Laboratório de Informática - Prova

Alex Abreu

09/12/2019

1. Podemos fatorar expressões no Sage usando o comando `factor`. Como no exemplo abaixo.

```
sage: y=var('y')
sage: expr=x^2-y^2
sage: expr.factor()
(x + y)*(x - y)
```

   Fatore a expressão $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. Prove que se x, y, z são números reais tais que $x + y + z = 0$, então $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

2. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (\sin(x) - x)/x^3$ se $x \neq 0$ e $f(0) = -1/6$. Esboce o gráfico de f no intervalo $[-6\pi, 6\pi]$ e depois no intervalo $[-0.1, 0.1]$. Dica: é suficiente definir e fazer o gráfico de

```
sage: f(x)=(sin(x)-x)/x^3
```

   Calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$. A função f é contínua no ponto 0?

3. Dado o sistema linear

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 4x + 9y &= -3 \end{aligned}$$

   podemos usar o seguinte código no sage para resolver o sistema.

```
sage: y=var('y')
sage: eq1=2*x+3*y==7
sage: eq2=4*x+9*y==-3
sage: solve([eq1,eq2],x,y)
[
[x == 12, y == (-17/3)]
]
```

   Podemos checar a solução dada pleo Sage.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 12 + 3 \cdot \frac{-17}{3} &= 7 \\ 4 \cdot 12 + 9 \cdot \frac{-17}{3} &= -3. \end{aligned}$$

   Resolva o seguinte sistema linear

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & + & 5y & + & 3z & + & 7w & = -2 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & - & w & = 10 \\ 4x & + & 2y & + & 2z & - & 3w & = 17 \\ -3x & - & 6y & - & 3z & + & w & = -4 \end{array}$$

4. Nem todos os sistemas lineares possuem solução, por exemplo o sistema

$$\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & 3y & + & z & = 2 \\ x & + & 2y & + & 3z & = 5 \\ x & + & y & - & 2z & = 3 \end{array}$$

não possui solução. Isso pode ser visto da forma escalonada da matriz do sistema.

```
sage: M=matrix([[2,3,1,2],[1,2,3,5],[1,1,-2,3]])
sage: M.rref()
[ 1  0 -7  0]
[ 0  1  5  0]
[ 0  0  0  1]
```

Note que a última linha da forma escalonada possui somente zeros, e um número 1 na última coluna.

Classifique os sistemas abaixo em possíveis determinados, possíveis indeterminados e impossíveis.

(a)

$$\begin{array}{rcrl} 2x & + & 3y & = 5 \\ 4x & + & 6y & = 10 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & 3y & + & z & = 5 \\ x & + & y & + & 3z & = 0 \\ x & + & 2y & + & z & = 12 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & 3y & + & z & = 5 \\ x & + & y & + & 3z & = 0 \\ x & + & 2y & - & 2z & = 12 \end{array}$$

5. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a função definida do seguinte modo. Vale que $f(0) = 1$ e para $n > 0$

$$f(n) = \begin{cases} 2f(n/2) & \text{se } n \text{ é par} \\ f((n-1)/2) + 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

podemos definir a função f recursivamente no sage do seguinte modo

```
sage: def f(n):
....:     if n==0:
....:         return 1
....:     if n%2==0:
....:         return 2*f(n/2)
....:     if n%2==1:
....:         return f((n-1)/2)+1
```

Lembre que o comando `n%2` calcula o resto da divisão de n por 2. Com o sage podemos calcular, por exemplo, $f(123) = 12$, $f(1328) = 352$ e $f(3492832) = 8160$.
Seja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(0) = 1$ e

$$g(n) = \begin{cases} 3g(n/3) & \text{se } n \text{ é múltiplo de 3} \\ 2g((n-1)/3) + 1 & \text{se } n \text{ deixa resto 1 na divisão por 3} \\ g((n-2)/3) + 2 & \text{se } n \text{ deixa resto 2 na divisão por 3} \end{cases}$$

para $n > 0$. Calcule $g(1439)$, $g(2321)$ e $g(654273)$.

6. Dada uma lista $X = [x_0, \ldots, x_{n-1}]$ podemos definir uma função que calcula a soma de todos os elementos dessa lista do seguinte modo

```
sage: def soma(X):
....:     n=len(X) #calcula o comprimento da lista X
....:     soma=0;
....:     for i in range(n):
....:        soma=soma+X[i]
....:     return soma
```

Defina uma função *produtointerno* cujas entradas são duas listas $X = [x_0, \ldots, x_{n-1}]$ e $Y = [y_0, \ldots, y_{n-1}]$ e a saída é $x_0y_0 + x_1y_1 + \ldots x_{n-1}y_{n-1}$.

