Matemática para Economia I

Alex Farah Pereira

Departamento de Análise - Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

29 de maio de 2025

Máximos e Mínimos

Em certos casos, podemos usar a derivada segunda para saber a natureza do ponto crítico, como mostra a proposição a seguir.

Teste da Derivada Segunda para Extremos Relativos

Seja $y = f(x)$ uma função duas vezes derivável no intervalo aberto I contendo $c \in \text{dom}(f)$ tal que $f'(c) = 0$.

(a) Se $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo relativo em c.

(b) Se $f''(c) < 0$, então f tem um máximo relativo em c.

(c) Se $f''(c) = 0$ nada podemos afirmar.

O teste da derivada segunda embora mais fácil de ser aplicado se torna inconclusivo caso ocorra o item (c). Assim devemos recorrer ao teste da derivada primeira. Observe ainda que o teste da derivada segunda só pode ser aplicado nos números críticos cuja derivada no ponto seja zero!

Máximos e Mínimos

Exemplo

$f(x) = x^3 - 6x \qquad \text{dom}(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6 \quad \Rightarrow \quad$ números críticos: $\;x = -\sqrt{2}$ e $x = \sqrt{2}$

$f''(x) = 6x \quad \Rightarrow \quad f''(-\sqrt{2}) = -6\sqrt{2}$ e $f''(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$

Teste da Derivada Segunda

- $x = \sqrt{2}$ é um mínimo relativo de f, $f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$ é um valor mínimo relativo de f e $(\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$ é um ponto de mínimo relativo de f;
- $x = -\sqrt{2}$ é um máximo relativo de f, $f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$ é um valor máximo relativo de f e $(-\sqrt{2}, f(-\sqrt{2}))$ é um ponto de máximo relativo de f.

Máximos e Mínimos

Exemplo

$g(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2 \qquad \text{dom}(g) = \mathbb{R}$

$g'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x \quad \Rightarrow \quad$ números críticos: $\; x = 0$ e $x = 1$

$g''(x) = 36x^2 - 48x + 12 \quad \Rightarrow \quad g''(0) = 12$ e $g''(1) = 0$

Teste da Derivada Segunda

- $x = 0$ é um mínimo relativo de g, $g(0) = 2$ é um valor mínimo relativo de g e $(0, 2)$ é um ponto de mínimo relativo de g.

Teste da Derivada Primeira

- $x = 1$ não é extremo relativo de g.

Máximos e Mínimos

Exemplo

$h(x) = 3x\sqrt[3]{x-2} \qquad \mathrm{dom}(h) = \mathbb{R}$

$h'(x) = \dfrac{4x-6}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} \quad \Rightarrow \quad$ números críticos: $\ x = 3/2$ e $x = 2$

$h''(x) = \dfrac{4x-12}{\sqrt[3]{(x-2)^5}} \quad \Rightarrow \quad h''(3/2) = 6\sqrt[3]{1024}$

Teste da Derivada Segunda

- $x = 3/2$ é um mínimo relativo de h, $h(3/2) = -9/2\sqrt[3]{2}$ é um valor mínimo relativo de h e $(3/2, h(3/2))$ é um ponto de mínimo relativo de h.

Teste da Derivada Primeira

- $x = 2$ não é extremo relativo de h.

Máximos e Mínimos

Exemplo

$f(x) = x^2 e^{x^3} \qquad \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = (2x + 3x^4)e^{x^3} \quad \Rightarrow \quad$ números críticos: $\; x = 0$ e $x = \sqrt[3]{-2/3}$

$f''(x) = (2 + 18x^3 + 9x^6)e^{x^3} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 2$ e $f''(\sqrt[3]{-2/3}) = -6e^{-2/3}$

Teste da Derivada Segunda

- $x = 0$ é um mínimo relativo de f, $f(0) = 0$ é um valor mínimo relativo de f e $(0, 0)$ é um ponto de mínimo relativo de f;
- $x = \sqrt[3]{-2/3}$ é um máximo relativo de f, $f(\sqrt[3]{-2/3}) = \sqrt[3]{4/9}e^{-2/3}$ é um valor máximo relativo de f e $(\sqrt[3]{-2/3}, f(\sqrt[3]{-2/3}))$ é um ponto de máximo relativo de f.

