

Matemática para Economia II

Prof. Alex Farah Pereira

01 de outubro 2026

Departamento de Análise

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade Federal Fluminense

Objetivo:

- . estudar as equações lineares de 1ª ordem

Definição

Uma **EDO linear de 1ª ordem** é da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

onde P e Q são funções contínuas em um dado intervalo. Se $Q = 0$ dizemos que esta é uma equação **homogênea**. Caso contrário, esta equação é dita **não-homogênea**.

EDO Linear de 1ª ordem homogênea: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$

EDO Linear de 1ª ordem não-homogênea: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ onde $Q \neq 0$

Vamos resolver a EDO linear de 1ª ordem homogênea com $P(x) = a$ onde a é uma constante não-nula, isto é,

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0.$$

Esta é uma equação separável e, portanto,

$$\frac{dy}{dx} = -ay \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -a \, dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = - \int a \, dx$$

$$\ln|y| = -ax + C \quad \Rightarrow \quad y = Ae^{-ax}$$

$y = Ae^{-ax}$ é chamada de **solução geral**.

Exemplo

Resolva a equação $\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ com a condição inicial $y(0) = 1$.

$$P(x) = 4 \text{ e } Q(x) = 0 \Rightarrow y = Ae^{-4x}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow Ae^{-4 \cdot 0} = 1 \Rightarrow A = 1$$

Solução:

$$y = e^{-4x}$$

Exemplo

Resolva a equação $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}y$ com a condição inicial $y(1) = -1$.

$$P(x) = -2/3 \text{ e } Q(x) = 0 \Rightarrow y = Ae^{\frac{2x}{3}}$$

$$y(1) = -1 \Rightarrow Ae^{2/3} = -1 \Rightarrow A = -e^{-2/3}$$

Solução:

$$y = -e^{\frac{2x-2}{3}}$$

Vamos resolver a EDO linear de 1ª ordem homogênea com $P(x) = a$ e $Q(x) = b$ onde a e b são constantes não-nulas, isto é,

$$\frac{dy}{dx} + ay = b.$$

Esta é uma equação separável e, portanto,

$$\frac{dy}{dx} = -ay + b \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y - b/a} = -a \, dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y - b/a} = - \int a \, dx$$

$$\ln|y - b/a| = -ax + C \quad \Rightarrow \quad y = \frac{b}{a} + Ae^{-ax}$$

$$y = \frac{b}{a} + Ae^{-ax} \text{ é chamada de } \mathbf{\text{solução geral.}}$$

Exemplo

Resolva a equação $\frac{dy}{dx} + 2y = 6$ com a condição inicial $y(0) = 10$.

$$P(x) = 2 \text{ e } Q(x) = 6 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{6}{2} + Ae^{-2x} = 3 + Ae^{-2x}$$

$$y(0) = 10 \quad \Rightarrow \quad 3 + Ae^{-2 \cdot 0} = 10 \quad \Rightarrow \quad A = 7$$

Solução:

$$y = 3 + 7e^{-2x}$$

Exemplo

Resolva a equação $-\frac{dy}{dx} = 5 - y$ com a condição inicial $y(-1) = 1$.

$$P(x) = -1 \text{ e } Q(x) = -5 \Rightarrow y = \frac{5}{1} + Ae^x = 5 + Ae^x$$

$$y(-1) = 1 \Rightarrow 5 + Ae^{-1} = 1 \Rightarrow A = -4e$$

Solução:

$$y = 5 - 4e^{x+1}$$

Vamos resolver a EDO linear de 1ª ordem homogênea, isto é,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0.$$

Esta é uma equação separável e, portanto,

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -P(x) dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = - \int P(x) dx$$

$$\ln|y| = - \int P(x) dx + C \quad \Rightarrow \quad y = Ae^{-\int P(x) dx}$$

$y = Ae^{-\int P(x) dx}$ é chamada de **solução geral**.

Exemplo

Resolva a equação $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 0$ com a condição inicial $y(0) = e$.

$$P(x) = 3x^2 \text{ e } Q(x) = 0 \quad y = Ae^{-\int 3x^2 dx} = Ae^{-x^3}$$

$$y(0) = e \quad \Rightarrow \quad Ae^{-0^3} = e \quad \Rightarrow \quad A = e$$

Solução:

$$y = e^{-x^3+1}$$

Exemplo

Resolva a equação $y' + \frac{1}{x}y = 0$ para $x > 0$ e com a condição inicial $y(1) = -\frac{1}{2}$.

$$P(x) = \frac{1}{x} \text{ e } Q(x) = 0 \Rightarrow y = Ae^{-\int \frac{1}{x} dx} = Ae^{-\ln x} = \frac{A}{x}$$

$$y(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Solução:

$$y = -\frac{1}{2x}$$

Vamos resolver o caso geral da EDO linear de 1ª ordem, isto é,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

Esta **não** é uma equação separável. Usamos o **fator integrante** para resolver esta equação

$$y'e^{\int P(x)dx} + P(x)e^{\int P(x)dx}y = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$(ye^{\int P(x)dx})' = Q(x)e^{\int P(x)dx} \Rightarrow ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + A$$

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(A + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \right)$$

é chamada de **solução geral**.

Exemplo

Resolva a equação $y' + 2xy = x$.

Fator integrante: $e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$

$$y'e^{x^2} + 2xe^{x^2}y = xe^{x^2} \Rightarrow (ye^{x^2})' = xe^{x^2} \Rightarrow ye^{x^2} = \int xe^{x^2} dx$$

$$ye^{x^2} = \frac{e^{x^2}}{2} + A \Rightarrow y = \frac{1}{2} + Ae^{-x^2}$$

Solução geral:

$$y = \frac{1}{2} + Ae^{-x^2}$$

Exemplo

Resolva a equação $y' + 4xy = 4x$.

Fator integrante: $e^{\int 4x dx} = e^{2x^2}$

$$y'e^{2x^2} + 4xe^{2x^2}y = 4xe^{2x^2} \Rightarrow (ye^{2x^2})' = 4xe^{2x^2} \Rightarrow ye^{2x^2} = \int 4xe^{2x^2} dx$$

$$ye^{2x^2} = e^{2x^2} + A \Rightarrow y = 1 + Ae^{-2x^2}$$

Solução geral:

$$y = 1 + Ae^{-2x^2}$$

Exemplo

Encontre a solução do problema de valor inicial: $x^2y' + xy = 1$ onde $x > 0$ e com a condição inicial $y(1) = 2$.

Como $x > 0$ note que a equação pode ser escrita na forma $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$

Fator integrante: $e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$

$$y'x + y = \frac{1}{x} \Rightarrow (yx)' = \frac{1}{x} \Rightarrow yx = \int \frac{1}{x} dx$$

$$yx = \ln x + A \Rightarrow y = \frac{A + \ln x}{x} \xRightarrow{y(1)=2} A = 2$$

Solução geral: $y = \frac{2 + \ln x}{x}$

Proposição

A solução geral da EDO

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

onde P e Q são funções contínuas é dada por

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(A + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right).$$

Para encontrar a solução, multiplique a equação pelo fator integrante

$$e^{\int P(x)dx}$$

e utilize as regras de derivação já conhecidas.

Na aula de hoje aprendemos

- . resolver EDO linear de 1ª ordem

Até o momento sabemos encontrar a solução de algumas EDOs de 1ª ordem, a saber: separável e lineares. Em ambos os casos temos que resolver integrais, o que é de se esperar pois nessas EDOs aparecem somente a derivada de primeira ordem da função desconhecida. Aprenda o método. Não decore fórmulas!