Universidade Federal Fluminense

Departamento de Matemática Aplicada
VS de Equações diferenciais (**Gabarito**)
Prof. Sérgio Almaraz - 09/01/2014

1. (2.0 pontos) Encontre uma solução não constante da equação $(x-1)y'' - y' = 0$ em série de potências em torno de $x_0 = 0$.
Resolução: Como 0 é um ponto ordinário, escreveremos a solução como $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Assim, $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ e temos
$$(x-1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 0,$$
ou seja,
$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 0,$$
Fazendo $k = n-1$ na segunda série e $k = n$ nas outras duas, obtemos
$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)k a_{k+1} x^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = 0,$$
Observando que $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-1}$ (pois $k(k-1) = 0$ para $k = 1$), e escrevendo a equação numa única série vemos que
$$\sum_{k=1}^{\infty}\{(k-2)a_k - (k+1)a_{k+1}\}x^{k-1} = 0.$$
Igualando termo a termo a zero, $a_{k+1} = \frac{k-2}{k+1}a_k$ para $k = 1, 2, ...$, o que nos dá
$$a_2 = -\frac{a_1}{2}, \quad a_3 = \frac{0}{3}a_2 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{4}a_3 = 0, \quad a_5 = \frac{2}{5}a_4 = 0, \quad \text{etc.}$$
A série então tem a forma
$$y(x) = a_0 + a_1 x - \frac{a_1}{2}x.$$
Como queremos uma solução não constante, temos que escolher $a_1 \neq 1$.

2. (2.0 pontos) Resolva a seguinte equação diferencial usando transformada de Laplace:
$$y' - y = \operatorname{sen}(t), \quad y(0) = 0.$$
Resolução: Usando os fatos que $\mathcal{L}(y')(s) = sY(s) - y(0) = sY(s)$ e $\mathcal{L}(\operatorname{sen} t) = \frac{1}{s^2+1}$, escrevemos a equação como
$$(s-1)Y(s) = \frac{1}{s^2+1},$$
ou seja,
$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}.$$

Observando que

$$\frac{1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{s+1}{s^2+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1}$$

e aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ a ambos lados da equação obtemos

$$y(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t.$$

3. (a) (1.0 ponto) Mostre que $\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$.

   Resolução: *Primeira forma:*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^n e^{at}) &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}(e^{at})(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(s-a)^{-1} \\ &= (-1)^n(-1)^n n!(s-a)^{-n-1} = (-1)^{2n} n!(s-a)^{-n-1} = n!(s-a)^{-n-1}.\end{aligned}$$

   Segunda forma: Como $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, vemos que $\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \mathcal{L}(t^n)(s-a) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$.

   (b) (2.0 pontos) Resolva a seguinte equação diferencial usando transformada de Laplace:

$$y'' - 2y' + y = e^t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 5.$$

   Resolução: Usando os fatos que $\mathcal{L}(y')(s) = sY(s) - y(0) = sY(s)$, $\mathcal{L}(y'')(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 5$ e $\mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{s-1}$, escrevemos a equação como

$$(s^2 - 2s + 1)Y(s) - 5 = \frac{1}{s-1},$$

   ou seja,

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{5}{(s-1)^2},$$

   onde usamos também a identidade $s^2 - 2s + 1 = (s-1)^2$. Aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ e usando o item anterior obtemos

$$y(t) = \frac{t^2e^t}{2} + 5te^t.$$

4. Decida se as séries abaixo são convergentes ou divergentes:

   (a) (1.0 ponto) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}(n+1)^2$.

   Resolução: Fazendo $a_n = \frac{2^n}{3^n}(n+1)^2$, observamos que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2^{n+1}}{2^n}\frac{3^n}{3^{n+1}}\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1+2/n}{1+1/n}\right)^2.$$

   Logo, $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2}{3} < 1$ e a série converge pelo critério da razão.

   (b) (1.0 ponto) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\cos(n^2)}{3^n}(n+1)^2$.

   Resolução: Observe que como $|\cos(n^2)| \le 1$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{2^n\cos(n^2)}{3^n}(n+1)^2\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}(n+1)^2 < \infty$$

   e a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\cos(n^2)}{3^n}(n+1)^2$ converge absolutamente. O resultado então segue do fato que convergência absoluta implica convergência.

   (c) (1.0 ponto) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}e^{-1/n}$.

   Resolução: Como e^x é uma função crescente e $-\frac{1}{n} \ge -1$ para todo $n = 1, 2, ..,$ vemos que $e^{-\frac{1}{n}} \ge e^{-1}$. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}e^{-1/n} \ge e^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = \infty.$$

   Assim, a série diverge.