Matemática para Economia I

Alex Farah Pereira

Departamento de Análise - Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

22 de maio de 2025

Concavidade

A derivada de uma função f também é uma função. Se f' é uma função derivável denotamos $f'' = (f')'$ e chamamos derivada segunda de f. Analogamente, definimos $f''' = (f'')'$, $f^{(iv)} = (f''')', \ldots, f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ onde $n \in \mathbb{N}$.
Outras notações: $f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$, $f'''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3}, \ldots$.

Exemplo

$$\begin{aligned}
f(x) = 2x^4 - 3x^2 \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = 8x^3 - 6x \\
&\Rightarrow \quad f''(x) = 24x^2 - 6 \\
&\Rightarrow \quad f'''(x) = 48x \\
&\Rightarrow \quad f^{(iv)}(x) = 48 \\
&\Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = 0 \quad \forall n \geq 5
\end{aligned}$$

Concavidade

Exemplo

$f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo

$g(x) = \dfrac{x+1}{x^2-2}$

$$g'(x) = \frac{-x^2-2x-2}{(x^2-2)^2}$$

e

$$g''(x) = \frac{2x^5+6x^4+8x^3-8x^2-24x-8}{(x^2-2)^4}.$$

Concavidade

Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo I. Dizemos que f é **côncavo para cima** em I quando o gráfico de f estiver acima de todas as suas retas tangentes em I. Caso contrário, f é **côncavo para baixo** em I.

Teste da Concavidade

Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função cuja derivada segunda existe no intervalo I.

(a) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é côncava para cima em I.

(b) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é côncava para baixo em I.

Concavidade

Exemplo

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 12x + 6$$

- $f''(x) > 0$ em $(-1/2, +\infty)$
- $f''(x) < 0$ em $(-\infty, -1/2)$
- $f''(-1/2) = 0$

f é côncava para cima em $(-1/2, +\infty)$ e côncava para baixo em $(-\infty, -1/2)$.
Mudança de concavidade em $(-1/2, f(-1/2))$.
Já sabemos que f é crescente em $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ e decrescente em $(-2, 1)$.
Além disso, $f'(-2) = f'(1) = 0$ (reta tangente horizontal).

Concavidade

Exemplo

$g(x) = x^4 + x^3 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 4x^3 + 3x^2 \quad \Rightarrow \quad g''(x) = 12x^2 + 6x$

- $g''(x) > 0$ em $(-\infty, -1/2) \cup (0, +\infty)$
- $g''(x) < 0$ em $(-1/2, 0)$
- $g''(-1/2) = g''(0) = 0$

g é côncava para cima em $(-\infty, -1/2) \cup (0, +\infty)$ e côncava para baixo em $(-1/2, 0)$. Mudança de concavidade em $(-1/2, g(-1/2))$ e $(0, g(0))$.
Já sabemos que g é crescente em $(-3/4, +\infty)$ e decrescente em $(-\infty, -3/4)$.
Além disso, $g'(-3/4) = 0$ (reta tangente horizontal).

Concavidade

Exemplo

$$h(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow \quad h''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$$

- $h''(x) > 0$ em $(-1, +\infty)$
- $h''(x) < 0$ em $(-\infty, -1)$

h é côncava para cima em $(-1, +\infty)$ e côncava para baixo em $(-\infty, -1)$.
Já sabemos que f é crescente em $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ e decrescente em $(-2, -1) \cup (-1, 0)$. Além disso, $f'(-2) = f'(0) = 0$ (reta tangente horizontal).

Concavidade

Exemplo

$$f(x) = (x^2 - 4)^{2/3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{4x}{3(x^2-4)^{1/3}} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \frac{4(x^2-12)}{3(x^2-4)^{4/3}}$$

- $f''(x) > 0$ em $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$
- $f''(x) < 0$ em $(-\sqrt{12}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \sqrt{12})$
- $f''(-\sqrt{12}) = f''(\sqrt{12}) = 0$ e não existem $f''(-2)$ e $f''(2)$

f é côncava para cima em $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$ e côncava para baixo em $(-\sqrt{12}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \sqrt{12})$. Mudança de concavidade em $(-\sqrt{12}, f(-\sqrt{12}))$ e $(\sqrt{12}, f(\sqrt{12}))$.
Já sabemos que f é crescente em $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ e decrescente em $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$. Além disso, $f'(0) = 0$ (reta tangente horizontal) e não existem $f'(-2)$ e $f'(2)$.

Concavidade

Exemplo

$g(x) = xe^{2x} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = (1+2x)e^{2x} \quad \Rightarrow \quad g''(x) = (4+4x)e^{2x}$

- $g''(x) > 0$ em $(-1, +\infty)$
- $g''(x) < 0$ em $(-\infty, -1)$
- $g''(-1) = 0$

g é côncava para cima em $(-1, +\infty)$ e côncava para baixo em $(-\infty, -1)$.
Mudança de concavidade em $(-1, g(-1))$.
Já sabemos que g é crescente em $(-1/2, +\infty)$ e decrescente em $(-\infty, -1/2)$.
Além disso, $g'(-1/2) = 0$ (reta tangente horizontal).

Concavidade

Exemplo

$$h(x) = x^2 - 8\ln x \quad \Rightarrow \quad h'(x) = \frac{2x^2 - 8}{x} \quad \Rightarrow \quad h''(x) = \frac{2x^2 + 8}{x^2}$$

- $h''(x) > 0$ em $(0, +\infty)$

h é côncava para cima em $(0, +\infty)$
Já sabemos que h é crescente em $(2, +\infty)$ e decrescente em $(0, 2)$. Além disso, $h'(2) = 0$ (reta tangente horizontal).

Concavidade

Sejam $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real definida no intervalo I e $a \in \text{dom}(f)$.

Dizemos que o ponto $(a, f(a))$ do gráfico de f é dito um **ponto de inflexão** quando a função f é contínua em a e em $(a, f(a))$ ocorre uma mudança de concavidade.

Os candidatos a pontos de inflexão são pontos $(x, f(x))$ do gráfico de f (isto é, $x \in \text{dom}(f)$) onde $f''(x) = 0$ ou não existe $f''(x)$.

Estes são candidatos pois analisando o exemplo de $f(x) = x^4$, temos que $f''(0) = 0$ mas em $(0, 0)$ não ocorre uma mudança de concavidade visto que $f''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.