Universidade Federal Fluminense
Campus do Valonguinho
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada - GMA

Prof Saponga

uff

Rua Mário Santos Braga s/n
24020-140 Niterói, RJ
Tels: (21) 26.29.20.86

Exercícios sobre Funções

1. Quais das funções a seguir são sobrejetoras e quais são injetoras?

   (i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ onde $f(x)=2x-3\,;$

   (ii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ onde $f(x)=x^2-16\,;$

   (iii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ onde $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}\,;$

   (iv) $f:(-\infty,1)\cup(1,\infty)\to\mathbb{R}$ onde $f(x)=\dfrac{1}{x-1}\,;$

   (v) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ onde $f(x)=\begin{cases} x & \text{quando} \quad x\geq 0\\ 2x & \text{quando} \quad x\leq 0\end{cases}$

   (vi) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ onde $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{quando} \quad x\geq 0\\ -x^2 & \text{quando} \quad x\leq 0\end{cases}$

   (vii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ onde $f(x)=\begin{cases} 1/x & \text{quando} \quad x> 0\\ -x^2 & \text{quando} \quad x\leq 0\end{cases}$

   (viii) $f:(\,0\,,1\,]\to[\,1\,,\infty)$ onde $f(x)=1/x$

   (ix) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ onde $f(x)=2^x$

   (x) $f:[\,1\,,\infty)\to[\,1\,,\infty)$ onde $f(x)=x^{4/5}$

   (xi) $f:[\,1\,,\infty)\to[\,1\,,\infty)$ onde $f(x)=x^{4/5}$

   (xii) $f:(-\infty,\,0\,)\cup(\,0\,,\infty)\to\mathbb{R}-\{0\}$ onde $f(x)=x^{-3/7}$.

2. Em cada item, estabeleça qual o maior domínio e qual o maior contradomínio podemos escolher na reta, para que as expressões abaixo definam funções nesses domínios e contradomínios.

   (a) $f(x)=x^3-x^2$

   (b) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

   (c) $f(x)=\sqrt{x}$

   (d) $f(x)=\sqrt{1-x}$

   (e) $f(x)=\sqrt{x^2}$

   (f) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$

   (g) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$

   (h) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

   (i) $f(x)=\sqrt[4]{x^3}$

   (j) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

   (k) $g(x)=\dfrac{2x}{x}$

   (l) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$

   (m) $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$

   (n) $f(x)=\sqrt{2-|x|}$

   (o) $f(x)=\dfrac{x-1}{1-|x|}\,.$

3. Mostre que as funções a seguir são bijetoras e determine domínio, contradomínio e a expressão da respectiva inversa.

   (a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ onde $f(x)=2x-3$

   (b) $f:[\,0\,,\infty)\to[\,1\,,\infty)$ onde $f(x)=x^2+1$

   (c) $f:(-\infty\,,-1\,]\to[\,-1\,,\infty)$ onde $f(x)=x^2+2x$

   (d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ onde $f(x)=2x^3$

(e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ onde $f(x)=x^3-1$

(f) $f:(-\infty\,,0\,]\to[-1\,,\infty)$ onde $f(x)=x^4-1$

(g) $f:(-\infty,0)\cup(0\,,\infty)\to(-\infty,0)\cup(0\,,\infty)$ onde $f(x)=1/x$

(h) $f:(-1\,,\infty)\to(0\,,\infty)$ onde $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

(i) $f:(-\infty,-1)\to(0\,,\infty)$ onde $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

(j) $f:[\,0\,,1\,)\to(-\infty\,,-1\,]$ onde $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

(k) $f:(\,1\,,\infty)\to(\,0\,,\infty)$ onde $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

(l) $f:(\,2\,,\infty)\to(\,1\,,\infty)$ onde $f(x)=\dfrac{1}{x^3-8}+1$

(m) $f:(-\infty\,,2\,)\to(-\infty\,,1\,)$ onde $f(x)=\dfrac{1}{x^3-8}+1$

4. As funções a seguir podem não ser bijetoras. Faça restrições nos domínios e contradomínios dessas aplicações para que elas fiquem bijetoras e determine domínio, contradomínio e as expressões das respectivas inversas. Faça isso diminuindo o mínimo possível o domínio e o contra-domínio das funções. Repita o exercício usando outro subconjunto do domínio no qual a aplicação é injetora.

(a) $f(x)=x^2-4x+3$

(b) $f(x)=4-x^2$

(c) $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$

(d) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

(e) $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$

(f) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-2}$

(g) $f(x)=\sqrt{x-2}$

(h) $f(x)=\sqrt{2-3x}$

(i) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$

(j) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$

(k) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

(l) $f(x)=|x-1|$

(m) $f(x)=|4-x^2|$

(n) $f(x)=\sqrt{4-|x|}$

(o) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$

(p) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

5. Todas as aplicações a seguir são aplicações da reta na reta. Determine, em cada item, as compostas $f\circ g$ e $g\circ f$.

