Matemática para Economia I

Alex Farah Pereira

Departamento de Análise - Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

01 de julho de 2025

Funções de Duas Variáveis

Definição

Uma função f de duas variáveis é uma regra que associa a cada par (x, y) de um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ um único valor real, denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o domínio de f e sua imagem é o conjunto $\{f(x, y); (x, y) \in D\}$.

Denotamos $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis.

- Costumamos escrever $z = f(x, y)$ onde z é a variável dependente e x, y são as variáveis independentes,
- O domínio é um subconjunto D no plano ($D \subset \mathbb{R}^2$),
- O gráfico de f é o conjunto $\{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in D\} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ (espaço).

Funções de Produção de Cobb-Douglas

Em 1928, Charles Cobb e Paul Douglas publicaram um estudo no qual modelaram o crescimento da economia norte-americana durante o período de $1899 - 1922$.

- L é a quantidade de trabalho (número total de pessoas-hora trabalhadas em um ano);
- K é a quantidade de capital investido (valor monetário das máquinas, equipamentos e prédios);
- P é a produção total (valor monetário dos bens produzidos no ano).

A função para modelar a produção era da forma

$$P(L, K) = bK^{\alpha} L^{1-\alpha}. \tag{1}$$

Após análise e ajuste dos dados concluíram que $P(K, L) = 1,01 L^{0,75} K^{0,25}$.

A função (1) é conhecida como **Função de Produção de Cobb-Douglas**.

Curvas de Nível

Definição

As curvas de nível de uma função $z = f(x, y)$ são aquelas dadas pela equação $f(x, y) = k$, onde k é uma constante.

Geometricamente, as curvas de nível são projeções no plano xy das interseções do gráfico de f com o plano $z = k$.

Derivadas Parciais

Definição

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $(a,b) \in D$.

- *A **derivada parcial de** f **em relação a** x **em** (a,b), denotada por $f_x(a,b)$, é definida por*
$$f_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}.$$
- *A **derivada parcial de** f **em relação a** y **em** (a,b), denotada por $f_y(a,b)$, é definida por*
$$f_y(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}.$$

Outras notações: Se $z = f(x,y)$, então

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{e} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Exemplo

Dada $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5$ encontre $f_x(1, 2)$ e $f_y(1, 2)$.

Temos $f_x = 2x$ e $f_y = 2y$ logo $f_x(1, 2) = 2$ e $f_y(1, 2) = 4$.

Exemplo

Dada $f(x, y) = x^2y + xy^2 - 5$ encontre $f_x(2, -1)$ e $f_y(2, -1)$.

Temos $f_x = 2xy + y^2$ e $f_y = x^2 + 2xy$ logo $f_x(2, -1) = -3$ e $f_y(2, -1) = 0$.

Exemplo

Dada $f(x,y) = (3x^2 + \sqrt{xy^3})^3$ temos

$$f_x = 3(3x^2 + \sqrt{xy^3})^2(6x + \frac{\sqrt{y^3}}{2\sqrt{x}}) \quad \text{e} \quad f_y = 3(3x^2 + \sqrt{xy^3})^2 \frac{3}{2}\sqrt{xy}.$$

Exemplo

Dada $f(x,y) = \frac{(3xy-2y)^2}{x^2+y^2+1}$ temos

$$f_x = \frac{2(3xy-2y)3y(x^2+y^2+1) - (3xy-2y)^2 2x}{(x^2+y^2+1)^2}$$

e

$$f_y = \frac{2(3xy-2y)(3x-2)(x^2+y^2+1) - (3xy-2y)^2 2y}{(x^2+y^2+1)^2}.$$

Derivadas Parciais de Segunda Ordem

Definição

Seja $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis. As derivadas parciais de f são f_x e f_y. As ***derivadas parciais de segunda ordem*** *de f são as derivadas $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ e $(f_y)_y$.*

Outras notações:

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad (f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad (f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Derivadas Parciais de Segunda Ordem

Exemplo

Dada $f(x,y) = xe^y$ temos $f_x = e^y$ e $f_y = xe^y$. As derivadas parciais de segunda ordem são

$$f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = f_{yx} = e^y \quad \text{e} \quad f_{yy} = xe^y.$$

