Parte II - Aula 3
Laboratório de informática
Resolução de equações

Alex Abreu

Conteúdo

1 Equações no Sage

Nesta seção vamos aprender a usar os comandos `solve` e `find_root` que usamos para resolver equações. Primeiro, notamos que uma uma equação também pode estar atribuída a uma variável. Abaixo, à variável `eq1` está atribuída a equação $x^2 - 3x + 1 = 0$.

```
sage: eq1= x^2-3*x+1==0
sage: eq1
x^2 - 3*x + 1 == 0
sage: eq2= sin(x)+sin(2*x)==cos(x)
sage: eq2
sin(2*x) + sin(x) == cos(x)
```

Conseguimos recuperar os lados esquerdos e direito de uma equação com os comandos `lhs` e `rhs` (significam *left hand side* e *right hand side*).

```
sage: eq1.lhs()
x^2 - 3*x + 1
sage: eq1.rhs()
0
sage: eq2.lhs()
sin(2*x) + sin(x)
sage: eq2.rhs()
cos(x)
```

O comando `solve` possui dois argumentos, o primeiro é a equação (ou equações) que gostaríamos de resolver e o segundo é a variável (ou as variáveis). Abaixo vemos alguns exemplos.

Também podemos resolver equações que envolvam outra variáveis. Abaixo mostramos a solução geral da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$.

```
sage: a,b,c=var('a,b,c')
sage: eq2= a*x^2+b*x+c==0
```

```
sage: solve(eq2, x)
[
x == -1/2*(b + sqrt(b^2 - 4*a*c))/a,
x == -1/2*(b - sqrt(b^2 - 4*a*c))/a
]
```

Podemos resolver equações que envolvem funções exponencias e trigonométricas.

```
sage: eq3= 3^x==5
sage: solve(eq3,x)
[
x == log(5)/log(3)
]
sage: eq4= x^2+cos(a)^2==1
sage: solve(eq4,x)
[
x == -sqrt(-cos(a)^2 + 1),
x == sqrt(-cos(a)^2 + 1)
]
sage: eq5= sin(x)==1/2
sage: solve(eq5,x)
[
x == 1/6*pi
]
```

Note que nem sempre obtemos todas as soluções.

```
sage: sin(5/6*pi)
1/2
```

E nem sempre o Sage é capaz de resolver a equação.

```
sage: eq6= sin(x)==cos(x)
sage: solve(eq6,x)
[
sin(x) == cos(x)
]
```

Por outro lado, o Sage é capaz de resolver a equação equivalente

```
sage: eq7= tan(x)==1
sage: solve(eq7,x)
[
x == 1/4*pi
]
```

As vezes, precisamos simplificar a equação antes de resolvermos.

```
sage: expr=log(x^2+x)-3*log(x)
sage: eq8= expr==0
sage: eq8
log(x^2 + x) - 3*log(x) == 0
sage: solve(eq8,x)
[
log(x^2 + x) == 3*log(x)
]
sage: expr.log_simplify()
log((x + 1)/x^2)
```

```
sage: eq9= expr.log_simplify()==0
sage: eq9
log((x + 1)/x^2) == 0
sage: solve(eq9,x)
[
x == -1/2*sqrt(5) + 1/2,
x == 1/2*sqrt(5) + 1/2
]
```

1.1 Atividades

1. Descubra a fórmula de Cardano para a equação cúbica $ax^3 + cx + d = 0$.
2. Encontre a fórmula para a equação cúbica geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
3. Encontre a fórmula para a equação do quarto grau $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Lodovico Ferrari descobriu essa fórmula em 1545.
4. Resolva as seguintes equações.
   (a) $\log(x)^2 + \log(x) = 6$.
   (b) $x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720 = 0$.
   (c) $\cos(2x) - \cos(x) + 1 = 0$.
   (d) $\log(3x) + \log(x + 2) = 5$.
   (e) $x^2 + x + 2 = 0$.
   (f) $\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(3x) = 0$.

2 Resolvendo equações numericamente

Muitas vezes o Sage não é capaz de resolver uma equação explicitamente.

```
sage: eq1= sin(x)==cos(x)
sage: solve(eq1,x)
[
sin(x) == cos(x)
]
```

Mas podemos pedir para ele achar uma solução numérica (ou seja, aproximada). Para isso, precisamos definir uma função (ou expressão).

```
sage: f(x)=sin(x)-cos(x)
sage: f
x |--> -cos(x) + sin(x)
```

E vamos procurar as raízes desta função. Lembre que as raízes da função f, são os pontos a tais que $f(a) = 0$. Para isso, precisamos achar valores em que f é positiva e negativa (esboçar o gráfico de f ajuda bastante).

```
sage: plot(f,-pi,pi)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
sage: f(0)
-1
sage: f(pi/2)
1
```

Note que como $f(0) < 0$ e $f(\frac{\pi}{2}) > 0$, vemos que f tem que cruzar o eixo x e portanto possuir uma raiz entre 0 e $\frac{\pi}{2}$. Aqui usamos que f é contínua, o que quer dizer que não pode haver saltos no seu gráfico. Procure sobre o Teorema do Valor intermediário na internet.

