

Matemática para Economia I

Alex Farah Pereira

Departamento de Análise - Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

13 de maio de 2025

Reta Tangente

Como vimos, dizer que f é uma função derivável em $a \in \text{dom}(f)$ é equivalente à existência de uma reta limite, a chamada reta tangente, em a onde $f'(a)$ é o coeficiente angular desta reta. Assim, a **Reta Tangente** de f no ponto $P(a, f(a))$ tem equação

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Note que

- (a) a reta tangente é horizontal em P se, e somente se, $f'(a) = 0$;
- (b) se f é contínua em a , então a reta tangente é vertical se, e somente se,
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty.$$
 Neste caso, f não é derivável em a .

Geometricamente, a existência da derivada de f em a , nos diz também que o gráfico da função de f próximo do ponto a se comporta como uma função linear, ou seja, a reta tangente de f em P é a reta que melhor aproxima o gráfico da função em torno de a .

Reta Tangente

Exemplo

Se $f(x) = x^3$, então a equação da reta tangente de f em $P(1, 1)$ é dada por

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

Como $f'(x) = 3x^2$, temos $f'(1) = 3$ e, portanto, a equação da reta tangente é $y - 1 = 3(x - 1)$.

Exemplo

Dada $g(x) = \frac{x}{x+3}$ a equação da reta tangente de g em $a = -1$ é dada por

$$y - g(-1) = g'(-1)(x - (-1)).$$

Então $g'(x) = \frac{3}{(x+3)^2}$ e assim $g'(-1) = \frac{3}{4}$. Daí a equação da reta tangente é $y + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}(x + 1)$.

Reta Tangente

Exemplo

Vamos encontrar os pontos sobre o gráfico da função $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ onde a reta tangente é horizontal. Então $f'(x) = 4x^3 - 6x$ e resolvendo $f'(x) = 0$ temos $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ e $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$. Então os pontos são $(0, 2)$, $(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{4})$ e $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{4})$.

Exemplo

Façamos o mesmo exercício para a função

$$g(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1}.$$

Temos $g'(x) = \frac{-2x^2 + 4x}{(x^2 - x + 1)^2}$ e daí $g'(x) = 0$ nos dá $x = 0$ ou $x = 2$. Assim, os pontos são $(0, -1)$ e $(2, 5/3)$.

Regra da Cadeia

Lembramos que se f e g são funções, então **função composta** $g \circ f$ é a função definida da seguinte forma $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ (quando bem definido). Assim em certos casos se f e g são funções reais é possível definir tanto $g \circ f$ e $f \circ g$. Em geral $g \circ f \neq f \circ g$.

Regra da Cadeia

Se f é derivável em a e g é derivável em $f(a)$, então $g \circ f$ é derivável em a e

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Da Regra da Cadeia, temos que se $h(x) = (f(x))^p$ onde $p \in \mathbb{R}$ e $p \neq 0$, então

$$h'(x) = p(f(x))^{p-1}f'(x).$$

Regra da Cadeia

Exemplo

Se $f(x) = (3x + 1)^2$, então pela Regra da Cadeia

$$f'(x) = 2(3x + 1) \cdot 3$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo

Se $g(x) = (x^5 + 2x)^{100}$, então pela Regra da Cadeia

$$g'(x) = 100(x^5 + 2x)^{99}(5x^4 + 2)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo

A função $f(x) = \frac{1}{\frac{3}{4}x + x^2}$ é derivável em $\mathbb{R} \setminus \{0, -3/4\}$. Podemos usar a Regra do Quociente para achar a derivada de f . Mas observe que a Regra da Cadeia também pode ser aplicada, bastando escrever $f(x) = (\frac{3}{4}x + x^2)^{-1}$ e daí

$$f'(x) = - \left(\frac{3}{4}x + x^2 \right)^{-2} \left(\frac{3}{4} + 2x \right)$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -3/4\}$.

Exemplo

Usamos a Regra da Cadeia na função $f(x) = \left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^4$ que é derivável em $\mathbb{R} \setminus \{1/3\}$. Observe que a função dentro do parêntesis é um quociente de modo que devemos também aplicar a Regra do Quociente. Então

$$f'(x) = 4 \left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^3 \left(\frac{2(3x-1) - (2x+1)3}{(3x-1)^2}\right)$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{1/3\}$.

Exemplo

Agora, se $g(x) = (2x^2 - 3x)^{10}(-5 + x^3)^{1/2}$, então g é o produto de duas funções compostas que são deriváveis e neste caso devemos aplicar a Regra do Produto junto com a Regra da Cadeia. Assim

$$g'(x) = 10(2x^2 - 3x)^9(4x - 3)(-5 + x^3)^{1/2} + (2x^2 - 3x)^{10} \frac{1}{2}(-5 + x^3)^{-1/2} 3x^2$$

para todo $x \in (\sqrt[3]{5}, +\infty)$.