Universidade Federal Fluminense

Departamento de Matemática Aplicada
2a VE de Equações diferenciais **(Gabarito)**
Prof. Sérgio Almaraz - 17/12/2013

1. (a) (1 ponto) Calcule $\mathcal{L}^{-1}(\frac{e^{-s}}{s(s+2)})$.
   Resolução: $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s(s+2)}) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+2)}) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2}$; $\mathcal{L}^{-1}(\frac{e^{-s}}{s(s+2)}) = \mathcal{U}(t-1)\left(\frac{1-e^{-2t+2}}{2}\right)$.

   (b) (1 ponto) Mostre que $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2(s+2)}) = -\frac{1}{4} + \frac{t}{2} + \frac{e^{-2t}}{4}$.
   Resolução: $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2(s+2)}) = \mathcal{L}^{-1}(-\frac{1}{4s} + \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{4(s+2)}) = -\frac{1}{4} + \frac{t}{2} + \frac{e^{-2t}}{4}$.

   (c) (1 ponto) Mostre que $\mathcal{L}(\text{sen}(t) - t\cos(t)) = \frac{2}{(s^2+1)^2}$.
   Resolução: $\mathcal{L}(\operatorname{sen} t) = \frac{1}{s^2+1}$; $\mathcal{L}(t\cos t) = -\frac{s}{ds}\frac{s}{s^2+1} = -\frac{1}{s^2+1} + \frac{2s^2}{(s^2+1)^2}$;
   $\mathcal{L}(\text{sen}(t) - t\cos(t)) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{2s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{2s^2+2-2s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{2}{(s^2+1)^2}$

   (d) (1 ponto) Calcule $\mathcal{L}((1-\mathcal{U}(t-1))t)$.
   Resolução: $\mathcal{L}(t\,\mathcal{U}(t-1)) = \mathcal{L}(((t+1)-1)\,\mathcal{U}(t-1)) = e^{-s}\mathcal{L}(t+1) = e^{-s}(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s})$;
   $\mathcal{L}((1-\mathcal{U}(t-1))t) = \mathcal{L}(t) - \mathcal{L}(t\,\mathcal{U}(t-1)) = \frac{1}{s^2} - (\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s})e^{-s}$.

2. (2 pontos) Resolva a sequinte equação diferencial usando transformada de Laplace:

$$y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 0,$$

onde

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 0, & t \ge 1. \end{cases}$$

Resolução: A equação pode ser reescrita como

$$y' + 2y = (1 - \mathcal{U}(t-1))t.$$

Aplicando $\mathcal{L}$ a ambos os lados e usando 1.d, temos

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{1}{s^2} - (\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s})e^{-s},$$

ou seja,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+2)} - \left(\frac{1}{s^2(s+2)} + \frac{1}{s(s+2)}\right)e^{-s}.$$

Aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ e usando 1.a,b, obtemos

$$y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{t}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{t-1}{2} + \frac{e^{-2t+2}}{4}\right)\mathcal{U}(t-1) - \left(\frac{1-e^{-2t+2}}{2}\right)\mathcal{U}(t-1),$$

ou seja,

$$y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{t}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} + \left(\frac{1}{4} - \frac{t}{2} + \frac{e^{-2t+2}}{4}\right)\mathcal{U}(t-1).$$

3. (2 pontos) Resolva a sequinte equação diferencial usando transformada de Laplace:

$$y'' + y = \text{sen}(t), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$$

Resolução: Aplicando $\mathcal{L}$ a ambos os lados, obtemos

$$(s^2+1)Y(s) - s + 1 = (s^2+1)Y(s) - sy(0) - y'(0) = \frac{1}{s^2+1},$$

ou seja

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}.$$

Aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ e usando 1.c, temos

$$y(t) = \frac{\operatorname{sen} t - t\cos t}{2} + \cos t - \operatorname{sen} t = -\frac{\operatorname{sen} t}{2} + \cos t - \frac{t\cos t}{2}.$$

4. (2 pontos) Encontre uma solução, não nula, em série de potências em torno de $x_0 = 0$ da equação diferencial

$$4xy'' + \frac{1}{2}y' + y = 0.$$

Resolução: Observe que $x_0 = 0$ é um ponto singular regular e escreva $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$. Logo, $y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}$ e $y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$. A equação então é reescrita como

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \\
&= \sum_{k=-1}^{\infty} 4(k+1+r)(k+r)a_{k+1}x^{k+r} + \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{1}{2}(k+1+r)a_{k+1}x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 4(k+1+r)(k+r)a_{k+1} + \frac{1}{2}(k+1+r)a_{k+1} + a_k \right\} x^{k+r} + (4r(r-1) + \frac{r}{2})a_0 x^{-1+r}.
\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes a zero, obtemos a relação de recorrência

$$a_{k+1} = \frac{-2a_k}{(k+1+r)(8k+8r+1)}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2...,$$

e a equação indicial $8r(r-1) + r = 0$, que possui raízes $r_2 = 0$ e $r_1 = \frac{7}{8}$. Com $r = r_2$ obtem-se soluções da forma

$$y_2(t) = C(1 - 2x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3\cdot 9\cdot 17}x^3 + ...),$$

e com $r = r_1$ obtem-se soluções da forma

$$y_1(t) = Cx^{\frac{7}{8}}(1 - \frac{2}{15}x + \frac{2}{15\cdot 23}x^2 - \frac{4}{3\cdot 15\cdot 23\cdot 31}x^3 + ...).$$

Qualquer uma das duas é solução para o problema.