Parte II - Aula 6
Laboratório de informática
Técnicas avançadas de plotagem

Alex Abreu

Conteúdo

1 Rotulando gráficos

Muitas vezes é importante rotular gráficos. Nesta seção vamos aprender a fazer isso.

Começamos aprendendo a rotular os eixos, usando o comando `axes_labels` (que traduz para ”rótulos dos eixos”).

```
sage: f(x)=sin(x)
sage: p=plot(f,-pi,pi)
sage: p.axes_labels(['x','y=f(x)'])
None
sage: p.show()
None
```

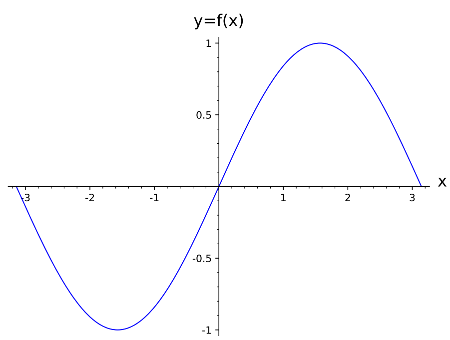

Figura 1: Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$ com os eixos rotulados

Poderíamos também usar rótulos mais descritivos, se $v(t) = t + 3$ é a função que descreve a velocidade (em metros por segundo) de um carro em funçao do tempo t (em segundos), podemos fazer

```
sage: t=var('t')
```

```
sage: v(t)=t+3
sage: p1=plot(v,(t,0,10))
sage: p1.axes_labels(['t (tempo em s)','v (velocidade em m/s)'])
None
sage: p1.show()
None
```

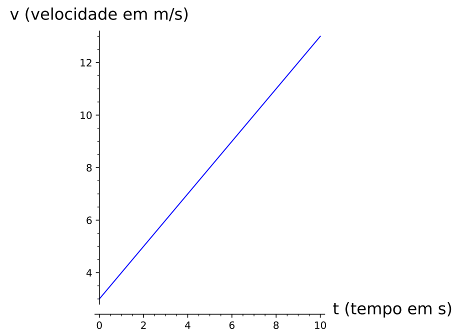

Figura 2: Gráfico da função $v(t) = t + 3$ com os eixos rotulados

Podemos acrescentar um quadriculado no nosso gráfico usando o comando `gridlines`.

```
sage: f(x)=sin(x)
sage: p=plot(f,-pi,pi, gridlines='minor')
sage: p1=plot(f,-pi,pi, gridlines=True)
sage: p.show()
None
sage: p1.show()
None
```

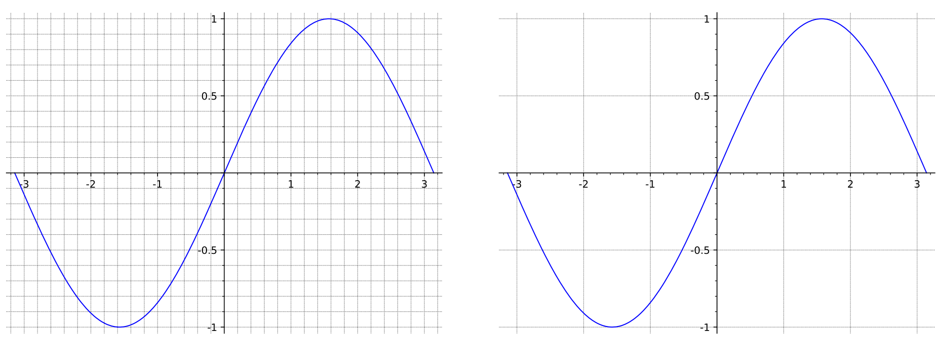

Figura 3: Gráfico da função $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ com quadriculados

Se quisermos acrescentar uma moldura ao gráfico, usamos o comando `frame`

```
sage: f(x)=sin(x)
sage: p=plot(f,-pi,pi, gridlines='minor',frame=True)
sage: p.show()
None
```

Também podemos acrescentar texto ao gráfico, com o comando `text`. O comando `text` possui 2 argumentos: O texto que queremos que apareça no gráfico e o lugar no plano cartesiano onde queremos que o texto apareça. Podemos mudar a cor e o tamanho da fonte também.

