uff

Universidade Federal Fluminense
Campus do Valonguinho
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada - GMA

Prof Saponga

Rua Mário Santos Braga s/n
24020-140 Niterói, RJ
Tels: (21) 26.29.20.86

Exercícios sobre Trigonometria
2015.1

1. Use um triângulo equilátero e mostre que:

$$\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2 \qquad \sin(\pi/6) = 1/2 \qquad \tan(\pi/6) = \sqrt{3}/3$$
$$\cos(\pi/3) = 1/2 \qquad \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \qquad \tan(\pi/3) = \sqrt{3}$$

   onde os ângulos são dados em radianos.

2. Seja $\theta \in [\,0\,, 2\pi\,]$ dado em radianos. Faça uma figura, no círculo trigonométrico, que mostre, de forma clara, os ângulos: θ ; $-\theta$; $\theta+\pi$; $\theta-\pi$; $\pi-\theta$; $\theta+\pi/2$; $\theta-\pi/2$; $\pi/2-\theta$.

3. Calcule $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$, $\operatorname{cossec}\theta$ para os seguintes valores de θ, dado em radianos: $-\pi/6$, $\pi-\pi/6$, $\pi+\pi/6$, $\pi/6+\pi/2$, $\pi/6-\pi/2$, $-\pi/3$, $\pi-\pi/3$, $\pi+\pi/3$, $\pi/3+\pi/2$, $\pi/3-\pi/2$.

   É proibido usar a fórmula do seno e do cosseno para a soma e para a diferença de dois ângulo. Use a representação gráfica dos ângulos.

4. Sabendo que $\cos\theta = \sqrt{3}/3$, determine, os possíveis valores para: $\sin\theta$, $\sin(\theta+\pi)$, $\sin(\theta+\pi/2)$, $\sin(\theta-\pi/2)$, $\cos(\theta+\pi)$, $\cos(\theta-\pi/2)$, $\cos(\theta+\pi/2)$.

   É proibido usar a fórmula do seno e do cosseno para a soma e para a diferença de dois ângulo. Use a representação gráfica dos ângulos.

5. Seja $\theta \in [\,0\,, \pi/2\,]$ dado em radianos. Faça uma figura, no círculo trigonométrico, que mostre, de forma clara, a relação entre:

   (a) $\cos\theta$ e $\cos(-\theta)$; $\sin\theta$ e $\sin(-\theta)$; $\tan\theta$ e $\tan(-\theta)$
   (b) $\cos\theta$ e $\cos(\theta+\pi)$; $\sin\theta$ e $\sin(\theta+\pi)$; $\tan\theta$ e $\tan(\theta+\pi)$
   (c) $\cos\theta$ e $\cos(\pi-\theta)$; $\sin\theta$ e $\sin(\pi-\theta)$; $\tan\theta$ e $\tan(\pi-\theta)$
   (d) $\cos\theta$ e $\cos\big\{(\pi/2)-\theta\big\}$; $\sin\theta$ e $\sin\big\{(\pi/2)-\theta\big\}$; $\tan\theta$ e $\tan\big\{(\pi/2)-\theta\big\}$

   A relação que você encontrou vale apenas para ângulos do intervalo $[\,0\,, \pi/2\,]$ ou vale para qualquer ângulo (com excessão daqueles onde a tangente não está bem definida)?

6. Repita o exercício anterior para cotangente, secante e cossecante.

7. Sem usar a fórmula do seno e do cosseno da soma e da diferença, faça uma figura, no círculo trigonométrico, que mostre, de forma clara, a relação entre:

   (a) $\cos\big\{(\pi/2)+\theta\big\}$ e $\cos\big\{(\pi/2)-\theta\big\}$; $\sin\big\{(\pi/2)+\theta\big\}$ e $\sin\big\{(\pi/2)-\theta\big\}$; $\tan\big\{(\pi/2)+\theta\big\}$ e $\tan\big\{(\pi/2)-\theta\big\}$
   (b) $\cos(\pi+\theta)$ e $\cos(\pi-\theta)$; $\sin(\pi+\theta)$ e $\sin(\pi-\theta)$; $\tan(\pi-\theta)$ e $\tan(\pi-\theta)$
   (c) $\cos\big\{(3\pi/2)+\theta\big\}$ e $\cos\big\{(3\pi/2)-\theta\big\}$; $\sin\big\{(3\pi/2)+\theta\big\}$ e $\sin\big\{(3\pi/2)-\theta\big\}$; $\tan\big\{(3\pi/2)+\theta\big\}$ e $\tan\big\{(3\pi/2)-\theta\big\}$

8. Considere as aplicações $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ vistas como aplicações da reta na reta e onde a variável x é dada em radianos.

   (a) Mostre que o gráfico de f é simétrico em relação ao eixo definido pela reta de equação cartesiana $x = \pi$, isto é, prove que $f(\pi+x) = f(\pi-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

(b) Mostre que o gráfico de g não tem essa propriedade;
(c) Mostre que o gráfico de g é simétrico em relação ao eixo definido pela reta de equação cartesiana $x = \pi/2$;
(d) Mostre que o gráfico de f não tem essa propriedade;
(e) O que se pode dizer da tangente, cotangente, secante e cossecante? Seus gráficos têm ou não têm as simetrias acima consideradas?

9. Calcule seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante para os ângulos abaixo, dados em radianos, a menos que não estejam definidos.

 - $28\pi/3$ rd
 - $280\pi/6$ rd
 - $-280\pi/6$ rd
 - $1562\pi/3$ rd
 - $29\pi/4$ rd
 - $293\pi/4$ rd
 - $-293\pi/4$ rd
 - $-1293\pi/4$ rd

10. Calcule as funções trigonométricas para os ângulos dados acima, caso elas estejam bem definidas

11. Os ângulos a seguir são dados em graus, transforme-os em ângulos dados em radianos.

 - 1360^o
 - 924^o
 - 1924^o
 - -2300^o
 - 3360^o
 - -30360^o

12. Para cada ângulo dado acima, determine um ângulo, dado em graus, que tenha o mesmo seno e o mesmo cosseno e que seja maior ou igual a zero, e inferior a 360^o.

13. Sabendo que $\tan\theta = -5/3$ e que theta é um ângulo do segundo quadrante, determine o valor de:
(a) $\sec\theta$ (b) $\sin\theta$ (c) $\cot(-\theta)$.

14. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais as identidades a seguir são verdadeiras:

(a) $\tan x \times \sin x + \tan x = \dfrac{1}{\sec x}$
(b) $\dfrac{1}{\tan x} + \tan x = \dfrac{1}{\sin x \times \cos x}$
(c) $\sin x - \sin x \times \cos^2 x = \sin^3 x$
(d) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\sec\alpha$
(e) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = 2\tan\alpha$
(f) $\dfrac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = 1$.

15. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a identidade $\tan^2 x\,(1+\cot^2 x) = \dfrac{1}{1-\sin^2 x}$ é verdadeira.

16. Determine os valores de $\theta \in \mathbb{R}$ para os quais a identidade $\dfrac{\tan\theta - \cot\theta}{\sin\theta\,\cos\theta} = \sec^2\theta - \csc^2\theta$ é verdadeira.

17. Determine os valores de $t \in \mathbb{R}$ para os quais a identidade $\dfrac{\cos t}{1-\sin t} = \dfrac{1+\sin t}{\cos t}$ é verdadeira.

18. Calcule $\cos(15^o)$ e $\sin(75^o)$ usando as identidades trigonométricas
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \times \cos\beta - \sin\alpha \times \sin\beta$; $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \times \cos\beta + \sin\beta \times \cos\alpha$.

19. Use o exercício anterior, onde se calculou o seno e o cosseno de $\pi/12$ radianos, para calcular o seno e o cosseno de $\pi/24$ radianos.

20. Um ângulo $\theta_o \in [\pi/2, \pi]$ satisfaz a equação $2\sin^2\theta - 5\sin\theta + 2 = 0$. Determine θ_o e $\cos\theta_o$.

Solução. Como θ_o satisfaz a equação $2\sin^2\theta - 5\sin\theta + 2 = 0$, segue que $\sin\theta_o$ é raiz do polinômio $2z^2 - 5z + 2$. Tendo em vista que $2z^2 - 5z + 2 = 2(x-2)(x-1/2)$ nós concluimos que

$$\sin\theta_o = 2 \qquad \text{ou} \qquad \sin\theta_o = 1/2 .$$

Como $\sin\theta_o \in [-1, 1]$, concluimos que $\sin\theta_o = 1/2$. Relembrando que $\theta_o \in [\pi/2, \pi]$ nós obtemos

$$\theta_o = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} .$$

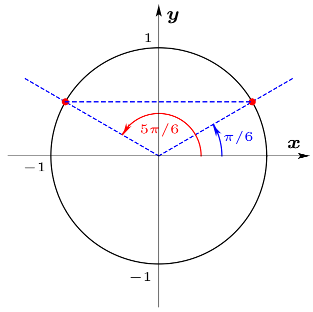
Novamente, como $\theta_o \in [\pi/2, \pi]$ segue que $\cos\theta_0 = -\sqrt{3}/2$ e o problema está resolvido.

21. Mostre que $\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

    Solução. Temos que

$$\begin{aligned}\sin(3\alpha) &= \sin(2\alpha+\alpha) = \sin(2\alpha)\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\cos(2\alpha)\\ &= 2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha + \sin\alpha\cdot(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\\ &= 2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha + \sin\alpha\cdot\cos^2\alpha - \sin^3\alpha\\ &= 3\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha - \sin^3\alpha \qquad , \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}\ .\end{aligned}$$

22. Determine as soluções da inequação $2\sin^2\theta - 5\sin\theta + 2 < 0$ no intervalo $[0,\pi]$ dado em radianos.



    Solução. Como θ satisfaz a inequação $2\sin^2\theta - 5\sin\theta + 2 < 0$, segue que $\sin\theta$ satisfaz a inequação $2z^2 - 5z + 2 < 0$. Por outro lado, temos que $2z^2 - 5z + 2 = 2(x-2)(x-1/2)$.
    Agora, observamos que $\sin\theta - 2$ é sempre negativo. Logo a inequação só estará satisfeita para $\sin\theta > 1/2$. Como $\theta \in [0,\pi]$ concluimos que

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\ .$$

23. Mostre que $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \quad , \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$.

    Solução. Temos que

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha) &= \cos(2\alpha+\alpha) = \cos(2\alpha)\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin(2\alpha)\\ &= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot\cos\alpha - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha\\ &= \cos^3\alpha - \sin^2\alpha\cdot\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\\ &= \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\\ &= \cos^3\alpha - 3(1-\cos^2\alpha)\cdot\cos\alpha\\ &= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos^3\alpha\\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \qquad , \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

24. Determine as soluções da inequação $2\sin^4\theta - 5\sin^3\theta + 6\cos^2\theta + 20\sin\theta > 14$, no intervalo $[0,\pi]$, sabendo que o polinômio $2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 20x - 8$ tem a seguinte decomposição

$$2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 20x - 8 = (x+2)(x-2)^2(2x-1)\ . \qquad (*)$$

    Solução. Temos que

$$2\sin^4\theta - 5\sin^3\theta + 6\cos^2\theta + 20\sin\theta > 14$$
$$\Updownarrow$$
$$2\sin^4\theta - 5\sin^3\theta + 6(1-\sin^2\theta) + 20\sin\theta > 14$$
$$\Updownarrow$$
$$2\sin^4\theta - 5\sin^3\theta - 6\sin^2\theta + 20\sin\theta - 8 > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(\sin\theta+2)(\sin\theta-2)^2(2\sin\theta-1) > 0\ ,$$

    tendo em vista a decomposição do polinômio (*).

    Como $\sin\theta + 2 > 0$ e $(\sin\theta-2)^2 > 0$ resulta que a inequação só estará satisfeita quando $2\sin\theta - 1 > 0$, isto é, $\sin\theta > 1/2$. Como as soluções que procuramos estão restritas ao intervalo $[0,\pi]$, segue que θ é solução da inequação em estudo quando

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\ .$$

25. Determine as soluções da inequação $2\sin^4 x - 5\sin^3 x + 6\cos^2 x + 20\sin x < 14$ no intervalo $[0,\pi]$ sabendo que o polinômio $2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 20x - 8$ tem a seguinte decomposição
$$2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 20x - 8 = (x+2)(x-2)^2(2x-1)\ .$$

Solução. Temos que
$$2\sin^4\theta - 5\sin^3\theta + 6\cos^2\theta + 20\sin\theta < 14$$
$$\Updownarrow$$
$$2\sin^4\theta - 5\sin^3\theta + 6(1-\sin^2\theta) + 20\sin\theta < 14$$
$$\Updownarrow$$
$$2\sin^4\theta - 5\sin^3\theta - 6\sin^2\theta + 20\sin\theta - 8 < 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(\sin\theta+2)(\sin\theta-2)^2(2\sin\theta-1) < 0\ ,$$
tendo em vista a decomposição do polinômio (*).