Exemplo

$$g(x) = \frac{\ln x}{x} \qquad \mathrm{dom}(g) = (0, +\infty)$$

$$g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \text{números críticos:} \quad x = e$$

$$g''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3} \quad \Rightarrow \quad g''(e) = -1/e^3$$

Teste da Derivada Segunda

- $x = e$ é um máximo relativo de g, $g(e) = 1/e$ é um valor máximo relativo de g e $(e, 1/e)$ é um ponto de máximo relativo de g.

Máximos e Mínimos

Uma função $y = f(x)$ possui um **máximo absoluto** em $c \in \text{dom}(f)$ quando $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in \text{dom}(f)$. Analogamente, dizemos que f possui um **mínimo absoluto** em $c \in \text{dom}(f)$ quando $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in \text{dom}(f)$. Os máximos e mínimos absolutos de f são chamados de **extremos absolutos**.

Não é uma tarefa fácil encontrar ponto de máximos e mínimos absolutos. A proposição a seguir nos garante que em alguns tipos de intervalos esses extremos absolutos existem.

Existência de Extremos Absolutos

Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$, então existem máximo e mínimo absolutos de f.

Máximos e Mínimos

Como todo extremo absoluto é um extremo relativo, é claro que os candidatos a extremos absolutos são os números críticos e os extremos do domínio (quando estes existirem). Já sabendo a existência dos extremos absolutos, temos um método de localizá-los em funções f contínuas em intervalos $[a, b]$. Basta seguir os seguintes passos:

1) encontre os números críticos em (a, b);
2) calcule f nos números críticos e nas extremidades a e b;
3) o maior e o menor valor encontrado no item 2 são, respectivamente, o valor máximo e o valor mínimo absoluto de f em $[a, b]$.

Máximos e Mínimos

Exemplo

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ em $[-3, 0] \Rightarrow$ existem máximo e mínimo absolutos

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \quad \Rightarrow \quad$ números críticos em $(-3, 0)$: $x = -2$

<u>Candidatos a máximo e mínimo absolutos de f em $[-3, 0]$</u>:

$$x = -3,\ x = -2 \text{ e } x = 0 \quad \Rightarrow \quad f(-3) = 2,\ \ f(-2) = 13 \text{ e } f(0) = -7$$

- $x = 0$ é um mínimo absoluto, $f(0) = -7$ é o valor mínimo absoluto e $(0, -7)$ é o ponto de mínimo absoluto de f em $[-3, 0]$;
- $x = -2$ é um máximo absoluto, $f(-2) = 13$ é o valor máximo absoluto e $(-2, 13)$ é o ponto de máximo absoluto de f em $[-3, 0]$.

Máximos e Mínimos

Exemplo

$f(x) = x^{2/3}$ em $[-1, 2]$ $\Rightarrow$ existem máximo e mínimo absolutos

$f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ $\Rightarrow$ números críticos em $(-1, 2)$: $x = 0$

Candidatos a máximo e mínimo absolutos de f em $[-1, 2]$:

$$x = -1,\ x = 0 \text{ e } x = 2 \quad \Rightarrow \quad f(-1) = 1,\ \ f(0) = 0 \text{ e } f(2) = \sqrt[3]{4}$$

- $x = 0$ é um mínimo absoluto, $f(0) = 0$ é o valor mínimo absoluto e $(0, 0)$ é o ponto de mínimo absoluto de f em $[-1, 2]$;
- $x = 2$ é um máximo absoluto, $f(2) = \sqrt[3]{4}$ é o valor máximo absoluto e $(2, \sqrt[3]{4})$ é o ponto de máximo absoluto de f em $[-1, 2]$.

