

Matemática para Economia I

Alex Farah Pereira

Departamento de Análise - Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

24 de abril de 2025

Limite de Função

Vamos estudar o comportamento da função em um determinado ponto dado.

Consideremos, inicialmente, a função $f(x) = x^3 - 2x + 1$ e o ponto $a = 0$.

O que acontece quando tomamos valores de x próximo de 0?

x	-0,1	-0,01	-0,001
$f(x)$	1,199	1,019999	1,001999999

 $(x \rightarrow 0^-)$

x	0,001	0,01	0,1
$f(x)$	0,998000001	0,980001	0,801

 $(x \rightarrow 0^+)$

Se x se aproxima de 0 ($x \rightarrow 0$), então $f(x)$ se aproxima de 1 ($f(x) \rightarrow 1$).

Matematicamente,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - 2x + 1) = 1.$$

Neste caso, $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - x + 1) = 1 = f(0)$.

Limite de Função

Façamos a mesma análise para a função $f(x) = x^3 - 2x + 1$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 2$.

O que acontece quando tomamos valores de x próximo de 0?

x	-0,1	-0,01	-0,001
$f(x)$	1,199	1,019999	1,001999999

 ($x \rightarrow 0^-$)

x	0,001	0,01	0,1
$f(x)$	0,998000001	0,980001	0,801

 ($x \rightarrow 0^+$)

Se x se aproxima de 0 ($x \rightarrow 0$), então $f(x)$ se aproxima de 1 ($f(x) \rightarrow 1$).

Temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - 2x + 1) = 1 \neq 2 = f(0).$$

Limite de Função

Consideremos a função racional $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ e o ponto $a = 1$.

O que acontece quando tomamos valores de x próximo de 1?

x	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01
$f(x)$	-1,9702	-1,9970	-1,9997		-2,0003	-2,0030	-2,0303

Se x se aproxima de 1 ($x \rightarrow 1$), então $f(x)$ se aproxima de -2 ($f(x) \rightarrow -2$).

Matematicamente,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = -2.$$

Limite de Função

Sejam f uma função real de uma variável real e $a \in \mathbb{R}$ (o número a não precisa, necessariamente, estar no domínio de f).

Dizemos que f tem **limite** $L \in \mathbb{R}$, e denotamos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

quando $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de L para todos os valores x próximos de a .

O Limite, quando existe, é único.

IMPORTANTE: Limite é um fenômeno local. Estamos interessados em saber o que acontece com o gráfico da função ao redor de um ponto fixado.

Propriedades dos Limites

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L + M$;
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = L.M$;
- (c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ desde que $M \neq 0$;
- (d) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^p = L^p$ desde que L^p exista.

Como consequência da proposição anterior temos que se p e q são polinômios, então

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} \quad (q(a) \neq 0).$$

Limite de Função

Exemplo:

O limite de toda função constante é a própria constante, ou seja, $\lim_{x \rightarrow a} c = c$.

Exemplo:

As funções $p(x) = -2x + 5$ e $q(x) = 3x^3 + 4x^2 - 1$ são polinômios e, portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} (-2x + 5) = -2 \frac{1}{2} + 5 = 4$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1} (3x^3 + 4x^2 - 1) = 3(-1)^3 + 4(-1)^2 - 1 = 0.$$

Limite de Função

Exemplo:

Usamos a propriedade (d) para calcular os seguintes limites

$$\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt[3]{2x}) = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = 2$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1/3} ((2x + 3)^{1/4}) = (2(-\frac{1}{3}) + 3)^{1/4} = (\frac{7}{3})^{1/4}.$$

Exemplo:

Com as propriedades (b) e (d) calculamos os seguintes limites

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x + 4)^3 (x + 2)^2 = (-1 + 4)^3 (-1 + 2)^2 = 27$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x - 2)^{10} (x + 4)^{1/2} = (0 - 2)^{10} (0 + 4)^{1/2} = 2^{11} = 2048.$$

Exemplo:

As propriedades nos ajudam no cálculo dos seguintes limites

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 4}{3x - 2} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{3x + 1}{2x} = \frac{9}{4},$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1}}{(3x + 1)(x^2 - x - 4)} = -\frac{1}{4}.$$

Limite de Função

O cálculo de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ nos dá uma expressão do tipo " $\frac{0}{0}$ ".

Se p e q são polinômios tais que $p(a) = q(a) = 0$, como determinar o valor, caso exista, de $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)}$?

Voltando ao limite acima, fatorando o numerador temos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \stackrel{“\frac{0}{0}”}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2.$$

Assim, se p e q são polinômios tais que $p(a) = q(a) = 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} \stackrel{“\frac{0}{0}”}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cancel{(x-a)}r(x)}{\cancel{(x-a)}s(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{s(x)}.$$

Limites Laterais

Exemplo: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

O que acontece quando nos aproximamos de 1 pela direita, isto é, por valores maiores que 1?

x	1	1,0001	1,001	1,01
$f(x)$		-2,0003	-2,0030	-2,0303

Vemos que a medida que tomamos x próximo de 1 pela direita, os valores $f(x)$ se aproximam de -2 .

Matematicamente,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = -2.$$

Limites Laterais

Exemplo: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

O que acontece quando nos aproximamos de 1 pela esquerda, isto é, por valores menores que 1?

x	0,99	0,999	0,9999	1
$f(x)$	-1,9702	-1,9970	-1,9997	

vemos que a medida que tomamos x próximo de 1 pela esquerda, os valores $f(x)$ se aproximam de -2 .