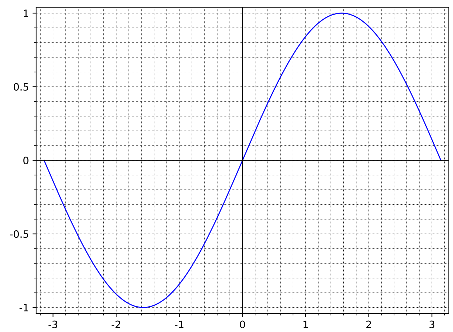

Figura 4: Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$ com quadriculado e moldura.

```
sage: f(x)=sin(x)
sage: p=plot(f,-pi,pi)
sage: texto=text(u'O gr\u00E1fico da fun\u00E7\u00E3o f(x)=sen(x)'
   ,(1.5,-0.5),color='black', fontsize=10)
sage: p1=p+texto
sage: p1.show()
None
```

Podemos também acrescetar pontos e setas no gráfico. Usando os comandos `point` and `arrow`.

```
sage: ponto=point((pi/2,1), size=40, color='red')
sage: seta=arrow((1,0.3),(pi/2-0.05,0.95),color='red')
sage: p2=p1+ponto+seta
sage: p2.show()
None
```

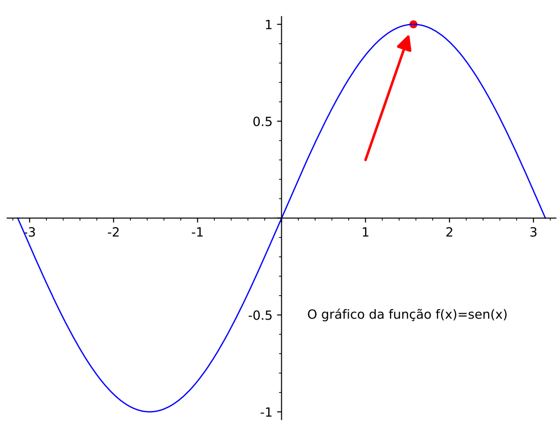

Figura 5: Gráfico com texto, ponto e seta.

Também podemos mudar o estilo da linha dos gráficos com o comando `linestyle`.

```
sage: p1=plot(sin(x),-pi,pi)
sage: p2=plot(sin(x)/2,-pi,pi,linestyle='-')
sage: p3=plot(sin(x)/3,-pi,pi,linestyle='-.')
sage: p4=plot(sin(x)/4,-pi,pi,linestyle=':')
sage: p5=plot(sin(x)/5,-pi,pi,linestyle='--')
sage: p=p1+p2+p3+p4+p5
```

```
sage: p.show()
None
```

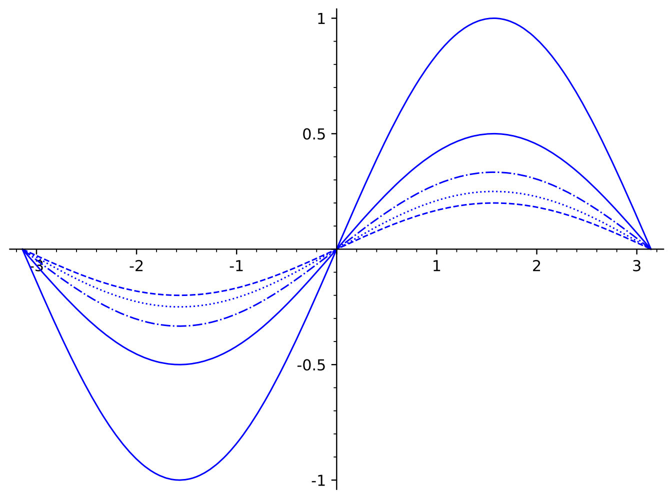

Figura 6: Gráficos com diferentes tipos de traço.

