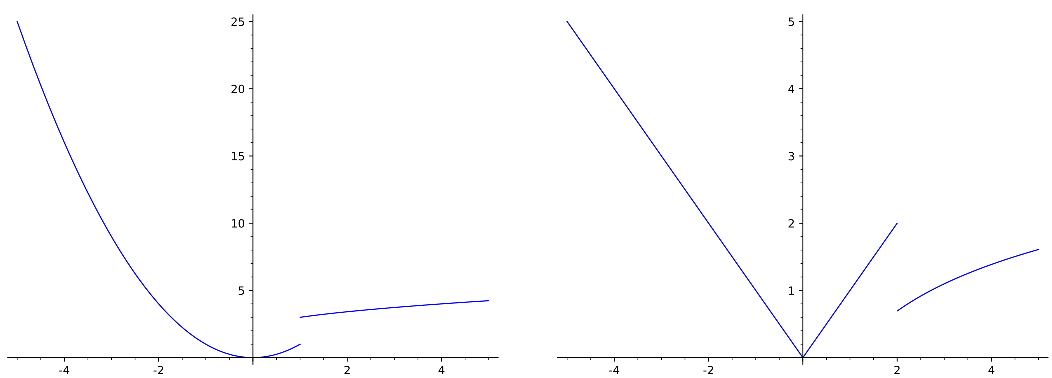

Figura 5: Gráficos (corretos) das funções por partes f e g.

3.1 Atividades

1. Esboce o gráfico das funções f e g no intervalo $[-5, 5]$, onde f e g são definidas por

$$f = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < e \\ \log(x) & \text{se } x \geq e \end{cases} \quad \text{e} \quad g = \begin{cases} \arctan(x) & \text{se } x \leq -1 \\ |x| & \text{se } x > -1. \end{cases}$$

   Não esqueça de excluir os pontos 0 e e do gráfico de f, e o ponto -1 do gráfico de g

2. Esboce o gráfico da função $\tan(x)$ no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$. Esboce novamente o gráfico excluindo os pontos $-\frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi$ (tente calcular a tangente nesses pontos) e limitando o eixo y entre -6 e 6.

3. Esboce um gráfico razoável da função

$$f = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{se } x < 1 \\ e^{x-1} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

   no intervalo $[-3, 3]$.

4 Funções contínuas

Uma função é dita *contínua* se ela não possui "saltos" no seu gráfico, com excessão dos pontos onde ela não está definida. Por exemplo, toda função afim é contínua, bem como as funções seno e cosseno. A função tangente também é contínua, já que os saltos no seu gráfico se dão nos pontos onde ela não está definida.

Como exemplo de funções não contínuas, temos as funções f e g da seção anterior. Como vemos na Figura 5 elas não são contínuas.

Nas disciplinas de cálculo e análise você aprenderá a definição precisa de continuidade.

4.1 Atividades

1. As funções f e g da atividade 1 da seção anterior são contínuas?

2. Defina a função $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$. Calcule $f(1.0)$, $f(0.1)$, $f(0.01)$, $f(0.0001)$, $f(0.00001)$, $f(0.000001)$, $f(0.0000001)$ e $f(0)$. Por que dá erro o cálculo de $f(0)$? Esboce o gráfico de f no intervalo $[-6\pi, 6\pi]$ e depois no intervalo $[-0.3, 0.3]$. Se você tivesse que escolher um valor para $f(0)$, que valor você escolheria? Por quê?

3. Defina a função $f(x) = \text{sen}(\frac{1}{x})$. Calcule $f(1.0)$, $f(0.1)$, $f(0.01)$, $f(0.0001)$, $f(0.00001)$, $f(0.000001)$, $f(0.0000001)$, $f(0.00000001)$, $f(0.000000001)$ e $f(0)$. Por que dá erro o cálculo de $f(0)$? Esboce o gráfico de f no intervalos $[-1, 1]$, $[-0.3, 0.3]$ e $[-0.001, 0.001]$. Existe uma escolha razoável para o valor de $f(0)$ neste caso? Por quê?

4. Defina a função $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$. Existe uma escolha razoável para o valor de $f(8)$? Por quê? Use o comando `canonicalize_radical` para simplificar a expressão.

5 Limites

O limite de uma função f quando o argumento x tende a a é o valor para qual $f(x)$ se aproxima conforme x se aproxima de a. Escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

para representar esse valor. Se você fez corretamente as atividades da seção anterior, você deve ter descoberto que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1 \text{ e } \lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\frac{1}{12},$$

equanto que

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

não existe.

