

GABARITO

DA

PRIMEIRA AVALIAÇÃO

DE

CÁLCULO IIA - ESPECIAL

DATA : 22 / 09 / 2026

QUESTÃO 1:

Vamos mostrar que $(a_n)_n$ é uma sequência crescente, isto é, que $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para isso usaremos o método de indução.

$$\text{Temos } a_1 = 2 \text{ e } a_2 = \frac{2}{5}(2+6) = \frac{16}{5} > 2$$

de modo que $a_1 \leq a_2$. Suponhamos que isto seja verdade para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $a_n \leq a_{n+1}$. Vejamos que $a_{n+1} \leq a_{n+2}$. Com efeito, pela hipótese de indução,

$$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow a_n + 6 \leq a_{n+1} + 6 \Rightarrow$$

$$\stackrel{\substack{\Rightarrow \\ \frac{2}{5} > 0}}{\Rightarrow} \frac{2}{5}(a_n + 6) \leq \frac{2}{5}(a_{n+1} + 6)$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \leq a_{n+2}.$$

Assim, por indução, mostramos que $(a_n)_n$ é uma sequência crescente.

Vejam os que $(a_n)_n$ é limitada. Mais precisamente que $2 \leq a_n \leq 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, como $(a_n)_n$ é crescente, temos que

$$2 = a_1 \leq a_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Agora, usaremos o método de indução para mostrar que $a_n \leq 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $n=1$ temos $a_1 = 2 < 4$. Suponhamos Verdade para algum $n \in \mathbb{N}$, isto é, $a_n \leq 4$.

Vejam os que vale $a_{n+1} \leq 4$. Com efeito, pela hipótese de indução

$$a_n \leq 4 \Rightarrow a_{n+6} \leq 4 + 6 = 10 \Rightarrow \left\{ \frac{2}{5} \right\} > 0$$

$$\frac{2}{5}(a_{n+6}) \leq \frac{2}{5} \cdot 10 = 4 \Rightarrow a_{n+1} \leq 4.$$

Então concluímos, por indução, que $a_n \leq 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, $(a_n)_n$ é limitada.

Como $(a_n)_n$ é monotônica e limitada, concluímos que $(a_n)_n$ é convergente.

Seja $L = \lim a_n$. Passando o limite na expressão $a_{n+1} = \frac{2}{5}(a_n + 6)$ segue que

$$L = \frac{2}{5}(L + 6) \Rightarrow 5L = 2L + 12$$

$$\Rightarrow 3L = 12 \Rightarrow L = 4.$$

Logo $(a_n)_n$ é uma sequência convergente, por ser monotônica e limitada, e $\lim a_n = 4$.

QUESTÃO 2:

Seja $a = 2\ln 3 + \ln 5$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\left(\frac{n+a}{n}\right)^{2n} = \left[\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n\right]^2.$$

Como $\lim \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$, segue

que

$$\lim \left(\frac{n+a}{n}\right)^{2n} = \lim \left[\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n\right]^2 = e^{2a}.$$

Assim

$$e^{2a} = e^{2(2\ln 3 + \ln 5)} = e^{4\ln 3 + 2\ln 5} =$$

$$= e^{\ln 3^4 + \ln 5^2} = e^{\ln 81 + \ln 25} = e^{\ln (81 \cdot 25)}$$

$$= e^{\ln 2025} = 2025.$$

Concluimos que a afirmação é verdadeira.

Provando o limite fundamental:

$$\lim \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

Primeiramente, temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) = a.$$

De fato, por se tratar uma indeterminação "∞.0", dado $x > 0$ temos

$$x \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) = \frac{\ln \left(1 + \frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

de modo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ é uma

indeterminação " $\frac{0}{0}$ ". Usando a Regra de L'Hospital,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\left(1 + \frac{a}{x}\right)} \cdot -\frac{a}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{1 + \frac{a}{x}} = a.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = a.$$

Agora, fixado $x > 0$, como

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^{\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x} = e^{x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)}$$

e $f(x) = e^x$ é uma função contínua.

Segue que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)} = e^a.$$

Assim, segue do critério sequencial que

$$\lim \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

QUESTÃO 3:

(a) Resolveremos a integral indefinida

$$\int x^5 e^{x^2} dx.$$

Fazendo $u = x^2$ temos $du = 2x dx$ e daí

$$\int x^5 e^{x^2} dx = \int \frac{u^2 e^u}{2} du = \frac{1}{2} \int u^2 e^u du.$$

Esta última integral resolvemos por partes

$$\int u^2 e^u du = u^2 e^u - \int 2u e^u =$$

$$\begin{aligned} f &= u^2 & f' &= 2u \\ g' &= e^u & g &= e^u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= 2u & f' &= 2 \\ g' &= e^u & g &= e^u \end{aligned}$$

$$= u^2 e^u - 2ue^u + \int 2e^u du =$$

$$= u^2 e^u - 2ue^u + 2e^u + C.$$

Então

$$\int x^5 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} (u^2 - 2u + 2) e^u + C =$$

$$= \left(\frac{u^2}{2} - u + 1 \right) e^u + C =$$

$$= \left(\frac{x^4}{2} - x^2 + 1 \right) e^{x^2} + C.$$

Agora, resolvendo a integral definida

$$\int_0^1 x^5 e^{x^2} dx = \left(\frac{x^4}{2} - x^2 + 1 \right) e^{x^2} \Big|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1^4}{2} - 1^2 + 1 \right) e^{1^2} - \left(\frac{0^4}{2} - 0^2 + 1 \right) e^{0^2} = \frac{e}{2} - 1.$$

Logo,

$$\int_0^1 x^5 e^{x^2} dx = \frac{e}{2} - 1.$$

(b) Fazendo a substituição $u = 1 + \sqrt[3]{x}$

temos $du = \frac{1}{3x^{2/3}} dx$. Então $x = (u-1)^3$

e $du = \frac{1}{3(u-1)^2} dx$, ou seja, $dx = 3(u-1)^2 du$.