Como $\sin\theta + 2 > 0$ e $(\sin\theta-2)^2 > 0$ resulta que a inequação só estará satisfeita quando $2\sin\theta - 1 < 0$, isto é, $\sin\theta < 1/2$. Como as soluções que procuramos estão restritas ao intervalo $[0,\pi]$, segue que θ é solução da inequação em estudo quando
$$0 \le \theta < \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} < \theta \le \pi$$
isto é,
$$\theta \in [0,\pi/6) \cup (5\pi/6,\pi]\ .$$

26. Resolva as equações e determine quantos pontos essas soluções definem na circunferência trigonométrica. Marque esses pontos na circunferência trigonométrica.
   (a) $\cos 6x = \cos 4x$;
   (b) $|\sin(x-\pi)| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

27. Resolva:
   (a) $\cos x \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}\ , \quad x \in \mathbb{R}$
   (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin x < \frac{1}{2}\ , \quad x \in [0\,,2\pi]$

28. Considere a equação $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right) = \dfrac{1}{2}$.
   (a) Determine todas as suas soluções ;
   (b) Determine as soluções no intervalo $[-3\pi, 5\pi]$.

29. Responda às questões a seguir:
   (a) $\cos\left(\dfrac{15\pi}{4}\right) + \sin\left(\dfrac{13\pi}{4}\right) = ?$
   (b) $\cos(17^o) < \cos(345^o)$?
   (c) Existe algum ângulo positivo cuja *cosseno* vale $\sqrt{2}$?

30. Considere a equação e a inequação dadas a seguir:
$$(*) \quad \sin x = \sqrt{3}\cos x \qquad ; \qquad 8\sin^2 x + 12\cos^2 x \le 9 \quad (**)\ .$$
   (a) Determine todas as soluções de $(*)$ e explicite aquelas que estão no intervalo $[-2\pi\,,-\pi\,]$;
   (b) Resolva $(**)$ usando as identidades trigonométricas
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad \text{e} \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}. \tag{1}$$

Solução: Passemos a solução da equação $(*)$.

(a) Para resolver a equação $(*)$ elevamos ambos os membros ao quadrado e obtemos a seguinte equação:

$$\sin^2 x = 3\cos^2 x\,. \tag{2}$$

Resolvendo-a, obtemos:

$$\begin{aligned}\sin^2 x = 3\cos^2 x \quad &\Longleftrightarrow \quad \sin^2 x = 3(1-\sin^2 x) \quad \Longleftrightarrow \quad \sin^2 x = 3 - 3\sin^2 x \\ &\Longleftrightarrow \quad 4\sin^2 x = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin^2 x = 3/4 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin x = \pm\sqrt{3}/2\,.\end{aligned}$$

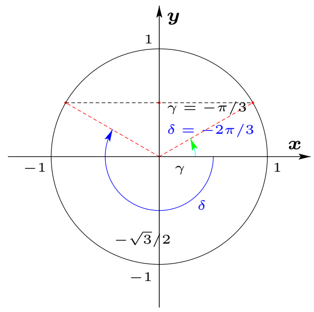
Por outro lado, temos que

$$\text{(ai)}\ \ \sin x = \sqrt{3}/2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \begin{cases} \alpha + 2k\pi \\ \quad ou \\ \beta + 2k\pi \end{cases} \quad \text{onde } \ k \in \mathbb{Z}\,;$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \quad ou \\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{onde } \ k \in \mathbb{Z}\,.$$

$$\text{(aii)}\ \ \sin x = -\sqrt{3}/2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \begin{cases} \gamma + 2k\pi \\ \quad ou \\ \delta + 2k\pi \end{cases} \quad \text{onde } \ k \in \mathbb{Z}\,;$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = \begin{cases} -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \quad ou \\ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{onde } \ k \in \mathbb{Z}\,.$$



Portanto, o conjunto solução da equação (5) será:

$$\Big\{ \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \ ; \ \ k \in \mathbb{Z} \Big\} \cup \Big\{ \pm\frac{2\pi}{3} + 2p\pi \ \ ; \ \ p \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

Agora, precisamos saber quais dessas soluções são soluções de $(*)$ pois para passar da equação $(*)$ para a equação (5) elevamos ambos os membros de $(*)$ ao quadrado, o que pode ter introduzido soluções estranhas a equação $(*)$.

Note que os ângulos da forma $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ tem seno positivo e cosseno negativo logo, não podem ser soluções de $(*)$. Por sua vez os ângulos da forma $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ também não podem ser soluções dessa equação pois possuem um seno negativo e um cosseno positivo.

Os outros ângulos, soluções de (5), possuem senos e cossenos com o mesmo sinal e portanto são soluções da equação $(*)$.

Em resumo, o conjunto solução da equação proposta inicialmente será:

$$\Big\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \ ; \ \ k \in \mathbb{Z} \Big\} \cup \Big\{ -\frac{2\pi}{3} + 2p\pi \ \ ; \ \ p \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

Agora que temos todas as solução, podemos determinar aquelas que estão no intervalo $[-2\pi\,, -\pi\,]$:

- as do conjunto $\Big\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \Big\}$ são: $-2\pi + \pi/3$ (correspondendo a $k = -1$)
- as do conjunto $\Big\{ -\frac{2\pi}{3} + 2p\pi \ ; \ p \in \mathbb{Z} \Big\}$ são: nenhuma.

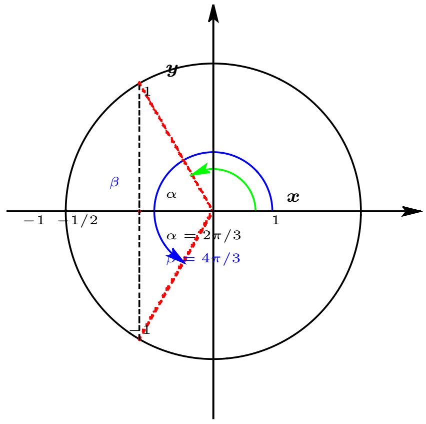
Nota: Observe que: $\sin x = \sqrt{3}\cos x \iff \tan x = \sqrt{3}$. Assim, resolver a equação $\sin x = \sqrt{3}\cos x$ é o mesmo que resolver a equação $\tan x = \sqrt{3}$ cuja solução é muito mais simples que aquela apresentada para a equação $\sin x = \sqrt{3}\cos x$.