O Sage também calcula limites de funções com o comando `limit` ou `lim`.

```
sage: f(x)=sin(x)/x
sage: limit(f(x), x=0)
1
sage: lim(f(x),x=0)
1
sage: f.limit(x=0)
x |--> 1
sage: f(x).limit(x=0)
1
sage: g(x)=sin(1/x)
sage: lim(g(x),x=0)
ind
```

O comando `limit` também funciona para expressões algébricas, e até envolvendo outras variáveis simbólicas.

```
sage: y=var('y')
sage: expr=(x^2-x*y)/(sqrt(x)-sqrt(y))
sage: limit(expr, x=y)
2*y^(3/2)
```

Podemos também calcular limites no infinito.

```
sage: f(x)=(x^3+sin(x)-sqrt(x))/(x^4+log(x)-5)
sage: lim(f(x),x=oo)
0
sage: plot(f,20,100)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
```

E alguns limites são infinitos.

```
sage: g(x)=1/abs(x)
sage: lim(g(x),x=0)
+Infinity
```

Também existe o conceito de limite lateral. Que é o limite da função quando nos aproximamos pela direita (positivamente) ou pela esquerda do ponto a.

```
sage: h(x)=1/x
sage: plot(h,-1,1)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
sage: lim(h(x),x=0,dir='plus')
+Infinity
sage: lim(h(x),x=0,dir='right')
+Infinity
sage: lim(h(x),x=0,dir='minus')
-Infinity
sage: lim(h(x),x=0,dir='left')
```

```
-Infinity
```

Acima vemos que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \text{ e } \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

5.1 Atividades

1. Calcule cada limite abaixo. Tente simplificar a expressão e esboçar o gráfico perto do ponto onde está sendo calculado o limite.

   (a)
   $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - 2x - x^2} - (x+1)}{x}$$

   (b)
   $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6} - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{x}$$

   (c)
   $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{|x - 1|}$$

   (d)
   $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{|x - 2|}$$

   (e)
   $$\lim_{x \to \infty} \frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+10)}{(x^2+1)^5}$$

   (f)
   $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2}$$

   (g)
   $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \tan(x)} - \sqrt{1 + \mathrm{sen}(x)}}{x^3}$$

2. Nos limites que não existem acima, tente calcular os limites laterais.

3. Calcule os limites laterais no ponto 1 da função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & \text{se } x < 1 \\ \log(x) + \sqrt{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

6 Funções deriváveis

Seja $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \mathrm{sen}(\frac{1}{x})$. Na seção sobre funções contínuas você deve ter percebido que o gráfico da função f oscila bastante perto de 0. Como podemos ver na Figura 6.

```
sage: f(x)=sin(1/x)
sage: plot(f,-0.03,0.03)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
```

Mas o que acontece para pontos diferentes de 0? Vamos escolher o ponto 0.03. Como é o gráfico de f perto deste ponto? Pela Figura 6 podemos notar que ainda oscila bastante o gráfico.

```
sage: plot(f,0.01,0.05)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
```

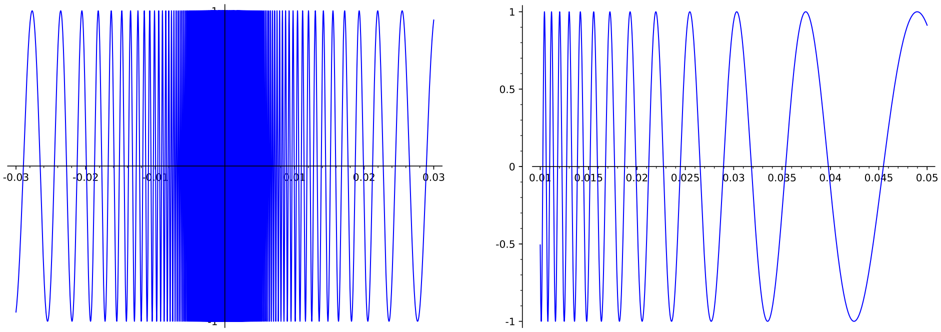

Figura 6: Gráfico da função f no intervalo $[-0.03, 0.03]$ e $[0.01, 0.05]$.