Exemplo

Dada $g(x,y) = x^2 + xy^4 - 3\ln y$ temos $g_x = 2x + y^4$ e $g_y = 4xy^3 - \frac{3}{y}$. As derivadas paricias de segunda ordem são

$$g_{xx} = 2, \quad g_{xy} = g_{yx} = 4y^3 \quad \text{e} \quad g_{yy} = 12xy^2 + \frac{6}{y^2}.$$

Derivadas Parciais de Segunda Ordem

Teorema

Se as funções f_{xy} e f_{yx} são contínuas em todos os pontos de um disco contendo (a,b), então $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.

Exemplo de uma função onde $f_{xy}(a,b) \neq f_{yx}(a,b)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Máximo e Mínimo

Uma função real de duas variáveis $z = f(x, y)$ tem um **máximo relativo** em (a, b) quando $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todo (x, y) próximo de (a, b). Analogamente, dizemos que $z = f(x, y)$ tem um **mínimo relativo** em (a, b) quando $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todo (x, y) próximo de (a, b). O número $f(a, b)$ é dito **valor máximo relativo** se (a, b) é um máximo relativo ou **valor mínimo relativo** se (a, b) é um mínimo relativo.

Teorema

Se $z = f(x, y)$ tem um máximo ou mínimo relativo em (a, b) e as derivadas parciais de primeira ordem de f existem nesses pontos, então $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.

Teste da Derivada Segunda para Extremos Relativos

Seja $z = f(x, y)$ uma função cujas as derivadas parciais de segunda ordem são contínuas num disco contendo (a, b) tal que $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Seja

$$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2.$$

(a) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então (a, b) é um mínimo relativo.
(b) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então (a, b) é um máximo relativo.
(c) Se $D < 0$, então (a, b) não é extremo relativo (ponto de sela).

Máximo e Mínimo

Uma função real de duas variáveis $z = f(x, y)$ tem um **máximo absoluto** em (a, b) quando $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todo (x, y) no domínio de f. Analogamente, dizemos que $z = f(x, y)$ tem um **mínimo absoluto** em (a, b) quando $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todo (x, y) no domínio de f. O número $f(a, b)$ é dito **valor máximo absoluto** se (a, b) é um máximo absoluto ou **valor mínimo absoluto** se (a, b) é um mínimo absoluto.

Existência de Extremos Absolutos

Se $z = f(x, y)$ é contínua em um conjunto fechado e limitado D em $\mathbb{R}^2$, então existem máximo e mínimo absolutos de f.

Máximo e Mínimo

Para determinar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua f em um conjunto fechado e limitado D fazemos o seguinte procedimento:

1) determine os valores de f nos pontos críticos de f em D;
2) determine os valores extremos de f na fronteira de D;
3) o maior e o menor entre os valores encontrados nos passos anteriores é o valor máximo e o valor mínimo absolutos, respectivamente.

Seja P a produção de um certo produto, L a quantidade de trabalho empregado e K a quantidade de capital investido, o modelo de Cobb-Douglas para essas três variáveis é da forma

$$P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

onde $b > 0$ e $0 < \alpha < 1$. Se o custo por unidade de trabalho for m e o custo por unidade de capital fo n, e uma companhia puder gastar somente uma quantidade p de dinheiro como despesa total, então a maximização da produção estará sujeita à restrição

$$mL + nK = p.$$

Como maximar a função P?

Multiplicadores de Lagrange

Método dos Multiplicadores de Lagrange

Seja $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis. Para encontrarmos os valores máximo e mínimo de f sujeito à restrição $g(x, y) = k$ fazemos o seguinte procedimento:

1) determine todos os valores de x, y, z e λ tais que

$$f_x = \lambda g_x, \qquad f_y = \lambda g_y \qquad \text{e} \qquad g(x, y) = k;$$

2) calcule f em todos os pontos (x, y) encontrados no passo anterior; o maior desses valores será o valor máximo de f, e o menor será o valor mínimo de f.