(b) Passemos agora a solução da inequação

$$8\sin^2 x + 12\cos^2 x \le 9. \tag{3}$$

Usando as identidades dadas em (4) temos:

$$
\begin{aligned}
8\sin^2 x + 12\cos^2 x \le 9 \quad &\iff \quad 8 \times \frac{1-\cos(2x)}{2} + 12 \times \frac{1+\cos(2x)}{2} \le 9 \\
&\iff \quad 4 - 4\cos(2x) + 6 + 6\cos(2x) \le 9 \\
&\iff \quad 2\cos(2x) \le -1 \\
&\iff \quad \cos(2x) \le -1/2 \\
&\iff \quad 2x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big[\, \alpha + 2k\pi \,, \beta + 2k\pi \,\Big] \\
&\iff \quad 2x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big[\, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \,, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \,\Big] .
\end{aligned}
$$



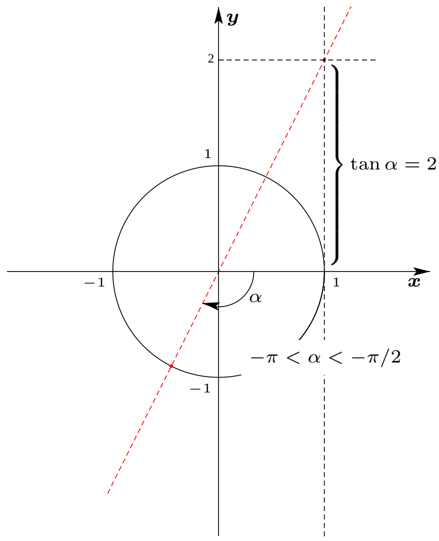
Consequentemente,

$$8\sin^2 x + 12\cos^2 x \le 9 \quad \iff \quad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big[\, \frac{\pi}{3} + k\pi \,, \frac{2\pi}{3} + k\pi \,\Big] .$$

31. Mostre, através de uma figura, que existe um ângulo com medida entre $-\pi\, rd$ e $-\pi/2\, rd$ cuja tangente vale 2. Calcule o cosseno e o seno desse ângulo.

    Indique na figura o que for necessário indicar para que ela se torne clara.

Solução: Consideremos o círculo trigonométrico e o eixo das tangentes como mostrados na figura ao lado. Marquemos o ponto 2 no eixo das tangentes e tracemos a reta que passa por esse ponto e pela origem do sistema de coordenadas. O ângulo α mostrado na figura tem sua medida compreendida entre $-\pi$ e $-\pi/2$ radianos. Além disso, sua tangente vale 2 por definição de tangente.
Essa construção mostra o que foi pedido na primeira parte da questão.
Da identidade $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$ segue que:



$$1 + 2^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \iff \quad 5 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \iff \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{5} .$$

Como α é um ângulo do terceiro quadrante, concluímos que

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{5}} \quad \text{ou seja} \quad \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} .$$

Da identidade $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ segue que

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} .$$

Novamente, como α é um ângulo do terceiro quadrante, obtemos:

$$\sin\alpha = -\sqrt{\frac{4}{5}} \quad \text{ou seja} \quad \sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} .$$

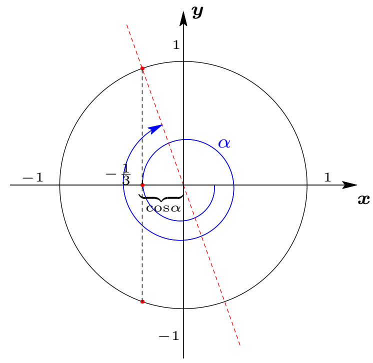
Esses cálculos respondem a segunda parte da questão.

32. Mostre, através de uma figura, que existe um ângulo com medida entre $-3\pi\, rd$ e $-7\pi/2\, rd$ cujo cosseno vale $-1/3$. Calcule o seno e a tangente desse ângulo.

    Indique na figura o que for necessário indicar, para que ela expresse suas idéias com clareza.

Solução: O ângulo α procurado deve satisfazer:

$$\alpha < -3\pi = -2\pi - \pi$$
$$\alpha > -\frac{7\pi}{2} = -\frac{6\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -3\pi - \frac{\pi}{2} = -2\pi - \pi - \frac{\pi}{2}\,.$$



Portanto, trata-se de um ângulo do segundo quadrante.
Para mostrar, graficamente, que tal ângulo existe, consideremos o círculo trigonométrico e marquemos no eixo das abcissas (eixo dos cossenos) o ponto $-1/3$. Por esse ponto, tracemos a reta vertical (paralela ao eixo das ordenadas). Tal reta intersecta o círculo trigonométrico em dois pontos. O ponto que possui ordenada positiva é extremidade de todos os arcos do segundo quadrante (com ponto inicial em $(1,0)$) cujo cosseno vale $-1/3$.
Agora, tracemos a reta passando por esse ponto e pela origem do sistema de coordenadas. O ângulo α procurado é mostrado na figura ao lado e tem sua medida compreendida entre $-7\pi/2$ e $-3\pi/2$ radianos. Além disso, seu cosseno vale $-1/3$ por definição de cosseno.
Essa construção mostra o que foi pedido na primeira parte da questão.

Da identidade $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ segue que:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \quad \Longleftrightarrow \quad \sin\alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}\,.$$

Como α é um ângulo do segundo quadrante, concluímos que

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,.$$

Da definição de tangente, segue que:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{(-1/3)} = -2\sqrt{2}\,.$$

Esses cálculos respondem a segunda parte da questão.

33. Considere a equação e a inequação dadas a seguir:

$$(*) \quad \tan\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{8x}\right) = 1 \qquad ; \qquad 1 - 2\sin\left(\frac{x}{3}\right) \geq 0 \quad (**)$$

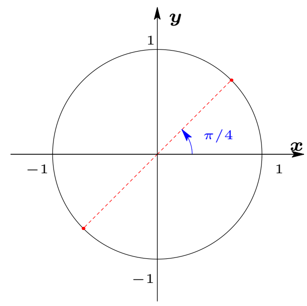
(a) Determine todas as soluções de $(*)$ e mostre que todas elas pertencem ao intervalo $[-1\,,1]$;
(b) Resolva a inequação $(**)$;
(c) Determine o domínio da expressão

$$\sqrt{x\sqrt{1 - 2\sin\left(\frac{x}{3}\right)}}\,.$$

Solução: Passemos a solução da equação $(*)$.

→ (a) Temos que

$$\tan\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{8x}\right) = 1 \iff \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8x} = \frac{\pi}{4} + k\pi \iff \frac{1}{8x} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} + k\pi$$
$$\iff \frac{1}{8x} = \frac{\pi}{8} + k\pi \iff \frac{1}{8x} = \frac{\pi + 8k\pi}{8}$$
$$\iff x = \frac{1}{\pi(1+8k)} \quad \text{onde} \quad k \in \mathbb{Z}$$



o que responde a primeira parte do item (a).
Além disso, temos que

$$-1 < \frac{1}{\pi(1+8k)} < 1 \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{Z}$$

já que o denominador da expressão acima satisfaz a condição

$$|\pi(1+8k)| > 1 \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{Z}$$

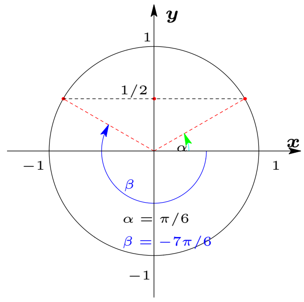
finalizando assim, a solução do item (a).

