

## Exercícios sobre Polinômios

NOTA: Todos os polinômios aqui considerados são polinômios a coeficientes reais e a variável real.

1. Quais das expressões a seguir são polinômios? Para aquelas que são polinômios determine o grau, o termo independente e o coeficiente do termo de maior grau.

(a)  $x^2 - 2x^3 + 4$ ;

(b)  $1 - x^4 - x^2 + x - x^{1/3}$ ;

(c)  $\lambda x^3 - \pi|x|^2 - 1$ ;

(d)  $(a^2 - 1)x^4 + (a^2 + a)x^2 + x + \sqrt{2}$ ;

(e)  $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots$  onde  
 $n \in \mathbb{Z}^+$ ;

(f)  $1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3}$ ;

(g)  $(x^3 - x^2)/b$  onde  $0 \neq b \in \mathbb{R}$ ;

(h)  $(|x|^2 - 1)^{10}$ ;

(i)  $|x - 1| + 2$ ;

(j)  $(2x^3 - 1)^{12}$ .

2. Quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras?

- A soma de dois polinômios de grau 6 é um polinômio de grau 6;
- O produto de dois polinômios de grau 5 é um polinômio de grau 10;
- A diferença de dois polinômios de grau 8 pode ser um polinômio de grau 3;
- Se 0 é raiz de um polinômio então o seu termo independente é nulo;
- Se todos os coeficientes de um polinômio de grau 5 são positivos então o polinômio nunca se anula.
- Se todos os coeficientes de um polinômio de grau par são positivos então o polinômio nunca se anula.

3. Qual é o significado geométrico do termo independente de um polinômio de grau  $n \in \mathbb{Z}^+$ ?

4. Dois polinômios de grau 2 que têm exatamente as mesmas raízes são iguais? Se não, qual a diferença essencial entre eles?

5. Considere o polinômio  $P(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 5$ . Escreva a expressão dos polinômios  $P(x+2)$ ,  $x^2 P(1-x)$ ,  $P(x^2 - 1)$ .

6. Se  $P(x)$  é um polinômio de grau  $n \in \mathbb{Z}^+$  qual é o grau dos polinômios a seguir?

(a)  $x^2 P(x)$

(b)  $P(x - 2)$

(c)  $P(x^2 + 1)$

(d)  $P(1 - x^3)$

(e)  $x^4 P(x - x^3)$

(f)  $(P(x))^4$

(g)  $(P(x + x^3))^4$

(h)  $x^n P(x) - P(x^2)$

(i)  $P(2)$ .

7. Sabendo que  $x = -2$  é raiz do polinômio  $P(x)$ , determine uma raiz de cada um dos polinômios:

(a)  $3P(x)$

(b)  $P(x - 2)$

(c)  $(P(x))^3$

(d)  $P(x^2 - 2)$

(e)  $P(x^3 - x^2)$

(f)  $P(3x + 4)$ .

8. Determine o coeficiente do termo de maior grau e o termo independente dos polinômios a seguir.

(a)  $(x^2 - 2)(1 - x - x^2 - \dots - x^7)$ ;

(b)  $(x - x^2 + 2)(x^7 + 2x^8 - 3x^2 - x^4 + 5x - 6)$ ;

(c)  $(1 + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n)(x^3 - x^4 + x^5 - \dots - x^{10})$ .

9. Determine as raízes reais, caso existam, dos polinômios a seguir.

- $2x^4 + 4x^2 - 6$
- $x^8 + 5x^4 + 6$
- $12x^2 + 4x^5 - x^8$
- $12 + 4x^3 - x^6$
- $x^5 - 3x^3 - 4x$
- $x^{11} + 5x^7 + 6x^3$ .

10. O Teorema Fundamental da Álgebra nos garante que um polinômio de grau  $n \in \mathbb{Z}^+$  possui no máximo  $n$  raízes distintas. Use este fato para concluir que

- Se dois polinômios de grau 1 coincidem em 2 pontos distintos então eles são iguais;
- Se dois polinômios de grau 2 coincidem em 3 pontos distintos então eles são iguais;
- Se dois polinômios de grau 3 coincidem em 4 pontos distintos então eles são iguais;
- Se dois polinômios de grau  $n$  coincidem em  $n + 1$  pontos distintos então eles são iguais.

