Parte II - Aula 5
Laboratório de informática
Atividades

Alex Abreu

Conteúdo

1 Juros compostos é a constante e

Nesta seção vamos aprender um pouco sobre juros compostos. Vamos supor que temos um valor inicial V_i e uma taxa de juros j (normalmente j é dado como percentual, mas aqui sempre vamos pesar em j como um número real) que é aplicada a cada período (este pode ser por mês, ano, etc.). Sabemos que depois de decorrido n períodos, o valor final será dado pela fórmula

$$V_f = V_i(1 + j)^n$$

Por exemplo, se o valor inicial for 100, a taxa for 10% ea quantidade de períodos for 7 temos o valor final.

```
sage: v_inicial=100
sage: taxa=0.1
sage: periodos=7
sage: v_inicial*(1+taxa)^periodos
194.871710000000
```

Depois de 7 períodos temos que o valor final é 194.87.

Agora, defina uma função `juros_composto` que tenha como argumentos o valor inicial, a taxa e a quantidade de períodos e retorne o valor final (nos exemplos abaixo a função já foi criada previamente).

```
sage: juros_composto(v_inicial,taxa,periodos)
194.871710000000
sage: juros_composto(100,0.1,7)
194.871710000000
sage: juros_composto(10,0.1,100)
137806.123398224
sage: 10*(1+0.1)^100
137806.123398224
```

Podemos também resolver outros problemas no Sage.

1. Encontro o valor inicial para que com uma taxa de 5% durante 10 períodos tenha-se um valor final igual a 1000.

2. Encontre a quantidade de períodos para que o valor final seja 750 dado que o valor inicial é 200 e a taxa é 3%.

3. Encontre a taxa para que o valor final seja 1000, dado que o valor inicial é 150 e a quantidade de períodos é 10.

Em aulas passadas usamos bastante a constante matemática e. Esta constante aparece frequentemente em matemática, agora vamos aprender uma de suas possíveis definições.

Começamos com o seguinte problema de juros composto. João tem um valor inicial $V_i = 1$. A taxa de juros é 100% ou 1 e o período é um ano. Então, depois de um período de um ano, o valor final é (você não deveria precisar do Sage para fazer esta conta)

```
sage: juros_composto(1,1,1)
2
sage: 1*(1+1)^1
2
```

Agora, João tem a seguinte ideia, em vez de 100% ao ano, o que aconteceria se a taxa fosse 50% e o período 6 meses. Neste caso, depois de um ano (que agora são dois perídos), o valor final é

```
sage: 1*(1+1.0/2)^2
2.25000000000000
```

O que acontece se continuarmos com esse processo.

```
sage: 1*(1+1.0/3)^3
2.37037037037037
sage: 1*(1+1.0/4)^4
2.44140625000000
```

Ou seja, em vez de ter uma taxa de 1 em um período, temos uma taxa de $1/n$ em n períodos. Podemos até definir uma função para ficar mais fácil.

```
sage: f(x)=1*(1+1.0/x)^x
sage: f(10)
2.59374246010000
sage: f(100)
2.70481382942153
```

João percebe que quanto mais ele divide a taxa e aumenta a quantidade de períodos, maior é o valor final. Mais será que tem um limite para esse valor final?

```
sage: f(1000)
2.71692393223559
sage: f(100000)
2.71826823719230
```

Logo percebe-se que vamos ter um limite, quando n for muito grande. De fato, este limite vai ser exatamente e.

```
sage: f(1000000)
2.71828046909575
sage: f(10000000)
2.71828169413208
sage: N(e)
2.71828182845905
sage: lim(f(x), x=oo)
e
```

Ou seja, o maior valor final possível que João pode ter é exatamente e. Rigorosamente, definimos

e por

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Existem outros jeitos de definir e. Podemos ver um abaixo.

1. Seja

$$S_n = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

   Calcule (aproximações numéricas com 30 digítos) de S_{18}, S_{25} e S_{30}, compare com e.

2 Soma dos números de Fibonacci

Relembre da aula passada a sequência de Fibonacci F_n. Esta sequência é definida do seguinte modo $F_1 = F_2 = 1$ e $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Defina a soma

$$S_n = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n.$$

1. Liste os 25 primeiros números de Fibonacci.
2. Usando um laço (`for` ou `while`) escreva as 20 primeiras somas S_n.
3. Conjecture uma fórmula para S_n (em função da sequência de Fibonacci).
4. Tente provar essa fórmula para todo n.

3 O problema de Collatz

A sequência de Collatz é definida do seguinte modo, começamos com um número inteiro positivo a_0. Cada termo seguinte da sequência satisfaz.

$$a_n = \begin{cases} \frac{a_{n-1}}{2} & \text{se } a_{n-1} \text{ for par} \\ 3a_{n-1}+1 & \text{se } a_{n-1} \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Por exemplo, começando com 19, temos a seguinte sequência

$$19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52$$

1. Defina uma função `prox_collatz` que tenha um argumento a e retorna o próximo número da sequência de Collatz depois do a. Ou seja, retorna $a/2$ se a for par ou $3a+1$ se a for ímpar.
2. Usando um laço, escreva os 40 primeiros termos da sequências de Collatz começando com 9, 11, 15, 19, 25, 33 e 39.
3. O que você observa nas sequências acima.
4. Escreva os 40 primeiros termos da sequênica de Collatz começando com 27.
5. Escreva os 150 primeiros termos da sequênica de Collatz começando com 27.
6. Faça uma conjectura sobre as sequência de Collatz. Faça mais exemplos se for preciso.
7. Verifique esta conjectura para os 1000 primeiros números.