

Matemática para Economia I

Alex Farah Pereira

Departamento de Análise - Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

20 de maio de 2025

Teorema de Rolle

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema do Valor Médio

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Intervalos de Crescimento e Decrescimento

Sabemos que a derivada de função constante é zero. Como consequência do Teorema do Valor Médio, prova-se que as únicas funções cuja derivada é zero em todos os pontos são as funções constantes.

Funções de Derivada Zero

Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b) .

- (a) Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então $f(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$ (isto é, f é uma função constante em $[a, b]$).
- (b) Se $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, então $f(x) = g(x) + c$ para todo $x \in [a, b]$ (isto é, f e g diferem por uma constante).

Intervalos de Crescimento e Decrescimento

Lembramos que uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita **crescente** (ou **decrecente**) no intervalo I quando dados $a, b \in I$ temos

$$a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) < f(b) \quad (f(b) < f(a)).$$

Sinais da Derivada

Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo I .

- (a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é crescente em I .
- (b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é decrescente em I .

f crescente (ou decrescente) em $I \not\Rightarrow f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) para todo $x \in I$

$f(x) = x^3$ é uma função crescente em $\mathbb{R}$ com $f'(0) = 0$

f crescente (ou decrescente) em $I \Rightarrow f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) para todo $x \in I$

Intervalos de Crescimento e Decrescimento

Exemplo

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$\cdot f'(x) > 0 \text{ em } (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

$$\cdot f'(x) < 0 \text{ em } (-2, 1)$$

$$\cdot f'(-2) = f'(1) = 0$$

f é crescente em $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ e decrescente em $(-2, 1)$.

Exemplo

$$g(x) = x^4 + x^3 \Rightarrow g'(x) = 4x^3 + 3x^2$$

$$\cdot g'(x) > 0 \text{ em } (-3/4, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\cdot g'(x) < 0 \text{ em } (-\infty, -3/4)$$

$$\cdot g'(0) = g'(-3/4) = 0$$

g é crescente em $(-3/4, 0) \cup (0, +\infty)$ e decrescente em $(-\infty, -3/4)$.

Exemplo

$$h(x) = \frac{x^2}{x+1} \Rightarrow h'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

- $h'(x) > 0$ em $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
- $h'(x) < 0$ em $(-2, -1) \cup (-1, 0)$
- $h'(-2) = f'(0) = 0$

h é crescente em $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ e decrescente em $(-2, -1) \cup (-1, 0)$.

Exemplo

$$f(x) = (x^2 - 4)^{2/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x}{3(x^2 - 4)^{1/3}}$$

- $f'(x) > 0$ em $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
- $f'(x) < 0$ em $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
- $f'(0) = 0$ e não existem $f'(-2)$ e $f'(2)$

f é crescente em $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ e decrescente em $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.

Exemplo

$$g(x) = xe^{2x} \Rightarrow g'(x) = (1 + 2x)e^{2x}$$

- $g'(x) > 0$ em $(-1/2, +\infty)$

- $g'(x) < 0$ em $(-\infty, -1/2)$

- $g'(-1/2) = 0$

g é crescente em $(-1/2, +\infty)$ e decrescente em $(-\infty, -1/2)$.

Exemplo

$$h(x) = x^2 - 8 \ln x \Rightarrow h'(x) = \frac{2x^2 - 8}{x}$$

- $h'(x) > 0$ em $(2, +\infty)$
- $h'(x) < 0$ em $(0, 2)$
- $h'(2) = 0$

h é crescente em $(2, +\infty)$ e decrescente em $(0, 2)$.