(a) $f(x)=2x-1$ e $g(x)=3x^2+2$

(b) $f(x)=2x^2-1$ e $g(x)=|x-1|$

(c) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ e $g(x)=x^2+3$

(d) $f(x)=1+\sqrt[3]{1-x}$ e $g(x)=x-|x|$

(e) $f(x)=\begin{cases} x & \text{quando} \quad x\geq 0\\ -x^2 & \text{quando} \quad x\leq 0\end{cases}$ e $g(x)=x^2$

(f) $f(x)=\begin{cases} x & \text{quando} \quad x\geq 0\\ -x^2 & \text{quando} \quad x\leq 0\end{cases}$ e $g(x)=1-|x|$

6. Nas expressões a seguir, o domínio considerado é o maior subconjunto da reta para o qual a expressão faz sentido e o seu contradomínio é a reta.

Faça restrições no domínio de f, se necessário, afim de que a composta $g\circ f$ fique bem definida, e determine o domínio e a expressão de $g\circ f$. Repita o exercício trocando f por g.

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ e $g(x)=2x+3$

(b) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ e $g(x)=2x+3$

(c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ e $g(x)=\dfrac{1}{x}$

(d) $f(x)=\sqrt{x}$ e $g(x)=2x+3$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g(x) = 2x^2 + 3$

(f) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$ e $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$

(g) $f(x) = |x+2|$ e $g(x) = 1 - |x|$

(h) $f(x) = \sqrt{4-|x|}$ e $g(x) = \sqrt{4-x^2}$

7. Nos exercícios a seguir a aplicação a ser construída tem a reta como contradomínio.

(a) Um retângulo tem como base o dobro de sua altura.

- Escreva o perímetro desse retângulo em função da medida da altura, especificando o domínio da função no contexto do problema;
- Escreva o perímetro desse retângulo em função da medida da base, especificando o domínio da função no contexto do problema;
- Escreva o perímetro desse retângulo em função da medida da diagonal, especificando o domínio da função no contexto do problema;
- É possível escrever o perímetro desse retângulo em função do ângulo que a diagonal faz com a base ?
- Repita os três itens anteriores trocando perímetro por área;

(b) Num triângulo retângulo, um dos catetos mede um terço do outro.

i. Escreva a medida da hipotenusa desse triângulo em função da medida do cateto menor, especificando o domínio da função no contexto do problema;

ii. Escreva a medida da hipotenusa desse triângulo em função da medida do cateto maior, especificando o domínio da função no contexto do problema;

iii. Escreva o perímetro desse triângulo em função da medida do cateto menor, especificando o domínio da função no contexto do problema;

iv. Escreva o perímetro desse triângulo em função da medida da hipotenusa, especificando o domínio da função no contexto do problema;

v. Escreva a área desse triângulo em função da medida da hipotenusa, especificando o domínio da função no contexto do problema;

(c) Um triângulo equilátero está inscrito num círculo de raio $r > 0$. Escreva:

i. o perímetro do triângulo em função do raio do círculo, especificando o domínio da função no contexto do problema;

ii. a área do triângulo em função do raio do círculo, especificando o domínio da função no contexto do problema.

(d) Um triângulo equilátero está circunscrito num círculo de raio $r > 0$. Escreva:

i. o perímetro do triângulo em função do raio do círculo, especificando o domínio da função no contexto do problema;

ii. a área do triângulo em função do raio do círculo, especificando o domínio da função no contexto do problema.

(e) Um retângulo está inscrito num círculo de raio $10\,cm$. Sabendo que um dos lados do retângulo mede ℓ *cm*, escreva:

i. quanto mede o outro lado em função de ℓ, especificando o domínio da função no contexto do problema;

ii. quanto mede o perímetro do retângulo em função de ℓ, especificando o domínio da função no contexto do problema;

iii. quanto mede a área do retângulo em função de ℓ, especificando o domínio da função no contexto do problema.

(f) Um triângulo isósceles está inscrito num círculo que delimita uma área de $20\,cm^2$. Sabendo que dois dos lados do triângulo medem $\ell\,cm$, escreva:

i. quanto mede o terceiro lado em função de ℓ, especificando o domínio da função no contexto do problema;

ii. quanto mede o perímetro do triângulo em função de ℓ, especificando o domínio da função no contexto do problema;

iii. quanto mede a área do triângulo em função de ℓ, especificando o domínio da função no contexto do problema;

(g) Um círculo está inscrito num triângulo equilátero de lado ℓ. Escreva:

i. quanto mede o raio do círculo em função de ℓ, especificando o domínio da função no contexto do problema;
ii. quanto mede o perímetro do círculo em função de ℓ, especificando o domínio da função no contexto do problema;
iii. quanto mede a área da região delimitada pelo círculo em função de ℓ, especificando o domínio da função no contexto do problema;