1.1 atividades

1. Faça o gráfico da função $f(x) = x^2 - x\,\mathrm{sen}(\pi x)$ e da sua reta tangente no ponto 1. Rotule os eixos x e y, garanta que as cores dos gráficos sejam diferentes e com traços diferentes, marque o ponto onde está acontecendo a tangência e coloque uma seta apontando para este ponto.

2 Plotagem paramétrica

Existem outros modos de descrever curvas no plano cartesiano. Podemos, por exemplo, parametrizar os pontos desta curva. Isto quer dizer, escrevemos os pontos da curva na forma $(f(t), g(t))$, onde f e g são funções na variável t (que será o parâmetro).

Considere a curva

$$C := \{(\cos(t), \mathrm{sen}(t)), t \in [0, 2\pi]\}.$$

Ou seja, C é o conjunto de todos os pontos da forma $(\cos(t), \mathrm{sen}(t))$ onde t pode assume um valor no intervalo $[0, 2\pi]$.

Para representar a curva C graficamente usamos o comando `parametric_plot`.

```
sage: c(t)=(cos(t),sin(t))
sage: p=parametric_plot(c(t),(t,0,2*pi))
sage: p.show()
None
```

Pela figura podemos perceber que a curva C é uma circunferência de centro no ponto $(0, 0)$ e raio 1. Você consegue provar isso?

Note que nem toda curva é o gráfico de uma função. A circuferência C acima não é o gráfico de nenhuma função.

Se quisermos uma circunferência de centro (x_0, y_0) e raio R, podemos parametrizá-la por $c(t) = (x_0 + R\cos(t), y_0 + R\,\mathrm{sen}(t))$.

```
sage: c(t)=(5+2*cos(t),3+2*sin(t))
sage: parametric_plot(c,(t,0,2*pi))
```

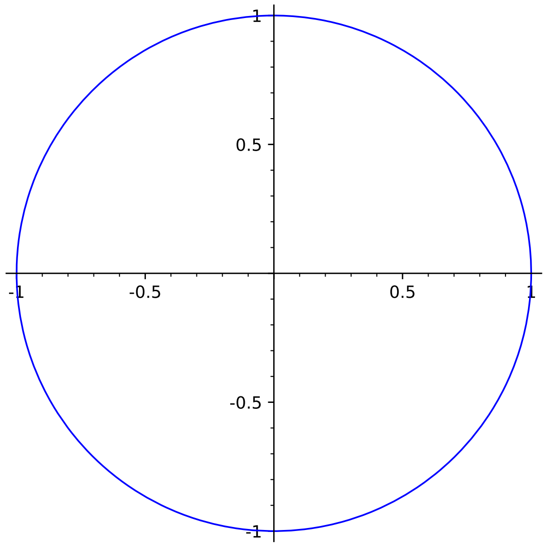

Figura 7: Gráfico paramétrico da curva $c(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t))$.

```
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
```

Usando um laço, podemos juntar várias curvas numa única figura.

```
sage: j=var('j')
sage: c(j,t)=(j*cos(t),j*sin(t))
sage: p=parametric_plot(c(0,t),(t,0,2*pi))
sage: for j in range(1,21):
....:     p=p+parametric_plot(c(j,t),(t,0,2*pi))
sage: p.show()
None
```