Logo

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{3(u-1)^2}{u} du =$$

$$= 3 \int \frac{u^2 - 2u + 1}{u} du =$$

$$= 3 \int \left(u - 2 + \frac{1}{u} \right) du =$$

$$= 3 \left(\frac{u^2}{2} - 2u + \ln|u| \right) + C =$$

$$= \frac{3}{2} (1 + \sqrt[3]{x})^2 - 6(1 + \sqrt[3]{x}) + 3 \ln |1 + \sqrt[3]{x}| + C.$$

Então

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2} (1+\sqrt[3]{x})^2 - 6(1+\sqrt[3]{x}) + 3 \ln|1+\sqrt[3]{x}| + C.$$

QUESTÃO 4:

(a) Fixado $x > 1$ temos que

$$x^2 + 1 \geq x^2 \quad \text{de modo que}$$

$$\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2}. \quad \text{Mais ainda } \ln x > 0$$

e daí

$$0 < \frac{\ln x}{x^2+1} \leq \frac{\ln x}{x^2}.$$

Vejam os que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ é convergente.

De fato, fixado $t > 1$, então usando

integração por partes,

$$\int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} \Big|_1^t + \int_1^t \frac{1}{x^2} dx =$$

$$u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = \frac{1}{x^2} \quad v = -\frac{1}{x}$$

$$= -\frac{\ln t}{t} + \left(\frac{-1}{x} \right) \Big|_1^t =$$

$$= -\frac{\ln t}{t} + 1 - \frac{1}{t}.$$

Assim,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t} - \frac{\ln t}{t} \right).$$

Como $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0$ e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1/t}{1} = 0 \text{ pela}$$

Regra de L'Hospital, obtemos que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = 1.$$

Pelo Critério de Comparação,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx \text{ é convergente visto}$$

$$\text{que } 0 \leq \frac{\ln x}{1+x^2} \leq \frac{\ln x}{x^2} \text{ para todo } x \geq 1$$

$$\text{e } \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx \text{ é convergente.}$$

(b) Fixado $0 < x \leq 1$ temos que

$$1+x^2 \geq 1 \text{ e daí } \frac{1}{1+x^2} \leq 1.$$

Como $|\ln x| > 0$ segue que

$$0 < \frac{|\ln x|}{1+x^2} \leq |\ln x|,$$

Vejam os que $\int_0^1 |\ln x| dx$ é convergente.

De fato, fixado $0 < t < 1$, usando integração por partes,

$$\int_t^1 |\ln x| dx = \int_t^1 -\ln x dx = \int_t^1 \ln x dx =$$

$$= x \ln x \Big|_t^1 - \int_t^1 dx =$$

$$u = \ln x \quad u' = 1/x$$

$$v' = 1 \quad v = x$$

$$= t \ln t - t + 1. \text{ Assim}$$

$$\int_0^1 |\ln x| dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 |\ln x| dx =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} (t \ln t - t + 1).$$

Como $\lim_{t \rightarrow 0^+} t = 0$ e

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{1/t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-t) = 0$$

pela Regra de L'Hospital, obtemos que

$$\int_0^1 |\ln x| dx = 1.$$

Pelo Critério de Comparação,

$$\int_0^1 \frac{|\ln x|}{1+x^2} dx \text{ é convergente visto que}$$

$$0 < \frac{|\ln x|}{1+x^2} \leq |\ln x| \text{ para todo } 0 < x \leq 1$$

$$\text{e } \int_0^1 |\ln x| dx \text{ é convergente.}$$

(c) Note que

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\ln x|}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{|\ln x|}{1+x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{|\ln x|}{1+x^2} dx.$$

Para $x \geq 1$, sabemos que $|\ln x| = \ln x$.

Então

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\ln x|}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{|\ln x|}{1+x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

Por (a) e (b) as integrais

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \frac{|\ln x|}{1+x^2} dx$$

são convergentes, respectivamente.

Pontanto,

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\ln x|}{1+x^2} dx \quad \text{é convergente.}$$

Em particular,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx \quad \text{é convergente.}$$

QUESTÃO EXTRA:

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$. Por hipótese,

$f(0) = 1$ e como $f(0) = c$ segue que $c = 1$.

Assim $f(x) = ax^2 + bx + 1$. Sabemos que

$f'(0) = b$. Logo devemos encontrar o valor

da constante b . Temos que $\int \frac{f(x)}{x^2(x+1)^3} dx$

é uma função racional, ou seja, quociente de polinômios. Utilizando o método de frações parciais obtemos

$$\frac{f(x)}{x^2(x+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{(x+1)^3}.$$

$$\text{Como } \int \frac{A}{x} dx = A \ln|x| + C_1 \quad \text{e}$$

$$\int \frac{C}{x+1} dx = C \ln|x+1| + C_2$$

para que a integral em questão seja uma

função racional devemos ter $A = C = 0$.

Dai

$$\frac{f(x)}{x^2(x+1)^3} = \frac{B}{x^2} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{(x+1)^3} = \frac{B(x+1)^3 + Dx^2(x+1) + Ex^2}{x^2(x+1)^3}$$

$$= \frac{(B+D)x^3 + (3B+D+E)x^2 + 3Bx + B}{x^2(x+1)^3}.$$

Disto segue que

$$\begin{cases} B + D = 0 \\ 3B + D + E = a \\ 3B = b \\ B = 1 \end{cases} \Rightarrow b = 3$$

Concluimos que $f'(0) = 3$.