

Matemática para Economia II

Prof. Alex Farah Pereira

06 de outubro 2026

Departamento de Análise

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade Federal Fluminense

Objetivo:

- . estudar as equações diferenciais ordinárias exatas

Como resolver a equação diferencial

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0?$$

Note que esta não é uma EDO separável e nem linear. Por outro lado, considere a função $F(x, y) = x^2 + xy^2$. Temos que

$$F_x = 2x + y^2 \quad \text{e} \quad F_y = 2xy.$$

Sabendo que y é uma função de x , podemos reescrever a equação diferencial acima da seguinte maneira

$$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0.$$

De maneira equivalente

$$\frac{dF}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(x^2 + xy^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + xy^2 = C.$$

Portanto, a equação

$$x^2 + xy^2 = C$$

define as soluções da equação proposta implicitamente!

Sejam M e N funções contínuas. A equação diferencial

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

é dita uma **equação exata** quando existe uma função F tal que

$$F_x = M \quad e \quad F_y = N.$$

Equivalentemente, a equação acima é dita exata se, e somente se, $M_y = N_x$. Neste caso, a equação exata se reescreve na forma

$$\frac{dF}{dx} = 0$$

e as soluções são dadas implicitamente por

$$F(x, y) = C.$$

Exemplo

Resolva a equação $y^2 + 2xyy' = 0$.

Temos que $M(x, y) = y^2$ e $N(x, y) = 2xy$. Assim, $M_y = 2y$ e $N_x = 2y$ de modo que esta é uma equação exata! Isto é, existe F tal que $F_x = M$ e $F_y = N$. Então

$$F_x = M \quad \Rightarrow \quad F_x = y^2 \quad \Rightarrow \quad F(x, y) = \int y^2 dx \quad \Rightarrow \quad F(x, y) = xy^2 + g(y).$$

Daí

$$F_y = 2xy + g'(y) \quad \text{e} \quad F_y = N = 2xy \quad \Rightarrow \quad g'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(y) = K.$$

Logo $F(x, y) = xy^2 + K$ e, portanto, as soluções se escrevem (implicitamente) na forma

$$xy^2 = C.$$

Exemplo

Resolva a equação $(y + 3x^2) + (x + 2y)y' = 0$.

$$M(x, y) = y + 3x^2, \quad N(x, y) = x + 2y \Rightarrow M_y = 1 = N_x \Rightarrow \exists F; F_x = M, F_y = N$$

$$F_x = \underbrace{y + 3x^2}_M \Rightarrow F(x, y) = \int (y + 3x^2) dx \Rightarrow F(x, y) = xy + x^3 + g(y).$$

$$F_y = N \Rightarrow x + g'(y) = x + 2y \Rightarrow g'(y) = 2y$$

$$g(y) = \int 2y dy = y^2 + K \Rightarrow F(x, y) = xy + x^3 + y^2 + K$$

Portanto, as soluções se escrevem (implicitamente) na forma

$$xy + x^3 + y^2 = C.$$

Na aula de hoje aprendemos

- . resolver EDO Exata

Com a aula de hoje, aprendemos a resolver equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem de três tipos: separáveis, lineares e exatas. Cada um tem um método diferente para obter a solução. Note que em certos casos, métodos diferentes podem ser usados nessas EDOs, por exemplo, tem equações separáveis que são lineares. Também temos equações lineares que são separáveis. Neste caso, podemos, caso não seja específico, resolver por qualquer um dos métodos.