Agora usamos o comando `find_root` para encontrar uma raiz aproximada. Já sabemos da seção anterior que esta raiz tem que ser $\frac{\pi}{4}$.

```
sage: find_root(f,0,pi/2)
0.785398163397
sage: N(pi/4)
0.785398163397448
```

2.1 Atividades

1. Encontre soluções aproximadas das equações abaixo. Não esqueça de fazer os gráficos.

   (a) $\tan(x) + \sec(x) = 4$.

   (b) $2 * \log(x^2 + x) - 5 * \log(x)^2 == 1$.

   (c) $x^x + x^{\frac{1}{x}} == 3$.

2. Procure na Wikipedia o Teorema do valor intermediário. Escreva o seu enunciado.

3 Resolvendo equações com várias variáveis

O comando `solve` também é capaz de resolver sistemas de equações. Considere o sistema abaixo.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Podemos resolve-lo no sage.

```
sage: y=var('y')
sage: eq1= x+y==4
sage: eq2= x-y==6
sage: solve([eq1,eq2],x,y)
[
[x == 5, y == -1]
]
```

Podemos resolver sistemas mais complicados.

```
sage: w,z= var('w,z')
sage: eq1= 3*x+4*y-z+w==10
sage: eq2= -x-y-7*z+2*w==-4
sage: eq3= 2*x-4*y+z-3*w==13
sage: eq4= 11*x+9*y+2*z+5*w==17
sage: solve([eq1,eq2,eq3,eq4],x,y,z,w)
[
[x == (586/207), y == (7/6), z == (-523/414), w == (-1831/414)]
]
```

```
sage: eq1(x=586/207,y=7/6,z=-523/414,w=-1831/414)
10 == 10
sage: eq2(x=586/207,y=7/6,z=-523/414,w=-1831/414)
-4 == -4
sage: eq3(x=586/207,y=7/6,z=-523/414,w=-1831/414)
```

```
13 == 13
sage: eq4(x=586/207,y=7/6,z=-523/414,w=-1831/414)
17 == 17
```

Os sistemas acima, são sistemas lineares, ou seja, não envolvem termos de grau maior que 1 ou outras funções. Como no exemplo abaixo.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} & = 1 \end{cases}$$

```
sage: eq1= x^2-y^2==1
sage: eq2= x^2/4+y^2/3==1
sage: solve([eq1,eq2],x,y)
[
[x == -4/7*sqrt(7), y == -3/7*sqrt(7)],
[x == -4/7*sqrt(7), y == 3/7*sqrt(7)],
[x == 4/7*sqrt(7), y == -3/7*sqrt(7)],
[x == 4/7*sqrt(7), y == 3/7*sqrt(7)]
]
```

Neste exemplo podemos ver que nem sempre as soluções são únicas.

3.1 Atividades

1. Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} p+q = & 9 \\ px+qy = & -6 \\ px^2+qy^2 = & 24 \\ p = & 1. \end{cases}$$

   Quantas soluções ele possui?

2. Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} x+2y+3z = & 4 \\ -3x+y+z = & 7 \\ -x+5y+7z = & 15 \end{cases}$$

   Quantas soluções ele possui? Você consegue entender a solução dada pelo Sage?

4 Matrizes e sistemas lineares

Uma matriz é uma tabela retangular de números. Matrizes estão intimamente ligadas a sistemas lineares. Por exemplo, considere o seguinte sistema linear.

$$\begin{aligned} 3x-4y+5z = & 14 \\ x+y-8z = & -5 \\ 2x+y+z = & 7 \end{aligned}$$

Este sistema, pode ser descrito pela seguinte matriz.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 5 & 14 \\ 1 & 1 & -8 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

Note que os coeficientes do x aparecem na primeira coluna, do y na segunda e do z na terceira. A quarta coluna são as constantes. Note que a barra vertical entre a terceira e quarta coluna é simplesmente decorativa.