Matematicamente,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = -2.$$

Limites Laterais

Os **limites laterais** de f em a são definidos da seguinte maneira:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \text{limite lateral à direita de } a$$

é o valor para onde $f(x)$ se aproxima quando x se aproxima de a pela direita de a , isto é, $a < x$; e

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \text{limite lateral à esquerda de } a$$

é o valor para onde $f(x)$ se aproxima quando x se aproxima de a pela esquerda de a , isto é, $x < a$.

Segue direto da definição de limites e limites laterais que o limite de f no ponto a existe se, e somente se, os limites laterais existem em a e são iguais. As propriedades de limites também são válidas para os limites laterais.

Voltemos a analisar a função $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ mas agora no ponto $a = 2$.

O que acontece quando tomamos valores de x próximo de 2?

x	1,9	1,99	1,999	2	2,111	2,11	2,1
$f(x)$	-29	-299	-2999		3001	301	31

A medida que tomamos x próximo de 2, os valores de $f(x)$ crescem sem parar pela direita de 2 e decrescem sem parar pela esquerda de 2.

Matematicamente,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty.$$

Esses exemplos mostram que se k é um número real não nulo, então a expressão do tipo " $\frac{k}{0}$ " nos dá como resposta o infinito.

É importante entender que infinito não é número!

Expressões do tipo " $\frac{\infty}{\infty}$ ", " $\infty - \infty$ " e " $\infty \cdot 0$ " são indeterminadas.

Por outro lado, para outros tipos de expressões temos as seguintes respostas

- " $k + \infty = +\infty$ " e " $k - \infty = -\infty$ " para qualquer $k \in \mathbb{R}$;
- " $k \cdot +\infty = +\infty$ " e " $k \cdot -\infty = -\infty$ " para $k > 0$;
- " $k \cdot +\infty = -\infty$ " e " $k \cdot -\infty = +\infty$ " para $k < 0$.

Dica: quando calculamos o limite do quociente de duas funções e obtemos a expressão " $\frac{k}{0}$ ", a resposta é ∞ . Para sabermos se a resposta é $+\infty$ ou $-\infty$ devemos fazer um estudo do sinal do denominador, para sabermos se o denominador a medida que se aproxima do ponto é positivo ou negativo.

Representaremos o sinal do denominador do seguinte modo, 0^+ no caso positivo e 0^- em caso negativo. Assim, basta aplicar a regra de sinais para o quociente.

Dizer que uma função "explode" quando se aproxima de um ponto, significa que o gráfico desta função se aproxima de uma reta vertical.

A reta $x = a$ é dita uma **assíntota vertical** da função $y = f(x)$ quando pelo menos uma das seguintes condições é satisfeita

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty.$$

Dos exemplos anteriores temos que

- $x = 2$ é assíntota vertical de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$;
- $x = 0$ é assíntota vertical de $f(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}$);
- $x = 3$ é assíntota vertical de $f(x) = \frac{2}{x - 3}$;
- $x = -2$ é assíntota vertical de $f(x) = \frac{x}{x + 2}$.

Limites no Infinito

Seja $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$. O domínio é $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

O que acontece com os valores de $f(x)$ a medida que tomamos x cada vez maior?

x	100	1000	10000	100000
$f(x)$	1,0306	1,003006	1,00030006	1,0000300006

Ou seja, $f(x)$ tende a 1 quando x cresce indefinidamente.

Matematicamente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = 1.$$

Da mesma forma, temos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = 1.$$

Limites no Infinito

O gráfico nos ajuda muito a analisar o que acontece com o limite de uma função no infinito. Porém, nem sempre temos o gráfico para nos auxiliar nesta questão.

Para cálculo com limites no infinito, tomamos como base o limite no infinito (agora conhecido) da função $y = \frac{1}{x^n}$.

Quando estamos querendo saber o limite no infinito de funções racionais, colocamos os termos de maior de grau do numerador e do denominador em evidência para reescrevermos este quociente em função da função $f(x) = \frac{1}{x^n}$.

Limites no Infinito

Dizer que uma função se aproxima de um valor quando tomamos valores indo para infinito, significa que o gráfico desta função se aproxima de uma reta horizontal.

A reta $y = L$ é dita uma **assíntota horizontal** da função $y = f(x)$ quando

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

Dos exemplos anteriores temos que

- $y = 1$ é assíntota horizontal de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$;
- $y = 0$ é assíntota horizontal de $f(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}$);
- $y = 1$ é assíntota horizontal de $f(x) = \frac{x}{x + 2}$;
- $y = -\frac{2}{3}$ é assíntota horizontal de $g(x) = \frac{-2x^2 + 3}{3x^2 + 1}$.

Funções Contínuas

Uma função cujo gráfico não tem "buracos" ou "saltos" é dita contínua.

Matematicamente, uma função $y = f(x)$ é dita **contínua** em $a \in \text{dom}(f)$ quando

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Dizemos que f é **descontínua** em a quando f não é contínua em a .

Dizemos que f é **contínua à direita (esquerda)** de a quando

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad (\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)).$$

Dizemos que f é contínua em $I \subset \mathbb{R}$ quando f é contínua em todos os pontos do conjunto I .

Das propriedades de limites vemos que polinômios são funções contínuas em $\mathbb{R}$ e funções racionais são funções contínuas em todos os pontos de seu domínio.

Funções Contínuas

Proposição

Se f e g são funções reais contínuas em $a \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$, então as funções $f + g$, fg e f/g (desde que $g(a) \neq 0$) são contínuas em a .

Teorema do Valor Intermediário

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$. Se d é um número entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.