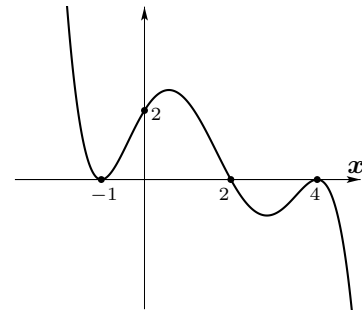
11. Use o exercício anterior para concluir que se 2 parábolas coincidem em 3 pontos distintos então elas são iguais.

12. Entre quais dois inteiros consecutivos existe uma raiz do polinômio  $P(x) = 28x^3 - 11x^2 + 15x - 28$ ?

- (i) -2 e -1   (ii) -1 e 0   (iii) 0 e 1   (iv) 1 e 2   (v) 2 e 3.

13. Quantas soluções positivas temos na equação  $x^4 + x^3 - 3x^2 - 3x = 0$  onde  $x \in \mathbb{R}$ ?

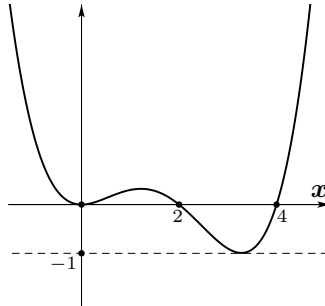
14. O quadro ao lado mostra o gráfico de um polinômio  $P(x)$  de grau 5.



- (a) Qual o termo independente de  $P(x)$ ?
- (b) Determine as raízes de  $P(x)$  e suas respectivas multiplicidades. Justifique sua resposta.
- (c) Será que existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que o polinômio  $P(x) + \alpha$  não possua raízes reais?
- (d) Determine a expressão de  $P(x)$ .

15. O quadro abaixo mostra o gráfico de um polinômio  $P(x)$  de grau 4.

- (a) Determine as raízes de  $P(x)$  e suas respectivas multiplicidades.
- (b) Determine um inteiro  $\alpha$  tal que o polinômio  $P(x) + \alpha$  não tenha raízes reais.



16. Nos itens abaixo, o primeiro fator de cada polinômio indica a presença de uma raiz:

- (i)  $P(x) = (x - 1)^2(x^3 + 3x^2 - 2x - 2)^5$ ;
- (ii)  $P(x) = (x + 2)(x^3 + 7x^2 + 8x + 12)^2$ ;
- (iii)  $P(x) = (x + 1)(x^7 + x + 1)$ ;
- (iv)  $P(x) = (x - 1)(x^9 + x + 1)$ ;
- (v)  $P(x) = (x + 1)(x^7 + x + 2)$ .

Nessa condição:

- (a) Determine a multiplicidade desta raiz;
- (b) Esboce o gráfico do polinômio para valores da variável próximos desta raiz.

17. Estude o sinal dos polinômios e as multiplicidades de suas raízes:

(i)  $P(x) = (x + 1)^3(x^{10} + 2x^4 + x^2 + 8)^5$

(ii)  $P(x) = (x + 2)^2(x^4 - x^3 + x^2 + x)$

18. Considere o polinômio  $P(x) = (x + 2)^2(x^4 + x^3 + x^2 + x)^3$ .

- Determine as raízes de  $P(x)$  e suas respectivas multiplicidades;
- Estude o sinal de  $P(x)$ ;
- Esboce o gráfico de  $P(x)$  quando a variável  $x \in \mathbb{R}$  está próxima de cada uma das raízes de  $P(x)$ ;
- Qual é o comportamento de  $P(x)$  no infinito, isto é, calcule:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x).$$

19. Vimos que todo polinômio de grau ímpar tem pelo menos uma raiz (real). Essa propriedade seguiu como consequência do comportamento de um tal polinômio no infinito e do fato de expressões polinomiais variarem continuamente.