Matrizes possuem uma forma especial chamada forma escalonada. De um ponto de vista, a forma escalonada da matriz é a descrição mais simples do sistema de equações que continua verdadeira, ou seja, possue as mesmas soluções. A forma escalonada da matriz A acima é

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

que corresponde ao sistema

$$\begin{aligned} x + 0y + 0z =& 3 \\ 0x + y + 0z =& 0 \\ 0x + 0y + z =& 1. \end{aligned}$$

Como você pode perceber, este sistema é bem simples de resolver, sua solução é $x = 3$, $y = 0$ e $z = 1$. Cheque que o sistema do início da seção tem essa solução.

Vamos aprender agora como definir e usar matrizes no Sage. Vamos começar com a matriz A que definimos acima, para isso usamos o comando `matrix`. O argumento do comando é uma lista, onde cada elemento da lista é uma linha da matriz. As linhas, por sua vez, também são dadas como lista.

```
sage: A=matrix([[3,-4,5,14],[1,1,-8,-5],[2,1,1,7]])
sage: A
[ 3 -4  5 14]
[ 1  1 -8 -5]
[ 2  1  1  7]
```

Para encontrar a forma escalonada de A usamos o comando `rref` (que é a abreviação de *reduced row echelon form*, ou forma escalonada reduzida por linha).

```
sage: A.rref()
[1 0 0 3]
[0 1 0 0]
[0 0 1 1]
```

4.1 Atividades

1. Leia a página sobre *Eliminação de Gauss* na wikipédia. Faça o escalonamento da matriz A do início da seção numa folha de papel.

2. Encontre a forma escalonada da matriz do sistema do exercicío 2 da seção anterior. Encontre 5 soluções para este sistema.

3. Resolva o sistema linear abaixo, usando o comando `rref`.

$$\begin{aligned} 2x - 5z + y =& 6 + z \\ 5 + z - y =& 0 \\ w + 3(x + y) =& z \\ 1 + 2x - y =& w - 3x \end{aligned}$$

   Não esqueça de ordenar as variáveis, e simplificar as equações.

4. Resolva o sistema linear abaixo, usando os comandos `rref` e `solve`

$$\begin{aligned} x + 3y - z =& 2 \\ 3x - 2y + 5z =& 1 \\ 3x - 13y + 13z =& 11 \end{aligned}$$

   O que você pode dizer sobre esse sistema?

5. Seja $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ uma função cúbica. Sabendo que $f(2) = 3$, $f(3) = 5$, $f(4) = 120$ e $f(-1) = 2$, encontre a, b, c e d.

5 Sistemas determinados, indeterminados e impossíveis

Como você deve ter percebido, nem todo sistema linear possui solução única. Alguns possuem infinitas soluções e outros não possuem soluções. Isso pode ser descoberto a partir da forma escalonada da matriz.

Se a matriz escalonada tem uma linha que só possui zeros, com excessão da ultima coordenada (que é diferente de 0), então o sistema é impossível. Se a matriz escalonada não possui linhas como acima, então o sistema é possível (Note que é possível ter uma linha com todas as coordenadas 0, desde que a última coordenada também seja 0). Se existe uma linha com mais de duas coordenadas não nulas (com excessão da última), então o sistema é indeterminado, ou seja, possui infinitas soluções.

5.1 Atividades

Sobre os sistemas abaixo, diga se ele é impossível, possível determinado ou possível indeterminado. Quando for determinado exiba a solução. Quando for inderteminado apresente 5 soluções.

1.
$$\begin{aligned} x + y =& 4 \\ x - 3y =& -8 \\ 4x - 3y =& -5 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x + y + z =& 0 \\ x - y - 2z =& 3 \\ 4x + 3y + z =& 6 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} x + y + 2z - 3w =& 3 \\ 3x + 2y - 5z + 7w =& 1 \\ -x + 3y - 11z + 3w =& 0 \end{aligned}$$

4.
$$x + y + z + w + t = 13$$

5.
$$\begin{aligned} a + b + c + d + e + f + g + h + i + j =& 10 \\ 2a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f + 2g + 2h + 2i + 2j =& 30 \end{aligned}$$

Comandos para resolução de equações	
Comando para encontrar as soluções da equação `eq` na variável x	`solve([eq],x)`
Comandos para encontrar as soluções das equações `eq1`,..,`eqk` nas variáveis x_1,...,x_k	`solve([eq1,...,eqk],x1,...,xk)`
Comandos para matrizes	
Definir uma matriz com linhas `L1,...,Lk`	`matrix([L1,...,LK])`
Obter a forma escalonada da matrix `A`	`A.rref()`

Tabela 1: Comandos aprendidos na aula de hoje