(b) Passemos agora a solução da inequação

$$1 - 2\sin\left(\frac{x}{3}\right) \geq 0\,.$$

Para resolvê-la, façamos:

$$\begin{aligned}
1 - 2\sin\left(\frac{x}{3}\right) \geq 0 \quad &\iff \quad \sin\left(\frac{x}{3}\right) \leq \frac{1}{2} \\
&\iff \quad \frac{x}{3} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big[\beta + 2k\pi \,, \alpha + 2k\pi\Big] \\
&\iff \quad \frac{x}{3} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \,, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\Big]
\end{aligned}$$



Consequentemente,

$$1 - 2\sin\left(\frac{x}{3}\right) \geq 0 \quad \iff \quad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big[-\frac{7\pi}{2} + 6k\pi \,, \frac{\pi}{2} + 6k\pi\Big]$$

o que responde o item (b) da questão.

O domínio da expressão

$$\sqrt{x\sqrt{1 - 2\sin\left(\frac{x}{3}\right)}}$$

é o conjunto dos números reais que satisfazem ao seguinte sistema de inequações

$$\begin{cases} 1 - 2\sin\left(\frac{x}{3}\right) \geq 0 \\ \hfill x \geq 0 \end{cases}$$

ou seja, é a parte positiva da solução da inequação $1 - 2\sin\big(x/3\big) \geq 0$.
Consequentemente, o domínio da expressão proposta é:

$$[\,0\,, \pi/2\,] \cup \left\{ \bigcup_{k\geq 1} \Big[-\frac{7\pi}{2} + 6k\pi \,, \frac{\pi}{2} + 6k\pi\Big] \right\}$$

já que para cada inteiro $k \leq -1$ temos que

$$\Big[-\frac{7\pi}{2} + 6k\pi \,, \frac{\pi}{2} + 6k\pi\Big] \subset (-\infty\,, 0\,)$$

e para $k = 0$ temos o intervalo $[-7\pi/2\,, \pi/2\,]$.

34. Esboce os gráficos das seguintes expressões:

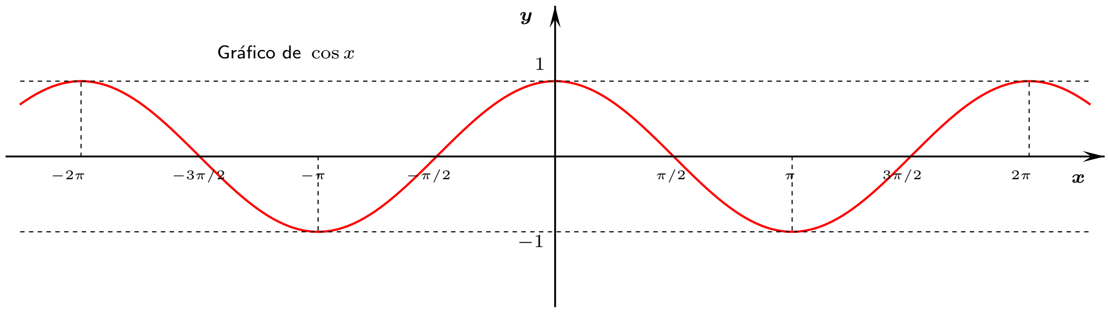
(a) $\cos x$ e $2 + \cos x\,;$

(b) $\cos x$ e $\cos\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)\,;$

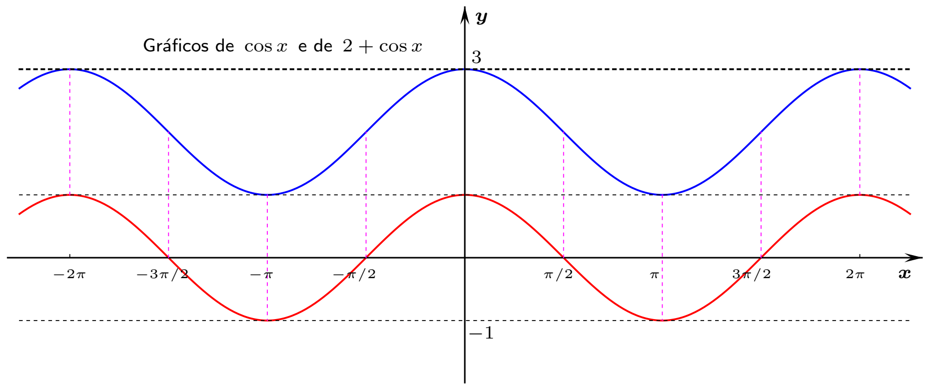
(c) $\cos x$ e $\cos|x|$.

Em cada item, faça os dois gráficos num mesmo quadro. Para itens distintos use quadros distintos.

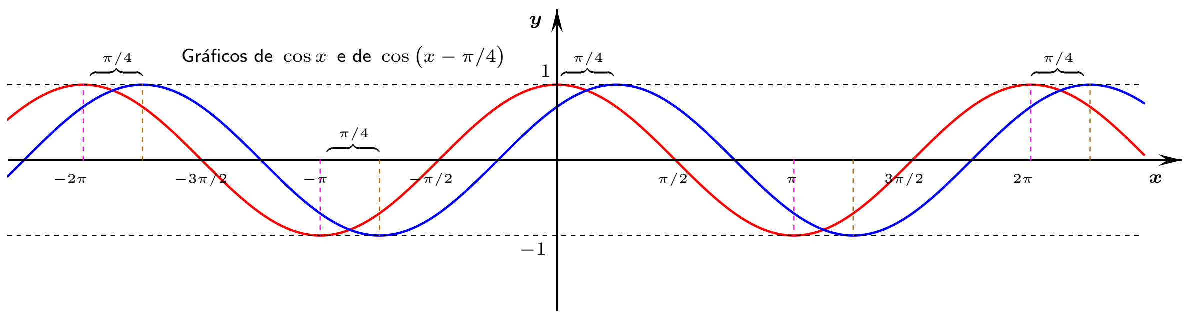
Solução: Vamos construir os gráficos solicitados a partir do gráfico da expressão $\cos x$ mostrado a seguir:



➙ (a) O gráfico de $2 + \cos x$ é obtido transladando verticalmente de 2 o gráfico do cosseno. Isso é mostrado no quadro a seguir onde apresentamos os gráficos das expressões $\cos x$ (em vermelho) e $2 + \cos x$ (em azul).



➙ (b) O gráfico da expressão $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ é obtido transladando de $\pi/4$ o gráfico de $\cos x$ na direção do eixo das abcissas. No quadro abaixo mostramos os gráficos de $\cos x$ (em vermelho) e de $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (em azul).



➙ (c) Note que

$$\cos|x| = \begin{cases} \cos x & \text{quando} \quad x \geq 0 \\ \cos(-x) & \text{quando} \quad x \leq 0 \end{cases} \iff \cos|x| = \begin{cases} \cos x & \text{quando} \quad x \geq 0 \\ \cos x & \text{quando} \quad x \leq 0 \end{cases} \iff \cos|x| = \cos x$$

para todo número real x.

Consequentemente, o gráfico da expressão $\cos|x|$ coincide com o da expressão $\cos x$.

