

Matemática para Economia II

Prof. Alex Farah Pereira

25 de agosto de 2026

Departamento de Análise

Instituto de Matemática e Estatística

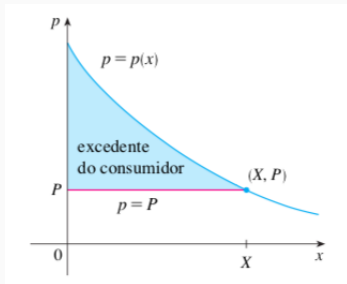
Universidade Federal Fluminense

Objetivo:

- . calcular área de regiões planas (e limitadas)

Aula 7

Voltando ao problema do **excedente do consumidor (EC)**: este valor é obtido ao calcularmos a área sob a curva de demanda e acima da reta $p = P$.



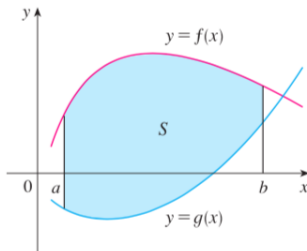
Portanto,

$$EC = \int_0^X (p(x) - P) dx.$$

Área de Regiões Planas (limitadas)

A área S da região limitada pelas funções $y = f(x)$, $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$ onde $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ é dada por

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$



Exemplo

Encontre a área da região plana limitada pelas funções $y = x^2 + 2$, $y = 1$ e as retas $x = 0$ e $x = 1$.

Sol:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 [(x^2 + 2) - (1)] dx = \int_0^1 (x^2 + 1) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1^3}{3} + 1 \right) - \left(\frac{0^3}{3} + 0 \right) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Exemplo

Encontre a área da região plana limitada pelas funções $y = x^2 + 1$, $y = x$ e as retas $x = -2$ e $x = 2$.

Sol:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 [(x^2 + 1) - (x)] dx = \int_{-2}^2 (x^2 - x + 1) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-2}^2 \\ &= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 2 \right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + (-2) \right) \\ &= \frac{28}{3} \end{aligned}$$

Exemplo

Encontre a área da região plana limitada pelas funções $y = x^2$ e $y = x$.

Sol:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 [(x) - (x^2)] dx = \int_0^1 (x - x^2) dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Exemplo

Encontre a área da região plana limitada pelas funções $y = x^3$ e $y = x$.

Sol:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 [(x^3) - (x)] dx + \int_0^1 [(x) - (x^3)] dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} \right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} \right) + \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4} \right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^4}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exemplo

Encontre a área da região plana limitada pelas funções $y = \sqrt{x+2}$, $y = \frac{1}{x+1}$ e pelas retas $x = 0$ e $x = 2$

Sol:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \left[(\sqrt{x+2}) - \left(\frac{1}{x+1} \right) \right] dx = \int_0^2 \left(\sqrt{x+2} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \left(\frac{2}{3} \sqrt{(x+2)^3} - \ln|x+1| \right) \Big|_0^2 \\ &= \left(\frac{2}{3} \sqrt{(2+2)^3} - \ln|2+1| \right) - \left(\frac{2}{3} \sqrt{(0+2)^3} - \ln|0+1| \right) \\ &= \frac{16 - 4\sqrt{2}}{3} - \ln 3 \end{aligned}$$

Exemplo

Encontre a área da região plana limitada pelas curvas $x = y^2$ e $y = \frac{x-3}{2}$.

Sol:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^3 [(2y+3) - (y^2)] dy = \int_{-1}^3 (-y^2 + 2y + 3) dy \\ &= \left(-\frac{y^3}{3} + y^2 + 3y \right) \Big|_{-1}^3 \\ &= \left(-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3 \cdot 3 \right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3 \cdot (-1) \right) \\ &= \frac{22}{3} \end{aligned}$$

Na aula de hoje aprendemos

- . como fazer o cálculo de área de regiões planas limitadas

Esta aula foi, de fato, a interpretação geométrica da integral como cálculo de área. Note que não sabemos calcular área de qualquer região plana e sim, aquelas que são limitadas por funções! É importante saber fazer o gráfico das funções para montar de forma correta a integral.