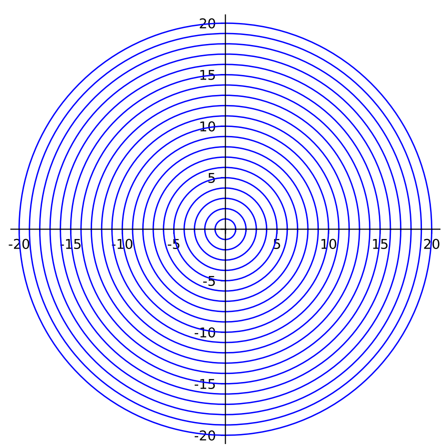

Figura 8: Várias circunferências concêntricas.

```
sage: p=parametric_plot(c(0,t),(t,0,2*pi),rgbcolor=(1,0,0))
sage: for j in range(1,21):
....:     p=p+parametric_plot(c(j,t),(t,0,2*pi),rgbcolor=(1-j/20,j
    /20,j/20))
```

```
sage: p.show()
None
```

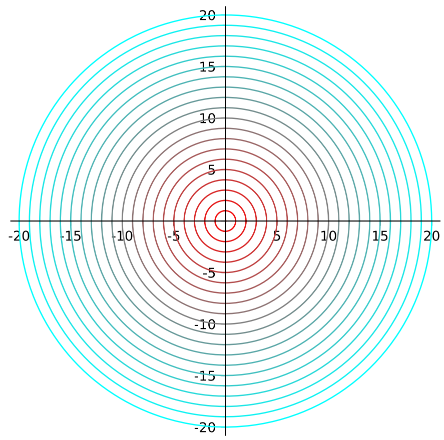

Figura 9: Circunferências concêntricas com gradiente de cor.

2.1 Atividades

1. Esboce o traço das seguintes curvas em forma paramétrica.

   (a) $c(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

   (b) $c(t) = (t\cos(t), t\operatorname{sen}(t))$ no interval $[0, 10\pi]$.

   (c) $c(t) = (\operatorname{sen}(2t), \operatorname{sen}(3t))$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

   (d) $c(t) = (t^2, t^3)$ no intervalo $[-2, 2]$.

   (e) $c(t) = (t^2 - 1, t^3 - t^2)$ no intervalo $[-2, 2]$.

   (f) $c(t) = (2t + 1, 3t + 2)$ no intervalo $[-4, 4]$.

   (g) $c(t) = (2t^2 + 1, 3t^2 + 2)$ no intervalo $[0, 4]$.

2. Esboce, na mesma figura, o traço das seguintes curvas.

   (a) $c(a, t) = (\cos(t), a\operatorname{sen}(t))$, onde $a = 1, 1.2, 1.4, \ldots, 4$ e t percorre o intervalo $[0, 2\pi]$.

   (b) $c(a, t) = (t^2 - a, t^3 - a * t^2)$ onde $a = 1, 1.2, 1.4, \ldots, 4$ e t percorre o intervalo $[-\sqrt{}(a) - \frac{1}{a+1}, \sqrt{a} + \frac{1}{a+1}]$.

3 Coordenadas polares

Na seção anterior aprendemos a parametrizar a circunferência de centro $(0,0)$ e raio R como $c(t) = (R\cos(t), R\operatorname{sen}(T))$. De fato, todo ponto (x, y) do plano cartesiano pode ser escrito como $(r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta))$ onde r é a distância de (x, y) a origem $(0, 0)$ e θ é o ângulo que a reta que liga $(0, 0)$ a (x, y) faz com o eixo x (Veja a Figura 10). Os números r e θ são chamadas de coordenadas polares do ponto (x, y).

Muitas vezes, a parametrização de uma curva é dada em forma polar, ou seja $c(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\operatorname{sen}(t))$. Como nas atividades 1.(a) (aqui $r(t) = 1$), 1.(b) (aqui $r(t) = t$).

