

Matemática para Economia I

Alex Farah Pereira

Departamento de Análise - Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

15 de maio de 2025

Funções Exponenciais

Seja $b > 0$ e $b \neq 1$. A **função exponencial com base b** é dada por

$$f(x) = b^x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Observe que se $b = 1$, então $f(x) = 1$ e a função exponencial com base $b = 1$ é uma função constante.

Propriedades:

- $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = (0, +\infty)$ ($b^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$);
- f é uma função contínua em $\mathbb{R}$;
- $0 < b < 1$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} b^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$ e f é decrescente em $\mathbb{R}$ ($x < y \Rightarrow b^y < b^x$);
- $b > 1$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} b^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = +\infty$ e f é crescente em $\mathbb{R}$ ($x < y \Rightarrow b^x < b^y$).

Funções Exponenciais

O número real e é definido como

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = 2,71828....$$

A função $f(x) = e^x$ é chamada **função exponencial natural**. Note que $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e como $e > 1$ temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Funções Logarítmicas

Seja $x > 0$. O **logaritmo** de x na base b ($b > 0$, $b \neq 1$), denotado por $\log_b x$, é o número y tal que $b^y = x$, ou seja,

$$y = \log_b x \Leftrightarrow b^y = x.$$

Dado a base b e os números reais positivos u e v , temos

- $\log_b u = \log_b v \Leftrightarrow u = v$;
- $\log_b 1 = 0$ e $\log_b b = 1$;
- $\log_b(uv) = \log_b u + \log_b v$ e $\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$;
- $\log_b(u^r) = r \log_b u$ para qualquer $r \in \mathbb{R}$.

Funções Logarítmicas

Seja $b > 0$, $b \neq 1$. A **função logarítmica com base b** é dada por

$$g(x) = \log_b x$$

para todo $x > 0$.

Propriedades:

- $\text{dom}(g) = (0, +\infty)$ e $\text{Im}(g) = \mathbb{R}$;
- g é uma função contínua em $(0, +\infty)$;
- $0 < b < 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_b x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_b x = -\infty$ e g é decrescente em $(0, +\infty)$
 $(x < y \Rightarrow \log_b y < \log_b x)$;
- $b > 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_b x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_b x = +\infty$ e g é crescente em $(0, +\infty)$
 $(x < y \Rightarrow \log_b x < \log_b y)$.

Funções Logarítmicas

No caso em que $b = e$, o número $\log_e x$ é chamado **logaritmo natural de x** e será denotado por $\ln x$.

Então

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x.$$

A função $g(x) = \ln x$ é chamada **função logarítmica natural**. Note que pelas definições das funções exponencial e logarítmica segue as seguintes relações

$$e^{\ln x} = x \quad \forall x > 0 \quad \text{e} \quad \ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como $e > 1$ temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Derivadas de Exponenciais e Logarítmicas

A função $f(x) = e^x$ é derivável em $\mathbb{R}$ e sua derivada é

$$f'(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

É possível provar que a função exponencial de base e é a única função cuja derivada é ela própria.

A regra da cadeia envolvendo a função exponencial fica então da seguinte forma: se h é uma função derivável, então

$$F(x) = e^{h(x)} \quad \Rightarrow \quad F'(x) = e^{h(x)} h'(x).$$

Derivadas de Exponenciais e Logarítmicas

A função $g(x) = \ln x$ é derivável em $(0, +\infty)$ e sua derivada é

$$g'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

A regra da cadeia envolvendo a função logarítmica fica então da seguinte forma: se h é uma função derivável, então

$$G(x) = \ln h(x) \quad \Rightarrow \quad G'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}.$$

Derivadas de Exponenciais e Logarítmicas

Exemplo

$$f(x) = x^3 e^x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x$$

Exemplo

$$g(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} \Rightarrow g'(x) = \frac{2x(e^x - 1) - x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}$$

Exemplo

$$h(x) = \frac{e^{-2x^2}}{x^3 + 5x} \Rightarrow h'(x) = \frac{e^{-2x^2}(-4x)(x^3 + 5x) - e^{-2x^2}(3x^2 + 5)}{(x^3 + 5x)^2}$$

Derivadas de Exponenciais e Logarítmicas

Exemplo

$$f(x) = x^2 \ln x \Rightarrow f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x}$$

Exemplo

$$g(x) = x^4 \ln \sqrt[3]{x} \Rightarrow g'(x) = 4x^3 \ln \sqrt[3]{x} + x^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Exemplo

$$h(x) = \frac{3 \ln x}{e^x + x} \Rightarrow h'(x) = \frac{\frac{3}{x}(e^x + x) - 3 \ln x(e^x + 1)}{(e^x + x)^2}.$$

Regra de L'Hospital

A noção de derivada irá nos ajudar a resolver de forma mais rápida limites indeterminados do tipo " $0/0$ " e " ∞/∞ ".

Regra de L'Hospital

Sejam $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis em I com $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\lambda = \infty$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda.$$

O mesmo resultado vale para limites laterais ou limites no infinito.

Não se esqueça de conferir antes se o limite estudado se encaixa nas condições da Regra de L'Hospital para poder ser aplicado!!!

Regra de L'Hospital

Exemplo

O limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ é uma indeterminação do tipo "0/0" e, aplicando a Regra de L'Hospital tem-se

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2.$$

Exemplo

O limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x+1)^2}$ é uma indeterminação do tipo " ∞/∞ " e, aplicando a Regra de L'Hospital tem-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(x+1)} = 0.$$

Regra de L'Hospital

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 3x^4 + 5x - 3}{4x^5 + 2x^3 - 5x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4 - 12x^3 + 5}{20x^4 + 6x^2 - 10x} = -\frac{1}{8}.$$

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{2x^3 + 3x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 6x + 3}{6x^2 + 6x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x + 6}{12x + 6} = 0.$$

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2}{5x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 2x}{10x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x - 2}{10} = -\infty.$$

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - e^{-x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{6x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{6} = +\infty.$$

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} = 0$$

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$