Matemática para Economia I

Alex Farah Pereira

Departamento de Análise - Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

27 de maio de 2025

Máximos e Mínimos

Uma função real $y = f(x)$ possui um **máximo relativo** em $c \in \text{dom}(f)$ quando $f(x) \leq f(c)$ para todos os valores de x próximos de c. Analogamente, dizemos que $y = f(x)$ possui um **mínimo relativo** em $c \in \text{dom}(f)$ quando $f(c) \leq f(x)$ para todos os valores x próximos de c. Os máximos e mínimos relativos de f são chamados de **extremos relativos**.

Dizemos que um número $c \in \text{dom}(f)$ é um **número crítico** de f quando $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe. O ponto correspondente $(c, f(c))$ do gráfico de f é chamado de **ponto crítico** de f.

A proposição a seguir nos mostra uma condição para que existam extremos relativos.

Extremos Relativos

Se $y = f(x)$ tem um extremo relativo em $c \in \text{dom}(f)$ e f é derivável em c, então $f'(c) = 0$.

Máximos e Mínimos

Assim, os candidatos à extremos relativos são os números críticos. O teste a seguir determinará a natureza destes números críticos.

Teste da Derivada Primeira para Extremos Relativos

Seja $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo aberto I e $c \in I$ um número crítico de f tal que f' existe em I, exceto possivelmente em c.

(a) Se $f'(x) > 0$ para $x < c$ e $f'(x) < 0$ para $x > c$, então f tem um máximo relativo em c.

(b) Se $f'(x) < 0$ para $x < c$ e $f'(x) > 0$ para $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c.

(c) Se o sinal de f' é o mesmo antes e depois de c, então f não tem um extremo relativo em c.

Máximos e Mínimos

Exemplo

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 14 \qquad \text{dom}(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 \quad \Rightarrow \quad$ números críticos: $\quad x = -2$ e $x = 3$

<u>Teste da Derivada Primeira</u>

- $x = -2$ é um máximo relativo de f, $f(-2) = 58$ é um valor máximo relativo de f e $(-2, 58)$ é um ponto de máximo relativo de f;
- $x = 3$ é um mínimo relativo de f, $f(3) = -67$ é um valor mínimo relativo de f e $(3, -67)$ é um ponto de mínimo relativo de f.

Máximos e Mínimos

Exemplo

$g(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 8 \qquad \text{dom}(g) = \mathbb{R}$

$g'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 36x \quad \Rightarrow \quad$ números críticos: $\; x = 0 \;$ e $\; x = -3$

Teste da Derivada Primeira

- $x = -3$ não é um extremo relativo de g;
- $x = 0$ é um mínimo relativo de g, $g(0) = -8$ é um valor mínimo relativo de g e $(0, -8)$ é um ponto de mínimo relativo de g.

Máximos e Mínimos

Exemplo

$h(x) = x^4 - x^3 \qquad \text{dom}(h) = \mathbb{R}$

$h'(x) = 4x^3 - 3x^2 \quad \Rightarrow \quad$ números críticos: $\; x = 0$ e $x = 3/4$

Teste da Derivada Primeira

- $x = 0$ não é um extremo relativo de h;
- $x = 3/4$ é um mínimo relativo de h, $h(3/4) = -27/256$ é um valor mínimo relativo de h e $(3/4, -27/256)$ é um ponto de mínimo relativo de h.

Máximos e Mínimos

Exemplo

$f(x) = 2x - 3x^{2/3}$ $\qquad$ $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2(\sqrt[3]{x} - 1)}{\sqrt[3]{x}} \quad \Rightarrow \quad \text{números críticos:} \quad x = 0 \text{ e } x = 1$$

<u>Teste da Derivada Primeira</u>

- $x = 0$ é um máximo relativo de f, $f(0) = 0$ é um valor máximo relativo de f e $(0, 0)$ é um ponto de máximo relativo de f;
- $x = 1$ é um mínimo relativo de f, $f(1) = -1$ é um valor mínimo relativo de f e $(1, -1)$ é um ponto de mínimo relativo de f.

Máximos e Mínimos

Exemplo

$g(x) = xe^{x/2} \qquad \text{dom}(g) = \mathbb{R}$

$g'(x) = (1 + x/2)e^{x/2} \quad \Rightarrow \quad$ números críticos: $\quad x = -2$

Teste da Derivada Primeira

- $x = -2$ é um mínimo relativo de g, $g(-2) = -2e^{-1}$ é um valor mínimo relativo de g e $(-2, -2e^{-1})$ é um ponto de mínimo relativo de g.

Máximos e Mínimos

Exemplo

$h(x) = \dfrac{e^{-x}}{x} \qquad \text{dom}(h) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$h'(x) = \dfrac{e^{-x}(-x-1)}{x^2} \quad \Rightarrow \quad$ números críticos: $\quad x = -1$

Teste da Derivada Primeira

- $x = -1$ é um máximo relativo de h, $h(-1) = -e$ é um valor máximo relativo de h e $(-1, -e)$ é um ponto de máximo relativo de h.

Exemplo

$f(x) = e^{1/x} \qquad \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f'(x) = -\dfrac{e^{1/x}}{x^2} \quad \Rightarrow \quad$ não tem números críticos

Não tem extremos relativos!!!

Exemplo

$g(x) = \ln(x^2 + 1) \qquad \text{dom}(g) = \mathbb{R}$

$g'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad$ números críticos: $\quad x = 0$

<u>Teste da Derivada Primeira</u>

- $x = 0$ é um mínimo relativo de g, $g(0) = 0$ é um valor mínimo relativo de g e $(0, 0)$ é um ponto de mínimo relativo de g.

Máximos e Mínimos

Exemplo

$h(x) = \dfrac{\ln x}{x^2} \qquad \mathrm{dom}(h) = (0, +\infty)$

$h'(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3} \quad \Rightarrow \quad$ números críticos: $\quad x = e^{1/2}$

<u>Teste da Derivada Primeira</u>

- $x = e^{1/2}$ é um máximo relativo de h, $h(e^{1/2}) = 1/2e$ é um valor máximo relativo de h e $(e^{1/2}, 1/2e)$ é um ponto de máximo relativo de h.