

Matemática para Economia II

Prof. Alex Farah Pereira

03 de setembro 2026

Departamento de Análise

Instituto de Matemática e Estatística

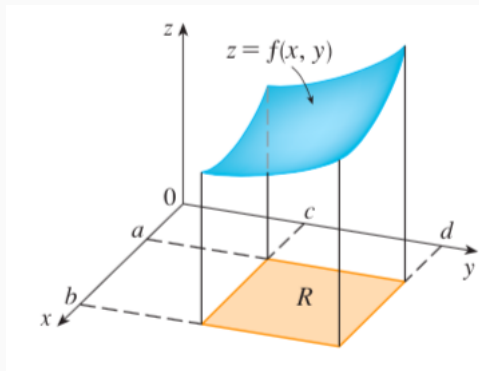
Universidade Federal Fluminense

Objetivo:

- . introduzir o conceito de integrais duplas
- . resolução de integral dupla via Teorema de Fubini

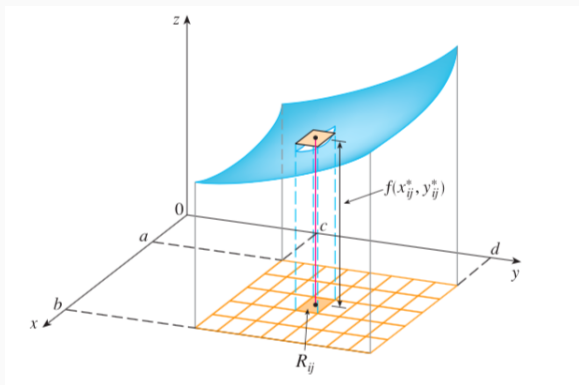
Aula 10

Como calcular o volume do sólido formado pela gráfico da função $z = f(x, y)$ e o retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$?



Aula 10

Usamos a mesma ideia para o cálculo de área de gráfico de função. Aproximamos o volume do sólido pela soma dos volumes das "caixas" formadas por partições do retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$.



Definição

Seja $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é **integrável** em $R = [a, b] \times [c, d]$ quando a soma de Riemann converge e, neste caso, denotamos

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A.$$

- Se $f(x, y) \geq 0$, então $V = \iint_R f(x, y) dA$ é o volume do sólido que está acima do retângulo R e abaixo da superfície $z = f(x, y)$.
- Se $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então f é integrável em R .

Dizemos que $\iint_R f(x, y) dA$ é a **Integral Dupla** de f sobre R .

Temos as seguintes propriedades: se $f, g : R \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em $k \in \mathbb{R}$, então

$$(a) \quad \iint_R (f(x, y) + g(x, y)) dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA;$$

$$(b) \quad \iint_R kf(x, y) dA = k \iint_R f(x, y) dA.$$

Denotamos as **integrais iteradas** da seguinte forma

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

e

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Teorema de Fubini

Se f é uma função contínua no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$, então

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Na aula de hoje aprendemos

- . como resolver uma integral dupla numa região retangular

Assim como a integral de uma função de uma variável está relacionado com área de uma região plana, a integral de uma função de duas (ou mais) variáveis está relacionado com volume de um sólido. Pelo Teorema de Fubini, resolver uma integral dupla numa região retangular é o mesmo que integrar nas variáveis da função. É bem simples resolver uma integral nesse caso.