7. Dada uma equação em duas variáveis, podemos usar o comando `implicit_plot` para fazer o gráfico da curva definida por essa equação. Por exemplo, se quisermos esboçar a curva dada pela equação

$$x^2 + 4y^2 = 4.$$

basta usar os seguintes comandos no sage

```
sage: y=var('y')
sage: f(x,y)=x^2+4*y^2-4
sage: implicit_plot(f(x,y),(x,-3,3),(y,-2,2))
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
```

e obtemos o Figura 1.

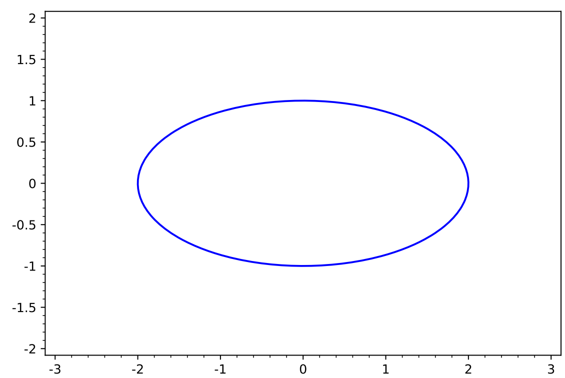

Figura 1: Figura do exercício 5

Esboce a lemniscata de Bernoulli

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2).$$

8. Podemos usar o comando *implicit_plot3d* para esboçar uma superfície. Esboce o parabolóide hiperbólico

$$z = x^2 - y^2.$$

Não esqueça de definir a variável z.

9. Dada uma função $f(x, y)$ em duas variáveis, podemos esboçar suas curvas de nível do seguinte modo. Primeiro esboçamos uma curva de nível por um ponto fixo

```
sage: f(x,y)=x^2+y^2
sage: p=implicit_plot(f(x,y)-f(0,1),(x,-5,5),(y,-5,5))
sage: p
```

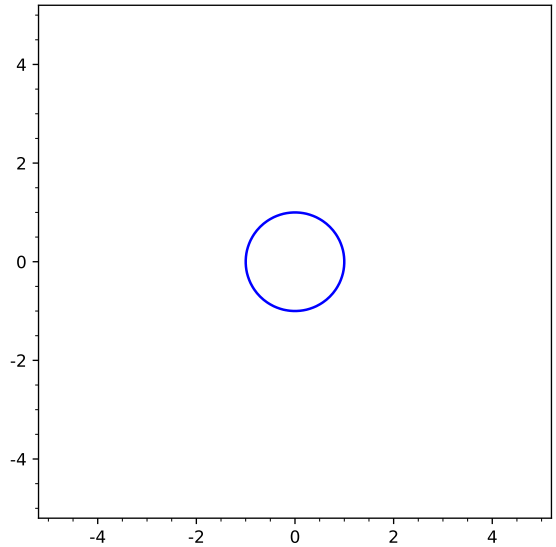

Figura 2: Curva de nível da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ pelo ponto (0,1)

```
Graphics object consisting of 1 graphics primitive
```

Para as demais curvas de nível, basta usarmos o laço `for` e variar o ponto.

```
sage: for i in range(1,20):
....:     p=p+implicit_plot(f(x,y)-f(0,1+i/4),(x,-5,5),(y,-5,5)
   )
....: p
```

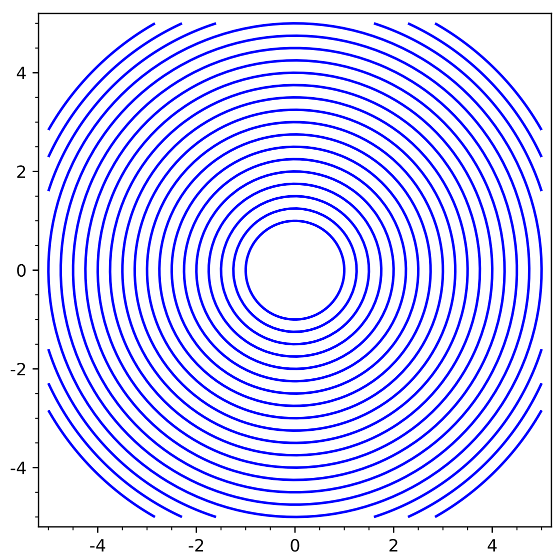

Figura 3: Curvas de nível da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ pelos pontos pontos $(0, 1 + i/4)$, onde $i = 0, \ldots, 19$

Esboce as curvas de nível da função

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

pelos pontos da forma $(i/6, i/6 + (-1)^i)$.