

Matemática para Economia II

Prof. Alex Farah Pereira

08 de outubro 2026

Departamento de Análise

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade Federal Fluminense

Objetivo:

- . estudar as equações lineares ordinárias de 2ª ordem com coeficientes constantes

Definição

Uma **EDO linear de 2ª ordem** é da forma

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = S(x)$$

onde P, Q, R, S são funções contínuas em um dado intervalo. Se $Q = 0$ dizemos que esta é uma equação **homogênea**. Caso contrário, esta equação é dita **não-homogênea**.

EDO Linear de 2ª ordem homogênea: $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$

EDO Linear de 2ª ordem não-homogênea: $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = S(x)$ onde $S \neq 0$

Proposição

Se y_1 e y_2 são soluções de uma EDO linear de 2ª ordem homogênea, então $y = c_1y_1 + c_2y_2$ é também uma solução desta EDO para quaisquer constantes c_1 e c_2 .

Proposição

Se y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes (não múltiplos entre si) de uma EDO linear de 2ª ordem homogênea, então a solução geral desta EDO é por

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

onde c_1 e c_2 são constantes.

Em geral, não é uma tarefa fácil encontrar soluções de EDO linear de 2ª ordem. Mas alguns casos sabemos resolver, por exemplo, com coeficientes constantes.

Vamos encontrar uma solução geral para EDO linear de 2ª ordem

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ e f uma função qualquer.

Vamos resolver a EDO linear de 2ª ordem homogênea com coeficientes constantes, isto é,

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$.

Propondo solução da forma $y = e^{rx}$ onde $r \in \mathbb{R}$ obtemos que

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0,$$

ou seja,

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Este polinômio é denominado **equação característica**.

Caso 1: $\Delta > 0$

Se r_1 e r_2 raízes reais e distintas da equação característica da EDO, então a solução geral é dada por

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

Caso 2: $\Delta = 0$

Se r é a única raiz real da equação característica da EDO, então a solução geral é dada por

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}.$$

Caso 3: $\Delta < 0$

Se $r_1 = \alpha + \beta i$ e $r_2 = \alpha - \beta i$ são as raízes complexas da equação característica da EDO, então a solução geral é dada por

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x).$$

Exemplo

Encontre a solução da EDO $y'' + y' - 6y = 0$.

Equação característica: $r^2 + r - 6 = 0 \Rightarrow r_1 = 2$ e $r_2 = -3$

Solução geral: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$

Exemplo

Encontre a solução da EDO $4y'' + 12y' + 9y = 0$.

Equação característica: $4r^2 + 12r + 9 = 0 \Rightarrow r = -3/2$

Solução geral: $y = c_1 e^{-3x/2} + c_2 x e^{-3x/2}$

Exemplo

Encontre a solução da EDO $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Equação característica: $r^2 - 6r + 13 = 0 \Rightarrow r_1 = 3 + 2i$ e $r_2 = 3 - 2i$

Solução geral: $y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

Na aula de hoje aprendemos

- . resolver EDO linear homogênea de 2ª ordem com coeficientes constantes

O método para obter solução geral de uma EDO deste tipo é: encontrar as raízes da equação característica e, a partir daí, descrever a solução conforme as raízes obtidas. Faça exercícios para aprender a aplicar o método.