



Departamento de Matemática Aplicada
VR de Equações diferenciais (**Gabarito**)
Prof. Sérgio Almaraz - 07/01/2014

1. (a) (0.5 ponto) Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right)$.

Resolução:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) = \frac{1}{3}\text{sen}(t) - \frac{1}{6}\text{sen}(2t)$$

- (b) (0.5 ponto) Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)}\right)$.

Resolução:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) &= \mathcal{U}(t-2\pi)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right)(t-2\pi) \\ &= \mathcal{U}(t-2\pi)\left(\frac{1}{3}\text{sen}(t-2\pi) - \frac{1}{6}\text{sen}(2t-4\pi)\right) = \mathcal{U}(t-2\pi)\left(\frac{1}{3}\text{sen}(t) - \frac{1}{6}\text{sen}(2t)\right)\end{aligned}$$

- (c) (2.0 pontos) Resolva a seguinte equação diferencial usando transformada de Laplace:

$$y'' + 4y = \text{sen}(t)\mathcal{U}(t-2\pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Resolução: Observe que $\mathcal{L}(\text{sen}(t)\mathcal{U}(t-2\pi)) = \mathcal{L}(\text{sen}(t-2\pi)\mathcal{U}(t-2\pi)) = e^{-2\pi s}\mathcal{L}(\text{sen } t)(s) = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$. Usando isso e o fato que $\mathcal{L}(y'')(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s$, escrevemos a equação como

$$(s^2+4)Y(s) - s = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1},$$

ou seja,

$$Y(s) = \frac{e^{-2\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{s}{s^2+4}.$$

Aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ e usando o item anterior obtemos

$$y(t) = \mathcal{U}(t-2\pi)\left(\frac{1}{3}\text{sen}(t) - \frac{1}{6}\text{sen}(2t)\right) + \cos(2t).$$

2. (a) (0.5 ponto) Mostre que $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)^2}\right) = te^{-3t}$.

Resolução: Primeira forma: $\mathcal{L}(te^{-3t}) = \mathcal{L}(t)(s+3) = \frac{1}{(s+3)^2}$.

Segunda forma: $\mathcal{L}(te^{-3t}) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(e^{-3t}) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+3}\right) = \frac{1}{(s+3)^2}$.

Terceira forma: $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)}\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)}\right) = e^{-3t} * e^{-3t} = \int_0^t e^{-3\tau}e^{-3t+3\tau}d\tau = e^{-3t} \int_0^t d\tau = e^{-3t}t$

(b) (1.5 ponto) Resolva a seguinte equação íntegro-diferencial usando transformada de Laplace:

$$y'(t) + 6y(t) + 9 \int_0^t y(\tau) d\tau = 1, \quad y(0) = 0.$$

Resolução: Observe que $\mathcal{L}(\int_0^t y(\tau) d\tau) = \mathcal{L}((y * 1)(t)) = \mathcal{L}(y(t))\mathcal{L}(1) = \frac{Y(s)}{s}$. Usando isso e o fato que $\mathcal{L}(y')(s) = sY(s) - y(0) = sY(s)$, escrevemos a equação como

$$(s + 6 + \frac{9}{s})Y(s) = \frac{1}{s},$$

ou seja,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 9} = \frac{1}{(s + 3)^2}.$$

Aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ e usando o item anterior obtemos $y(t) = te^{-3t}$.

3. (2.5 pontos) Encontre uma solução não nula da equação $y'' - xy = 1$ em série de potências em torno de $x_0 = 0$.

Resolução: O ponto $x_0 = 0$ é um ponto ordinário da equação acima, assim escrevemos $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Usando o fato que $y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ e substituindo na equação, temos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1,$$

ou seja,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 1.$$

Fazendo $k = n - 2$ na primeira série e $k = n + 1$ na segunda, obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k = 1,$$

ou seja,

$$2a_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \{(k+2)(k+1)a_{k+2} - a_{k-1}\}x^k = 1.$$

Igualando os coeficientes de mesma potência obtemos $a_2 = \frac{1}{2}$ e a relação de recorrência $a_{k+2} = \frac{a_{k-1}}{(k+2)(k+1)}$ para $k = 1, 2, \dots$. Como queremos uma única solução da equação e as relações obtidas não impõe restrições sobre a_0 e a_1 , podemos supô-los nulos. Pela relação de recorrência concluímos que $0 = a_0 = a_3 = a_6 = \dots$, $0 = a_1 = a_4 = a_7 = \dots$, e

$$a_5 = \frac{a_2}{5 \cdot 4} = \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 2}, \quad a_8 = \frac{a_5}{8 \cdot 7} = \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2}, \quad \text{etc.}$$

Assim, obtemos a solução

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 2}x^5 + \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2}x^8 + \dots$$

4. Seja n um inteiro positivo.

(a) (1.5 ponto) Determine a série de Taylor de $f(x) = x^n$ em torno do ponto $x_0 = 1$ e determine o seu raio de convergência.

Resolução: Como $f^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$ para $k = 0, 1, 2, \dots, n$, e $f^{(k)}(x) = 0$ para $k > n$, a série de Taylor de f em torno de $x_0 = 1$ é dada por

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} (x-1)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (x-1)^k.$$

O raio de convergência é $R = \infty$ porque a série é finita. (Todos os alunos receberam 0.5 ponto referente ao cálculo desse raio devido ao erro de impressão apresentado na prova.)

(b) (1.0 ponto) Mostre que $2^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Resolução: Como f é analítica, sabemos que f é dada pela sua fórmula de Taylor, ou seja, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k$ e, como $R = \infty$, essa fórmula vale para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular,

$$2^n = f(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} 1^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$