Mas se fizermos gráficos cada vez mais perto? (Você pode ver os gráficos na Figura 7.)

```
sage: plot(f,0.029,0.031)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
sage: plot(f,0.0299,0.0301)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
sage: plot(f,0.02999,0.03001)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
```

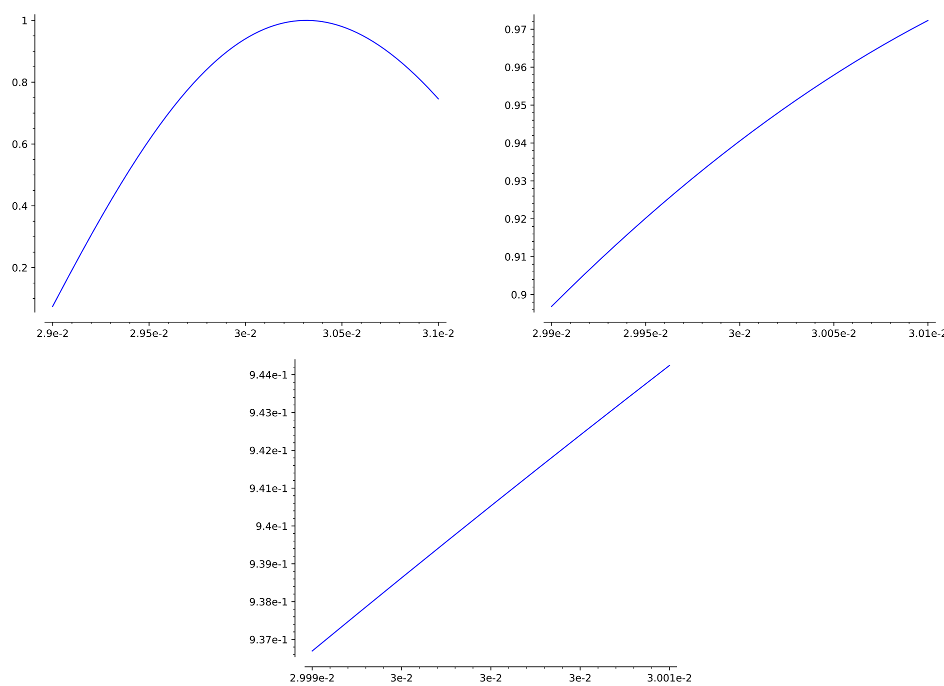

Figura 7: Gráfico da função f no intervalo $[0.029, 0.031]$.

Notou que quanto mais perto do ponto, mais o gráfico se parece com uma reta? Quando isto acontece dizemos que a função f é derivável no ponto 0.03. Em geral, dizemos que f é derivável no ponto a se o gráfico de f parece uma reta perto do ponto a.

Nas disciplinas de cálculo e análise você aprenderá a definição precisa de diferenciabilidade.

6.1 Atividades

1. Verifique se as funções f abaixo são deriváveis nos pontos a.

   (a) $f(x) = x^2 + 2$, no ponto $a = 3$.

   (b) $f(x) = \log(\frac{1}{x^3+4})$, no ponto $a = 1$.

   (c) $f(x) = |x|$, no ponto $a = 0$.

   (d)
   $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ \log(x+1) & \text{se } x > 0 \end{cases}, \text{ no ponto } a = 0$$

   (e)
   $$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \text{sen}(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}, \text{ no ponto } a = 0$$

2. A função
   $$f(x) = \begin{cases} x^2\text{sen}(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
   é derivável no 0. Esboce os gráficos de f perto do 0 (é suficiente definir $f(x) = x^2\text{sen}(\frac{1}{x})$ para esboçar o gráfico). Note que neste caso não é tão claro que o gráfico de f parece com uma reta perto 0. Portanto tome cuidado com a nossa definição de derivável.

7 Derivadas e reta tangente

Na seção anterior, vimos que se uma função f é derivável no ponto a, então perto do ponto a o gráfico de f se parece com uma reta. Esta reta é chamada de reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. A inclinação desta reta é a derivada de f no ponto a.

Seja $f(x) = e^x - 5\log(x)$, vamos encontrar a reta tangente ao gráfico de f no ponto 2. Comece esboçando o gráfico de f perto de 2.

```
sage: f(x)=e^x-5*log(x)
sage: plot(f,1,3)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
sage: plot(f,1.8,2.2)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
sage: plot(f,1.99,2.01)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
```

Vemos então, que f é derivável no 2. Agora como fazemos para achar a inclinação? Para isso, basta calcular a derivada de f (você aprenderá a fazer isso na disciplina de cálculo). Por enquanto usamos o comando `diff`, que calcula a derivada de f. Vamos escrever `f1`, para a derivada de f (usualmente a derivade de f é denotada por f').

```
sage: f1=diff(f)
sage: f1
x |--> -5/x + e^x
sage: f1(2)
e^2 - 5/2
```