Mostre que se um polinômio de grau par assume valores positivos e valores negativos então ele tem pelo menos duas raízes (reais).

20. Mostre que se um polinômio de grau ímpar possui uma raiz de multiplicidade 2 então ele possui pelo menos mais uma raiz (real).
21. Generalize o resultado do exercício anterior.
22. Mostre que se um polinômio de grau par tem uma raiz de multiplicidade ímpar então ele tem pelo menos mais uma raiz (real).
23. Generalize o resultado do exercício anterior.
24. Suponha que  $P(x)$  é um polinômio satisfazendo as condições:

- possui 1 como raiz de multiplicidade 3;
- possui grau 5;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \infty$ ;
- o termo independente vale  $-1$ .

Qual a forma de  $P(x)$ ?

25. Seja  $P(x)$  um polinômio com as seguintes propriedades:

- tem apenas 2 raízes (reais) distintas e sobre elas sabe-se que uma tem multiplicidade 2 e da outra nada se sabe sobre a multiplicidade;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \infty$ .

O que se pode dizer da multiplicidade da segunda raiz? Quais são as possibilidades para a tabela de sinais de  $P(x)$ ?

26. Generalize o resultado descrito no exercício anterior.

27. Seja  $P(x)$  um polinômio com as seguintes propriedades:

- (i) tem apenas 3 raízes (reais) distintas e sobre elas sabe-se que uma tem multiplicidade 3, outra tem multiplicidade 2 e da terceira nada se sabe sobre a multiplicidade;
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \infty$ .

O que se pode dizer da multiplicidade da terceira raiz? Quais são as possibilidades para a tabela de sinais de  $P(x)$ ?

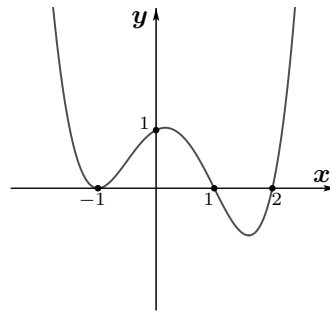
28. Seja  $P(x)$  o seguinte polinômio:

$$P(x) = (x + x^2)^2(4 - x^2)(x^2 + 3x + 2)(x^2 + x + 9).$$

- (a) Determine as raízes (reais) de  $P(x)$  e suas respectivas multiplicidades;

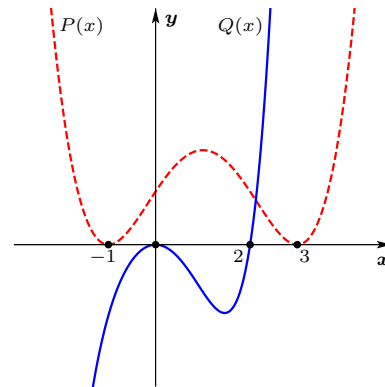
(b) Faça a decomposição de  $P(x)$  segundo o Teorema Fundamental da Álgebra como enunciado em sala de aula.

29. A figura a seguir mostra o gráfico de um polinômio  $P(x)$  de grau 4. Determine esse polinômio sabendo que  $P(0) = 1$ . Mostre que existe um número real  $k$  tal que o polinômio  $Q(x) = P(x) + k$  não possui raízes reais.



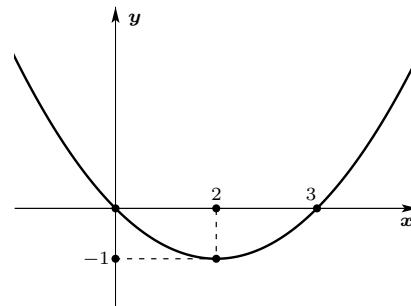
30. Os gráficos ao lado são gráficos de polinômios: um de grau 4 e outro de grau 5.

- (a) Qual deles tem grau 4?
- (b) Quanto vale o termo independente do polinômio  $Q(x)$ ?
- (c) Determine as raízes de  $P(x)$  e suas respectivas multiplicidades.



