

Matemática para Economia II

Prof. Alex Farah Pereira

29 de setembro 2026

Departamento de Análise

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade Federal Fluminense

Objetivo:

- . definição de equações diferenciais

Definição

Uma **equação diferencial ordinária (EDO)** é uma equação envolvendo uma função (de uma variável) desconhecida e uma ou mais de suas derivadas.

A **ordem** de uma EDO é a ordem da derivada mais alta que ocorre na equação.

Se $y = y(x)$ é uma função, uma EDO de ordem n é dada por

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Uma função f é uma **solução** da EDO acima quando a equação é satisfeita ao substituirmos $y = f(x)$ e suas derivadas na equação.

Exemplo

A equação $y' - x^2y = 0$ é uma EDO de primeira ordem.

Exemplo

A equação $y'' - 3y' - e^{3x} = 0$ é uma EDO de segunda ordem.

Exemplo

A equação $xy'' + (y')^2 = x \ln(x^2 - 1)$ é uma EDO de segunda ordem.

Exemplo

A equação $y''' + yy' = x$ é uma EDO de terceira ordem.

Exemplo

A função $f(x) = \frac{x^3}{3}$ é uma solução da EDO $y' = x^2$.

Temos uma infinidade de soluções para esta equação!

Exemplo

Se $c \in \mathbb{R}$, então a função $f(x) = \frac{1 + ce^x}{1 - ce^x}$ é solução da EDO $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

Exemplo

As funções $f(x) = x^{-2}$ e $g(x) = x^{-2} \ln x$ são soluções da EDO

$$x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0.$$

Definição

Um **problema de valor inicial (PVI)** é um problema de achar uma solução da EDO que satisfaça uma determinada condição.

Exemplo

Encontrar uma função que satisfaça $y' = 2e^x$ com a condição $y(0) = 1$.

$$y' = 2e^x \Rightarrow y = \int 2e^x dx \Rightarrow y = 2e^x + C$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow 2e^0 + C = 1 \Rightarrow C = -1$$

$$y = 2e^x - 1.$$

Exemplo

Encontrar uma função que satisfaça $y' = x \ln x$ com a condição $y(1) = 0$.

$$y' = x \ln x \Rightarrow y = \int x \ln x dx \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}$$

Lembramos que uma EDO de 1ª Ordem tem a forma $F(x, y, y') = 0$.

Definição

Uma **equação separável** é uma EDO de 1ª ordem da forma: $\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$.

Assim,

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y) \quad \xRightarrow{f \neq 0} \quad h(y)dy = g(x)dx$$

onde $h = 1/f$

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx.$$

Esta última equação define y implicitamente em função de x .

Exemplo

Resolva a EDO $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}$ com o valor inicial $y(0) = 2$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow y^2 dy = x^2 dx \Rightarrow \int y^2 dy = \int x^2 dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C \Rightarrow y = \sqrt[3]{x^3 + K}$$

$$y(0) = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{0^3 + K} = 2 \Rightarrow K = 8$$

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 8}.$$

Exemplo

Resolva a EDO $\frac{dy}{dx} = x^2y$.

Por inspeção temos que $y = 0$ é uma solução. Supondo agora $y \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = x^2y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = x^2 dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + C \quad \Rightarrow \quad y = Ae^{\frac{x^3}{3}}$$

onde A é uma constante.

Exemplo

Resolva a EDO $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}$ onde $y(0) = -1$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)} \Rightarrow 2(y - 1)dy = (3x^2 + 4x + 2)dx$$

$$\int 2(y - 1)dy = \int (3x^2 + 4x + 2)dx$$

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C$$

$$y(0) = -1 \Rightarrow (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 0^3 + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + C \Rightarrow C = 3$$

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3 \Rightarrow y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}.$$

Exemplo

Resolva a EDO $\frac{dy}{dx} = \frac{4x - x^3}{4 + y^3}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - x^3}{4 + y^3} \Rightarrow (4 + y^3)dy = (4x - x^3)dx$$

$$\int (4 + y^3)dy = \int (4x - x^3)dx \Rightarrow 4y + \frac{y^4}{4} = 2x^2 - \frac{x^4}{4} + C$$

$$y^4 + 16y + x^4 - 8x^2 = C$$

Na aula de hoje aprendemos

- . o que é uma equação diferencial ordinária (EDO)
- . resolver EDO separáveis

Uma EDO nada mais é que uma equação onde a variável de interesse é uma função a ser descoberta que está relacionada através de uma equação com suas derivadas até uma certa ordem. O Teorema de Picard garante que, sob certas condições, uma EDO tem sempre uma única solução. Os métodos para encontrar uma solução (ou a solução) são para certos tipos de EDOs. Hoje aprendemos a como resolver as EDOs separáveis. Note que na primeira parte do curso já resolvemos algumas EDOs pois resolver integrais é, de fato, resolver uma EDO.