Exemplo

$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ em $[0,3]$ $\Rightarrow$ existem máximo e mínimo absolutos

$f'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$ $\Rightarrow$ números críticos em $(0,3)$: $x = 1$

Candidatos a máximo e mínimo absolutos de f em $[0,3]$:

$$x = 0,\ x = 1 \text{ e } x = 3 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0,\ \ f(1) = 1/2 \text{ e } f(3) = 3/10$$

- $x = 0$ é um mínimo absoluto, $f(0) = 0$ é o valor mínimo absoluto e $(0,0)$ é o ponto de mínimo absoluto de f em $[0,3]$;
- $x = 1$ é um máximo absoluto, $f(1) = 1/2$ é o valor máximo absoluto e $(1, 1/2)$ é o ponto de máximo absoluto de f em $[0,3]$.

Máximos e Mínimos

Em outra ocasiões podemos garantir a existência de máximos e mínimos absolutos como indica a proposição a seguir.

Existência de Extremos Absolutos

Seja $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo I. Se f tem um único extremo relativo em I, então esse extremo é absoluto de f em I.

Máximos e Mínimos

Exemplo

$f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$ em $(0, +\infty)$

$f'(x) = 2x - \dfrac{16}{x^2} \quad \Rightarrow \quad$ números críticos em $(0, +\infty)$: $\; x = 2$

Teste da Derivada Primeira

- $x = 2$ é um mínimo relativo de f, $f(2) = 12$ é um valor mínimo relativo de f e $(2, 12)$ é um ponto de mínimo relativo de f

Único extremo relativo neste intervalo $\quad \Rightarrow \quad x = 2$ é um mínimo absoluto, $f(2) = 12$ é o valor mínimo absoluto e $(2, 12)$ é o ponto de mínimo absoluto de f em $(0, +\infty)$.
$(2, 12)$ é apenas um mínimo relativo de f em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pois $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

Máximos e Mínimos

Exemplo

$f(x) = 2x + \dfrac{8}{x} + 2$ em $(-\infty, 0)$

$f'(x) = 2 - \dfrac{8}{x^2} \quad \Rightarrow \quad$ números críticos em $(-\infty, 0)$: $\;x = -2$

<u>Teste da Derivada Primeira</u>

- $x = -2$ é um máximo relativo de f, $f(-2) = -6$ é um valor máximo relativo de f e $(-2, -6)$ é um ponto de máximo relativo de f

Único extremo relativo neste intervalo $\quad \Rightarrow \quad x = -2$ é um máximo absoluto, $f(-2) = -6$ é o valor máximo absoluto e $(-2, -6)$ é o ponto de máximo absoluto de f em $(-\infty, 0)$.

Máximos e Mínimos

Exemplo

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \text{ em } (-1, +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow \quad \text{números críticos em } (-1,+\infty): \;\; x = 0$$

Teste da Derivada Primeira

- $x = 0$ é um mínimo relativo de f, $f(0) = 0$ é um valor mínimo relativo de f e $(0,0)$ é um ponto de mínimo relativo de f

Único extremo relativo neste intervalo $\Rightarrow$ $x = 0$ é um mínimo absoluto, $f(0) = 0$ é o valor mínimo absoluto e $(0,0)$ é o ponto de mínimo absoluto de f em $(-1,+\infty)$.

Exemplo

A função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

é tal que

- $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$;
- f é crescente em $(-\infty, 0)$ e decrescente em $(0, +\infty)$;
- $x = 0$ é um máximo absoluto e $f(0) = 0,4$ é o valor máximo absoluto de f;
- f tem concavidade para cima em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e para baixo em $(-1, 1)$;
- $(-1, f(-1))$ e $(1, f(1))$ são pontos de inflexão de f;
- $y = 0$ é uma assíntota horizontal de f e não tem assíntotas verticais.

Exercício: verifique todas essas afirmações.

Função Gaussiana

Mais geralmente, dada uma amostra onde σ é o desvio padrão e μ é a média, a função densidade de probabilidade normal é dada pela função

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

que será estudada com mais detalhes num curso de estatística básica.