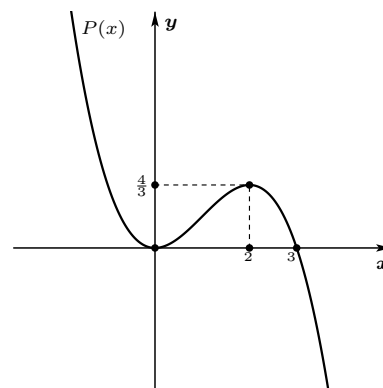
31. O gráfico ao lado é gráfico de um polinômio  $P(x)$  de grau 6.

- (a) Determine as raízes reais de  $P(x)$  e suas respectivas multiplicidades;
- (b) Será que existe um número real  $k$  tal que o polinômio  $P(x) + k$  tem 4 raízes reais distintas?
- (c) Será que existe um número real  $b$  tal que o polinômio  $P(x) + b$  tem uma única raiz?



32. A figura ao lado representa o gráfico de um polinômio  $P(x)$ .

- (a) Quais seriam as possíveis expressões para  $P(x)$  se ele fosse de grau 3?
- (b) Quais seriam as possíveis expressões para  $P(x)$  se ele fosse de grau 5 e quais seriam as multiplicidades de suas raízes?
- (b) Quais seriam as possíveis expressões para  $P(x)$  se ele fosse de grau 4?



33. Considere o polinômio

$$P(x) = x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 17x - 10.$$

- (a) Determine todas as raízes de  $P(x)$  e suas respectivas multiplicidades.
- (b) Faça uma análise do sinal de  $P(x)$ .

- (c) Determine os valores da variável  $x \in \mathbb{R}$  para os quais a expressão

$$\sqrt{\frac{P(x)}{(x+1)(x+5)}}$$

está bem definida.

34. Mostre que  $x = -1$  é raiz do polinômio

$$Q(x) = (x^3 - 3x - 2)(x^2 + 3x + 2)$$

e determine sua multiplicidade.

35. Considere o polinômio

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4.$$

- (a) Determine todas as raízes de  $P(x)$  e suas respectivas multiplicidades;  
 (b) Faça uma análise do sinal de  $P(x)$ ;  
 (c) Determine os valores da variável  $x$  para os quais a expressão

$$\sqrt{\frac{P(x)}{x-1}}$$

está bem definida.

36. Considere o polinômio

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad \text{onde} \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Determine as condições que  $a, b, c$  devem satisfazer para que 1 seja uma raiz de multiplicidade 3 de  $P(x)$ .

37. Considere o polinômio

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 18x - 9.$$

- (a) Determine todas as raízes de  $P(x)$  e suas respectivas multiplicidades;  
 (b) Faça uma análise do sinal de  $P(x)$ ;  
 (c) Determine os valores da variável  $x$  para os quais a expressão

$$\sqrt{\frac{P(x)}{x+1}}.$$

está bem definida.

38. Mostre que  $x = -1$  é raiz do polinômio

$$(x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2) \cdot (x^2 + 3x + 2)$$

e determine sua multiplicidade.

39. Considere o polinômio

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4.$$

- a) Determine todas as raízes de  $P(x)$  e suas respectivas multiplicidades;  
 b) Faça uma análise do sinal de  $P(x)$ ;  
 c) Determine os valores da variável  $x$  para os quais a expressão

$$\sqrt{\frac{P(x)}{x-1}}$$

está bem definida.

40. Considere o polinômio

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad \text{onde} \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Determine as condições que  $a, b, c$  devem satisfazer para que 1 seja uma raiz de multiplicidade 3 de  $P(x)$ . Nesse caso, qual será a expressão de  $P(x)$ ?

41. A figura abaixo mostra o gráfico de um polinômio de grau 5.

- (a) Qual a multiplicidade da raiz  $x = -1$ ?
- (b) Quais as possíveis multiplicidades para a raiz  $x = 2$ ?
- (c) Quais as possíveis expressões para o polinômio?

