

Matemática para Economia I
Alex Farah Pereira
2025-1

Lista 4 - Funções Reais de Duas Variáveis Reais

1. Para as funções abaixo, encontre o domínio e faça um esboço dessas regiões:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f(x, y) = \frac{x^2 - y^3 + 10}{y + x} & \text{(b)} g(x, y) = \sqrt{x - y} & \text{(c)} h(x, y) = \frac{\sqrt{x^3 - y}}{2x - 3y} \\ \text{(d)} f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) & \text{(e)} g(x, y) = \frac{ye^x}{\ln(1 - xy)} & \text{(f)} h(x, y) = \frac{\sqrt[4]{x - y^2}}{\ln[(x - 3)(y + 1)]} \end{array}$$

2. Descreva e identifique as curvas de nível das funções abaixo desenhando três curvas:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f(x, y) = x - 2y + 3 & \text{(b)} g(x, y) = x^2 + y^2 - 2y & \text{(c)} h(x, y) = \frac{x}{y} \\ \text{(d)} f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} & \text{(e)} g(x, y) = e^x + y & \text{(f)} h(x) = \ln(x^2 + 9y^2) \end{array}$$

3. Mostre que a função de produção de Cobb-Douglas $P = bL^\alpha K^\beta$ satisfaz a equação

$$LP_L + KP_K = (\alpha + \beta)P,$$

onde P_L e P_K são as derivadas parciais de P em relação a L e K , respectivamente.

4. Encontre todos os pontos críticos de cada função e verifique se são extremos relativos ou ponto de sela:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 & \text{(b)} g(x, y) = (x - y + 1)^2 & \text{(c)} h(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy} \\ \text{(d)} f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3 & \text{(e)} g(x, y) = xy - x - y & \text{(f)} h(x, y) = e^x + e^y - e^{x+y} \end{array}$$

5. Encontre o valor máximo e mínimo absoluto de cada função

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ em } x^2 + y^2 \leq 1, \\ \text{(b)} g(x, y) = 3x^2 + 2xy + 4y^2 + 2x - 3y + 1 \text{ em } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1, \\ \text{(c)} h(x, y) = xy + 12(x + y) - (x + y)^2 \text{ em } 0 \leq x \leq 12 \text{ e } 0 \leq y \leq 12, \end{array}$$

6. Um fabricante produz dois tipos de liga nas quantidades x e y toneladas, respectivamente. Se o custo total da produção é expresso pela função $C(x, y) = x^2 + 100x + y^2 - xy$ e a renda total é dada pela função $R(x, y) = 100x - x^2 + 2000y + xy$, encontre o nível de produção que maximiza o lucro.

7. Use o Método dos Multiplicadores de Lagrange para encontrar os pontos críticos das seguintes funções a seguir:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f(x, y) = x^2 - y^2 - y \text{ em } x^2 + y^2 = 1, \\ \text{(b)} g(x, y) = 3x^2 + 2\sqrt{2}xy + 4y^2 \text{ em } x^2 + y^2 = 9, \\ \text{(c)} h(x, y) = x^2 + y^2 \text{ em } 2x^2 + y^2 = 1. \end{array}$$