Poderíamos usar o comando `polar_plot` e ter escrito simplesmente.

```
sage: t=var('t')
sage: polar_plot(1,(t,-pi/2,pi/2))
```

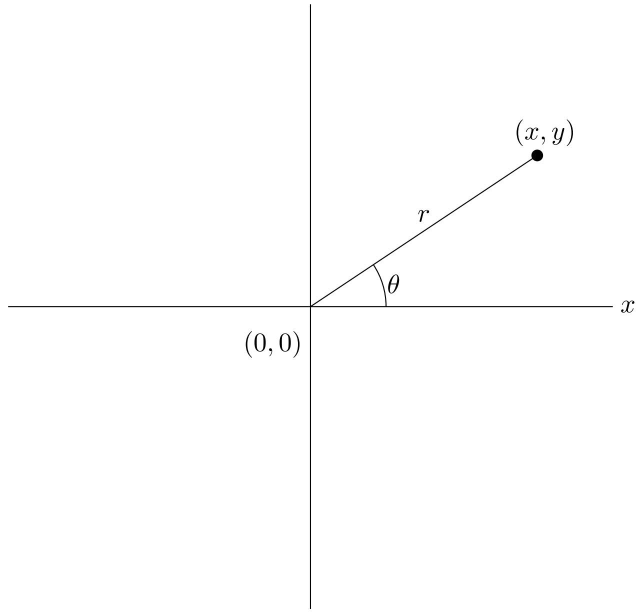

Figura 10: As coordenadas polares do ponto (x, y).

```
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
sage: polar_plot(t, (t,0,10*pi))
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
```

Note que o comando `polar_plot(t,(t,0,10*pi))` é equivalente a `parametric_plot((t*cos(t),t*sin(t)),(t,0,1`

3.1 Atividades

1. Esboce o traço das curvas abaixo parametrizadas em coordenadas polares.

   (a) $r(\theta) = 2\cos(5\theta)$, para θ no intervalo $[0, 2\pi]$.

   (b) $r(\theta) = \theta^3$, para θ no intervalo $[-10 * pi, 10 * pi]$.

   (c) $r(\theta) = 2 - 2\,\mathrm{sen}(\theta)$, para θ no intervalo $[0, 2\pi]$.

   (d) $r(\theta) = 2\,\mathrm{sen}(4\theta)$, para θ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

4 Plotagem implícita

Outra maneira de descrevermos curvas é implicitamente. Ou seja, curvas definidas através de equações. Para isso, usamos o comando `implicit_plot`.

```
sage: y=var('y')
sage: g(x,y)=x^2+y^2-16
sage: implicit_plot(g(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5))
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
```

O comando `implicit_plot` tem 3 argumentos, a função em duas variáveis e os dois intervalos que queremos as variáveis. É importante observar que o que esta sendo esboçado é a curva dada pela equação $x^2 + y^2 - 16 = 0$, ou seja, o comando `implicit_plot` sempre vai igualar a função a 0 para obter a curva desejada.

No exemplo acima, vemos que a equação $x^2 + y^2 - 16 = 0$ representa uma circunferência.

Podemos repetir o exemplo da seção 2 usando equações, em vez de parametrizações.

```
sage: a=var('a')
```

```
sage: g(a,x,y)=x^2+y^2-a^2
sage: p=implicit_plot(g(0,x,y),(x,-20,20),(y,-20,20),rgbcolor
   =(1,0,0))
sage: for j in range(1,21):
....:     p=p+implicit_plot(g(j,x,y),(x,-20,20),(y,-20,20),
   rgbcolor=(1-j/20,j/20,j/20))
sage: p.show()
None
```

4.1 Atividades

1. Esboce os traços da curvas a seguir.
   (a) $x^4 + y^4 = 16$.
   (b) $4x^2 + 9y^2 = 36$.
   (c) $x^2 - y^2 = 4$.
   (d) $x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 4y - 10 = 0$.
   (e) $x^2 + y^5 + 5xy = 25$.
   (f) $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)$.
   (g) $y^2 = x^2(x + 1)$.
   (h) $y^2 = x(x + 1)(x - 1)$.
2. Esboce, na mesma figura, os traços das curvas $x^2 + y^2 = \frac{a}{10}(3 - x)^2$, para $a = 1, 2, \ldots, 20$.