35. Considere a equação e a inequação dadas a seguir:

$$(*) \quad 2\sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{1}{x}\right) = -\sqrt{3} \qquad ; \qquad (**) \quad \tan\left(\frac{2x}{5}\right) \geq 1$$

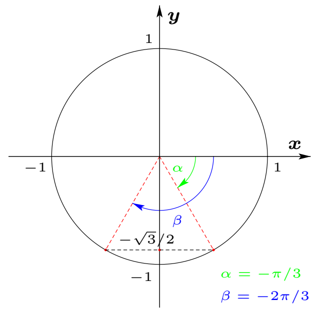
(a) Determine todas as soluções de $(*)$;

(b) Resolva a inequação $(**)$.

Solução: Passemos a solução da equação $(*)$.

➙ (a) Temos que:

$$
\begin{aligned}
2\sin\left(\frac{\pi}{9}+\frac{1}{x}\right) = -\sqrt{3} \quad &\iff \quad \sin\left(\frac{\pi}{9}+\frac{1}{x}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\iff \quad \frac{\pi}{9}+\frac{1}{x} = \begin{cases} -\pi/3+2k\pi \\ \text{ou} \\ -2\pi/3+2k\pi \end{cases} \qquad \text{onde} \quad k\in\mathbb{Z} \\
&\iff \quad \frac{1}{x} = \begin{cases} -4\pi/9+2k\pi \\ \text{ou} \\ -7\pi/9+2k\pi \end{cases} \qquad \text{onde} \quad k\in\mathbb{Z} \\
&\iff \quad \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{(18k-4)\pi}{9} \\ \text{ou} \\ \frac{(18k-7)\pi}{9} \end{cases} \qquad \text{onde} \quad k\in\mathbb{Z} \\
&\iff \quad x = \begin{cases} \frac{9}{(18k-4)\pi} \\ \text{ou} \\ \frac{9}{(18k-7)\pi} \end{cases} \qquad \text{onde} \quad k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}
$$



o que responde o item (a).

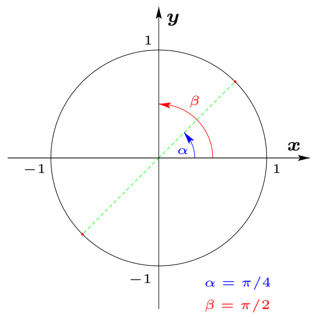
Note que o denominador não se anula para nenhum valor de $k\in\mathbb{Z}$.

➙ (b) Passemos agora a solução da inequação

$$\tan\left(\frac{2x}{5}\right) \geq 1\,.$$

Para resolvê-la, podemos fazer:

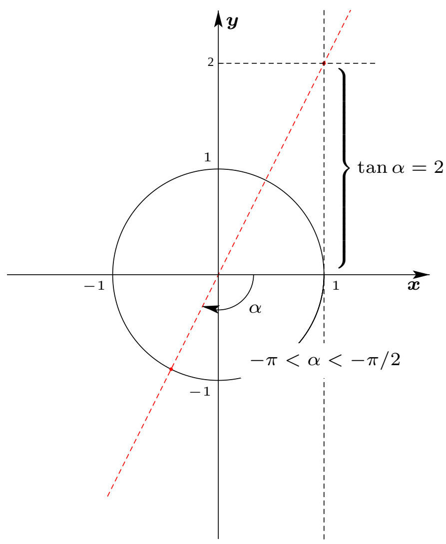
$$
\begin{aligned}
\tan\left(\frac{2x}{5}\right) \geq 1 \quad &\iff \quad \frac{2x}{5} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\,\frac{\pi}{4}+k\pi\,,\,\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \\
&\iff \quad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\,\frac{5\pi}{8}+\frac{5k\pi}{2}\,,\,\frac{5\pi}{4}+\frac{5k\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$



36. Mostre, através de uma figura, que existe um ângulo com medida entre $-\pi\,rd$ e $-\pi/2\,rd$ cuja tangente vale exatamente 2. Calcule o cosseno e o seno desse ângulo.

Indique na figura o que for necessário indicar para que ela se torne clara.

Solução: Consideremos o círculo trigonométrico e o eixo das tangentes como mostrados na figura ao lado. Marquemos o ponto de abcissa 2 no eixo das tangentes e tracemos a reta que passa por esse ponto e pela origem do sistema de coordenadas. O ângulo α mostrado na figura tem sua medida compreendida entre $-\pi$ e $-\pi/2$ radianos. Além disso, sua tangente vale 2 por definição de tangente. Essa construção mostra o que foi pedido na primeira parte da questão. Da identidade $1+\tan^2\alpha = \sec^2\alpha$ segue que:



$$1+2^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \iff \quad 5 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \iff \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{5}\,.$$

Como α é um ângulo do terceiro quadrante, concluímos que

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{5}} \quad \text{ou seja,} \quad \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

Da identidade $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$ segue que

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\frac{1}{5} = \frac{4}{5}\,.$$

Novamente, como α é um ângulo do terceiro quadrante, obtemos:

$$\sin\alpha = -\sqrt{\frac{4}{5}} \quad \text{ou seja} \quad \sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Esses cálculos respondem a segunda parte da questão.

37. Considere a equação e a inequação dadas a seguir:

$$(*) \quad \sin x = \sqrt{3}\cos x \qquad ; \qquad 8\sin^2 x + 12\cos^2 x \le 9 \quad (**)\,.$$

(a) Determine todas as soluções de $(*)$ e explicite aquelas que estão no intervalo $[-2\pi\,,-\pi\,]$;

(b) Resolva $(**)$ usando as identidades trigonométricas

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad \text{e} \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}. \tag{4}$$

Solução: Passemos a solução da equação $(*)$.

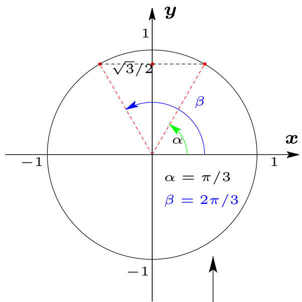
→ **(a)** Para resolver a equação $(*)$ elevamos ambos os membros ao quadrado e obtemos a seguinte equação:

$$\sin^2 x = 3\cos^2 x\,. \tag{5}$$

Resolvendo-a, obtemos:

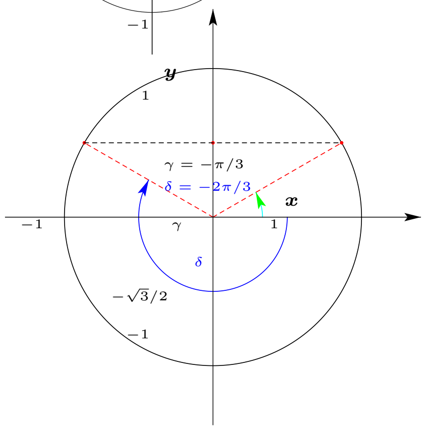
$$\begin{aligned} \sin^2 x = 3\cos^2 x \quad &\iff \quad \sin^2 x = 3(1-\sin^2 x) \quad \iff \quad \sin^2 x = 3 - 3\sin^2 x \\ &\iff \quad 4\sin^2 x = 3 \quad \iff \quad \sin^2 x = 3/4 \quad \iff \quad \sin x = \pm\sqrt{3}/2\,. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que



$$\text{(ai)} \ \sin x = \sqrt{3}/2 \quad \iff \quad x = \begin{cases} \alpha + 2k\pi \\ \quad ou \\ \beta + 2k\pi \end{cases} \quad \text{onde } k \in \mathbb{Z}\,;$$

$$\iff \quad x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \quad ou \\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{onde } k \in \mathbb{Z}\,.$$



$$\text{(aii)} \ \sin x = -\sqrt{3}/2 \quad \iff \quad x = \begin{cases} \gamma + 2k\pi \\ \quad ou \\ \delta + 2k\pi \end{cases} \quad \text{onde } k \in \mathbb{Z}\,;$$

$$\iff \quad x = \begin{cases} -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \quad ou \\ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{onde } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Portanto, o conjunto solução da equação (5) será:

$$\Big\{ \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \ ; \ \ k \in \mathbb{Z} \Big\} \cup \Big\{ \pm\frac{2\pi}{3} + 2p\pi \ \ ; \ \ p \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

Agora, precisamos saber quais dessas soluções são soluções de $(*)$ pois para passar da equação $(*)$ para a equação (5) elevamos ambos os membros de $(*)$ ao quadrado, o que pode ter introduzido soluções estranhas a equação $(*)$. Note que os ângulos da forma $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ tem seno positivo e cosseno negativo logo, não podem ser soluções de $(*)$. Por sua vez os ângulos da forma $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ também não podem ser soluções dessa equação pois possuem um seno negativo e um cosseno positivo.

Os outros ângulos, soluções de (5), possuem senos e cossenos com o mesmo sinal e portanto são soluções da equação $(*)$.

Em resumo, o conjunto solução da equação proposta inicialmente será:

$$\Big\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \ ; \ \ k \in \mathbb{Z} \Big\} \cup \Big\{ -\frac{2\pi}{3} + 2p\pi \ \ ; \ \ p \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

Agora que temos todas as solução, podemos determinar aquelas que estão no intervalo $[-2\pi\,,-\pi\,]$:

- as do conjunto $\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \;\;;\;\; k \in \mathbb{Z}\right\}$ são : $-2\pi + \pi/3$ (correspondendo a $k = -1$)
- as do conjunto $\left\{-\frac{2\pi}{3} + 2p\pi \;\;;\;\; p \in \mathbb{Z}\right\}$ são : nenhuma.

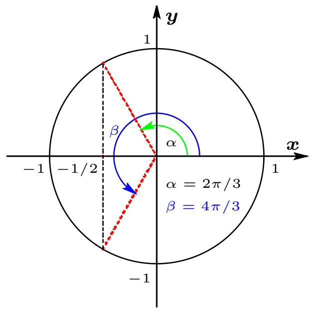
Nota: Observe que: $\sin x = \sqrt{3}\cos x \iff \tan x = \sqrt{3}$. Assim, resolver a equação $\sin x = \sqrt{3}\cos x$ é o mesmo que resolver a equação $\tan x = \sqrt{3}$ cuja solução é muito mais simples que aquela apresentada para a equação $\sin x = \sqrt{3}\cos x$.

➙ (b) Passemos agora a solução da inequação

$$8\sin^2 x + 12\cos^2 x \leq 9. \tag{6}$$

Usando as identidades dadas em (4) temos:

$$\begin{aligned}
8\sin^2 x + 12\cos^2 x \leq 9 \quad &\iff \quad 8 \times \frac{1-\cos(2x)}{2} + 12 \times \frac{1+\cos(2x)}{2} \leq 9 \\
&\iff \quad 4 - 4\cos(2x) + 6 + 6\cos(2x) \leq 9 \\
&\iff \quad 2\cos(2x) \leq -1 \\
&\iff \quad \cos(2x) \leq -1/2 \\
&\iff \quad 2x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big[\, \alpha + 2k\pi \,, \beta + 2k\pi \,\Big] \\
&\iff \quad 2x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big[\, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \,, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \,\Big].
\end{aligned}$$



Consequentemente,

$$8\sin^2 x + 12\cos^2 x \leq 9 \quad \iff \quad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big[\, \frac{\pi}{3} + k\pi \,, \frac{2\pi}{3} + k\pi \,\Big].$$

LISTA 8

1. Quando o sol está a $60°$ acima do horizonte, qual é o comprimento da sombra projetada no solo por um edifício de $27m$ de altura?

2. Um avião voando a uma velocidade constante de 360 km/h, subindo a um ângulo de $30°$, passa por um ponto P que está no solo, a uma altura de 12km. Determine a distância de P ao avião, 1 minuto após o avião passar sobre o ponto P.

3. Para determinar a largura aproximada de um rio, sem atravessá-lo, um engenheiro procedeu da seguinte maneira:

   - construiu um plano vertical imaginário contendo uma reta horizontal na direção perpendicular ao rio e de forma que mirando o topo de uma árvore na margem oposta, esse topo seja um ponto P do plano vertical.
   - de um ponto A da margem, na direção da mesma perpendicular ao rio, avistou o topo P da árvore sob um ângulo de $38°$ com a horizontal.
   - recuando $15m$ na mesma direção perpendicular ao rio, até um ponto B, visou novamente o topo da árvore, registrando $26°$ com a horizontal.

   Com esses dados ele fez os cálculos necessários. Qual a largura do rio?

4. Uma esfera de raio r é colocada no interior de uma cavidade cônica. sabe-se que o raio da base da cavidade é $5\,cm$ e o ângulo entre as geratrizes da cavidade situadas em um plano vertical à essa cavidade é de $60°$.

   (a) Calcular a distância aproximada do centro da esfera de raio r ao vértice do cone, se $r = 4\,cm$.

   (b) Qual deve ser, aproximadamente, o raio da esfera para que o topo da mesma seja o centro da base do cone?

5. Calcule o valor da expressão $y = \dfrac{\tan x + \cot x}{\sec x + \csc x}$, sabendo que $\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{2}{3}$.

6. Calcule o valor da expressão $y = \operatorname{sen}(2x)$ se $\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad 0 \le x \le \pi$.

