Matemática para Economia I

Alex Farah Pereira

Departamento de Análise - Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

08 de maio de 2025

Derivadas

A **derivada** de uma função real $y = f(x)$ em um ponto $a \in \text{dom}(f)$, denotado por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

quando o limite existe.

Fazendo $h = x - a$, a definição de derivada é equivalente a

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Dizemos que f é **derivável** em a quando $f'(a)$ existe. Geometricamente, $f'(a)$ representa o coeficiente angular da reta tangente. Dizemos que f é derivável em um conjunto $I \subset \mathbb{R}$, quando f é derivável em todo ponto de I.

Notações: $f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = Df(a)$.

Derivadas

Exemplo

A função $f(x) = x$ é derivável em $a = 1$ pois

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x - 1} = 1.$$

Então $f'(1) = 1$.

Exemplo

A função $f(x) = x^2$ é derivável em $a = 4$ pois

$$\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} (x + 4) = 8.$$

Então $f'(4) = 8$.

Derivada

Exemplo

A função $f(x) = x^2 - 8x + 9$ é deriável em $a = -1$ pois

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(-1+h)^2 - 8(-1+h) + 9 - 18}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 10h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (h - 10) \\
&= -10.
\end{aligned}$$

Então $f'(-1) = -10$.

Como a derivada de uma função é um limite, temos as definições:

A **derivada lateral à esquerda e à direita** de uma função $y = f(x)$ no ponto $a \in \mathrm{dom}(f)$ são definidas pelos seguintes limites, respectivamente,

$$f'_{-}(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

e

$$f'_{+}(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Deste modo, existe $f'(a)$ se, e somente se, existem as derivadas laterais de f em a e são iguais.

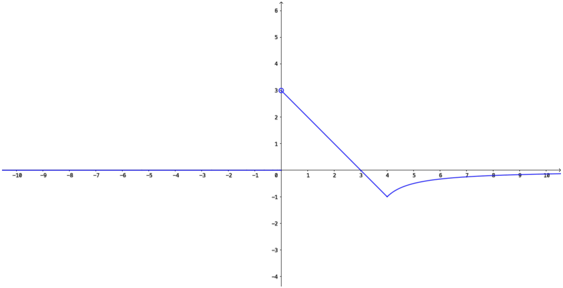
Derivada

Exemplo

A função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 3 - x, & 0 < x < 4 \\ \frac{1}{3-x}, & x \geq 4 \end{cases} .$$

não é derivável em $a = 0$ e $a = 4$ pois $f'_-(0) = 0$, $f'_+(0)$ não existe, $f'_-(4) = -1$ e $f'_+(4) = 1$.

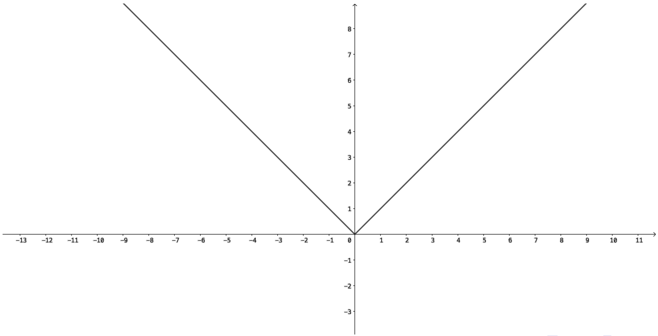


Propriedades da Derivada

Derivada $\Rightarrow$ Continuidade

Se $y = f(x)$ é uma função derivável em $a \in \mathrm{dom}(f)$, então f é contínua em a.

Portanto uma condição mínima para que a função seja derivável é que seja contínua. Porém nem toda função contínua é derivável. Por exemplo, a função modular $f(x) = |x|$ é contínua em $a = 0$ mas não é derivável neste ponto já que $f'_{-}(0) = -1$ e $f'_{+}(0) = 1$.



Derivada de função constante

A derivada de uma função constante é zero.

Se $f(x) = c$, então

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

e daí $f'(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Derivada de potência

Se $f(x) = x^p$, onde $p \in \mathbb{R}$ e $p \neq 0$, então $f'(x) = px^{p-1}$.

Vejamos este resultado somente para $p = 3$. Calculando o limite de derivada

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

e daí $f'(x) = 3x^2$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Propriedades da Derivada

Se $y = f(x)$ e $y = g(x)$ são funções deriváveis e c é uma constante, então

(a) $(cf)'(x) = cf'(x)$;

(b) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;

(c) (Regra do Produto)

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

(d) (Regra do Quociente)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Segue das proposições anteriores que polinômios e funções racionais são funções deriváveis em todos os pontos de seus domínios.

Propriedades da Derivada

Exemplo

A derivada da função $f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^2 + 3$ é

$$f'(x) = 5x^4 + 12x^3 + 4x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo

A derivada da função $g(x) = x^{-3} + \sqrt{x} - 2x + 1$ é

$$g'(x) = -3x^{-4} + \frac{1}{2}x^{-1/2} - 2$$

para todo $x > 0$.

Propriedades da Derivada

Exemplo

A derivada da função $h(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \sqrt{2}x^3$ é

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - 3\sqrt{2}x^2$$

para todo $x \neq 0$.

Exemplo

A derivada da função $f(x) = (3x+1)(5x^2 - \frac{2}{x})$ é

$$f'(x) = 3(5x^2 - \frac{2}{x}) + (3x+1)(10x + \frac{2}{x^2})$$

para todo $x \neq 0$.

Exemplo

A derivada da função $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}x - \frac{1}{2}}{4x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \sqrt{2}}$ é

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}(4x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \sqrt{2}) - (\sqrt{3}x - \frac{1}{2})(16x^3 - x^2)}{(4x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \sqrt{2})^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo

A derivada da função $g(x) = \dfrac{x^5 - x^2 + 1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ é

$$g'(x) = \frac{(5x^4 - 2x)(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) - (x^5 - x^2 + 1)(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})}{(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^2}$$

para todo $x > 0$.