Agora que sabemos a inclinação da reta tangente, e sabemos que ela passa pelo ponto $(2, f(2))$, podemos descrever a reta tangente (Lembre da seção sobre funções afins).

```
sage: g(x)=f1(2)*(x-2)+f(2)
sage: g
x |--> 1/2*(x - 2)*(2*e^2 - 5) + e^2 - 5*log(2)
```

```
sage: plot(f,1,3)+plot(g,1,3,color='green')
Graphics object consisting of 2 graphics primitives
```

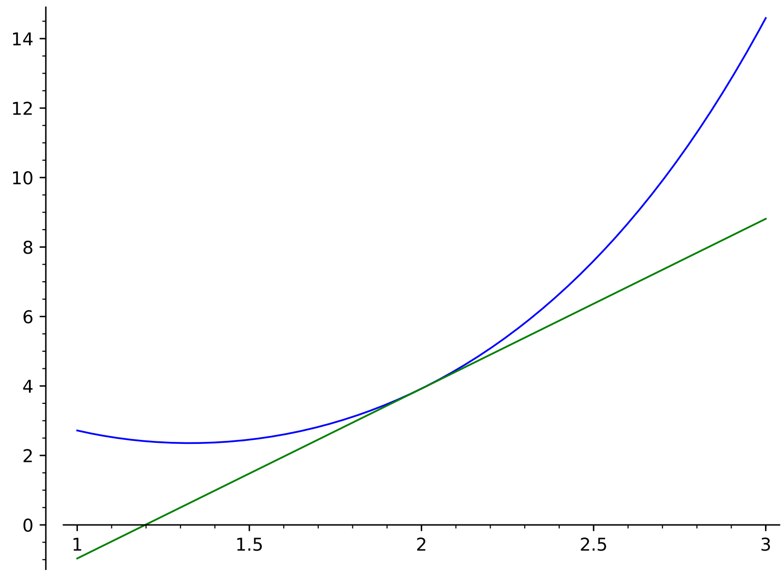

Figura 8: Gráfico da função f e da sua reta tangente no intervalo $[1, 3]$.

Um jeito um pouco mais rápido é usando a série de Taylor da função f.

```
sage: f.series(x==2,2)
x |--> (e^2 - 5*log(2)) + (e^2 - 5/2)*(x - 2) + Order((x - 2)^2)
sage: g=f.series(x==2,2).truncate()
sage: g
x |--> 1/2*(x - 2)*(2*e^2 - 5) + e^2 - 5*log(2)
sage: plot(f,1,3)+plot(g,1,3,color='green')
Graphics object consisting of 2 graphics primitives
```

7.1 Atividades

1. Em todas as funções deriváveis do exercício 1 da seção anterior. Esboce o gráfico de f e de sua reta tangente no ponto a.

2. Seja $f(x) = \sqrt{(}x)$. Encontre a função $g(x)$ cujo gráfico é a reta tangente ao gráfico de f no ponto 729. Calcule $f(730.0)$ e $g(730.0)$. Porque esses valores são próximos?

3. Seja f uma função derivável no ponto 3. Sabendo que $f(3) = 9$ e $f'(3) = 5$ qual seria uma boa aproximação para $f(3.01)$?

Esboçando o gráfico da função f	
Esboçar o gráfico de f no intervalo $[a, b]$	`plot(f,a,b)`
Trocando a cor do gráfico de f	`plot(f,a,b,color='red')`
Excluindo pontos $x_1, \ldots, x_k$ do gráfico de f	`plot(f,a,b,exclude=[x1,x2,...,xk])`
Limitando o eixo y à $[c, d]$	`plot(f,a,b,ymin=c,ymax=d)`
Calculando Limites da função f	
Limite de f no ponto a	`limit(f(x),x=a)` ou `lim(f(x),x=a)` ou `f.limit(x=a)` ou `f(x).limit(x=a)`
Limite de f no infinito	`limit(f(x),x=oo)`
Limite de f no ponto a pela direita	`limit(f(x),x=a, dir='plus')` ou `limit(f(x),x=a, dir='right')`
Limite de f no ponto a pela esquerda	`limit(f(x),x=a, dir='minus')` ou `limit(f(x),x=a, dir='left')`
Calculando a derivada da função f	
Derivada de f	`diff(f)` ou `derivative(f)`
Série de Taylor de f no ponto a de ordem n	`f.series(x==a,n)`
Série de Taylor de f truncada	`f.series(x==a,n).truncate()`