7. Calcule o valor de y, se $y = \cos 75° + \cos 15°$.

8. Determine m para que exista x, em cada caso:

   (a) $\cos x = m^2 - 8$ (b) $\cos x = \dfrac{3-7m}{4}$ (c) $2\operatorname{sen} x + 1 = m$

9. Prove que cada identidade é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$:

   (a) $\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x + \cos 2x = 0$ (b) $(\cos x + \operatorname{sen} x)^2 + (\cos(-x) + \operatorname{sen}(-x))^2 = 2$

10. Simplique as expressões:

    (a) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(\pi + x)}{\operatorname{sen}(\pi - x) \cdot \cos(x - 2\pi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$ (b) $\dfrac{\tan x + \cot x}{\csc^2 x}$

11. Resolva e marque a solução no círculo trigonométrico.

    (a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
    (b) $\cos x - 4\cos^5 x = 0$
    (c) $|\operatorname{sen} x - 1| = \frac{1}{2}$
    (d) $2\operatorname{sen}^2 x - 3\cos x - 3 = 0$
    (e) $2\cos^3\theta + 6\cos\theta - \cos^2\theta - 3 = 0$
    (f) $2\operatorname{sen} x - \cos x = 1$
    (g) $\frac{-1}{2} \le \operatorname{sen} x \le \frac{1}{2}$
    (h) $2\cos^2 x - \cos x < 0$
    (i) $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
    (j) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 4x = 0$
    (k) $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} x} \ge \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, para $0 < x < 2\pi,\ x \ne \frac{\pi}{2}, \pi$
    (l) $4\operatorname{sen} x < \dfrac{1}{\cos x}$, para $0 \le x \le 2\pi,\ x \ne \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

(m) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} x - 1} > 0$,
para $0 \leq x \leq 2\pi,\ x \neq \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

(n) $|\cos 4x| = 1$

(o) $]2\operatorname{sen} x|\operatorname{sen} x| - 1 \leq 0$

12. Esboce os gráficos passo a passo.

(a) $f(x) = |\cos x - \frac{1}{2}|$
(b) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4}),\ 0 \leq x \leq 2\pi$
(c) $f(x) = \operatorname{sen}(2x - \pi)$
(d) $f(x) = -3\operatorname{sen}|x|$
(e) $f(x) = |\tan(x - \frac{\pi}{4}) - 1|$
(f) $f(x) = |\cos(\pi - x)| - 1$
(g) * $f(x) = 5\operatorname{sen} x \cos x,\ 0 \leq x \leq 2\pi$
(h) * $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2},\ -\pi \leq x \leq \pi$
(i) *$f(x) = \sqrt{1 - \cos^2(\frac{x}{2})}$
(j) $f(x) = 2\arctan(x + 1)$

*Use primeiro alguma identidade trigonométrica.

13. Calcule:

(a) $\operatorname{arcsen}(\frac{\sqrt{3}}{2})$ (b) $\arctan(-1)$ (c) $\arccos(-1)$

14. Prove que $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2},\ \forall x \in [-1, 1]$.

15)Determine o domínio das funções

a) $f(x) = \dfrac{1 - \dfrac{1}{x}}{4\operatorname{sen} x \cos x - 1}$.

b) $f(x) = \sqrt{2\operatorname{sen}^2 x - 1}$

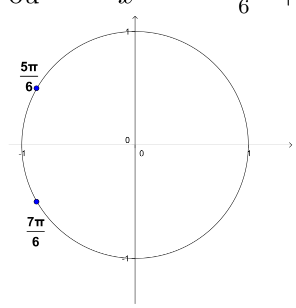
c) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 2x} + \dfrac{x}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\operatorname{sen} x}}$

RESPOSTAS DA LISTA 8 - Trigonometria

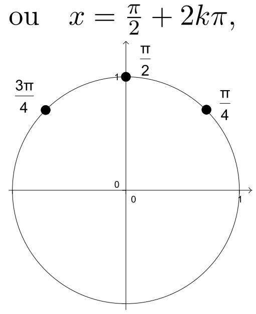
1. $9\sqrt{3}\ m$
2. $h = 6\sqrt{7}\,km$
3. $25,34\,m$
4. (a) $8\,cm$ (b) $\frac{5\sqrt{3}}{2}\,cm$
5. $\frac{3}{2}$
6. $-\frac{2}{3}$
7. $\frac{\sqrt{6}}{2}$
8. (a) $-3 \leq m \leq -\sqrt{7}$
   ou $\sqrt{7} \leq m \leq 3$
   (b) $1 \leq m \leq \dfrac{11}{3}$
   (c) $-1 \leq m \leq 3$

10. (a) $\cot x$ (b) $\tan x$

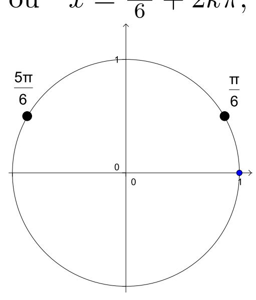
11. (a) $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
    ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



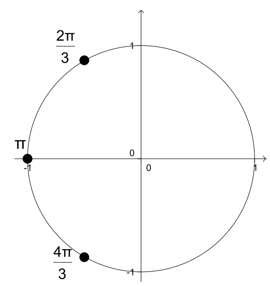
(b) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
ou $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



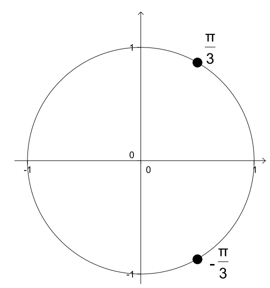
(c) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



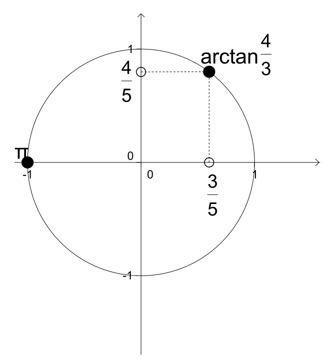
(d) $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
ou $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
ou $x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



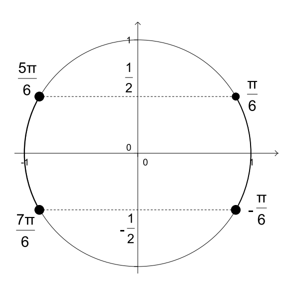
(e) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



(f) $x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
ou $x = \arctan\frac{4}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

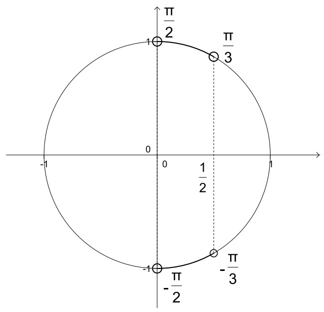


(g) $-\frac{\pi}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
ou $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



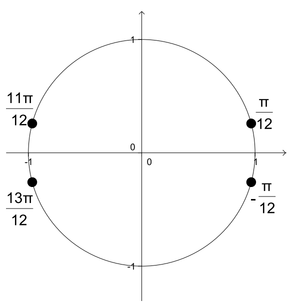
(h) $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

ou $\quad \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



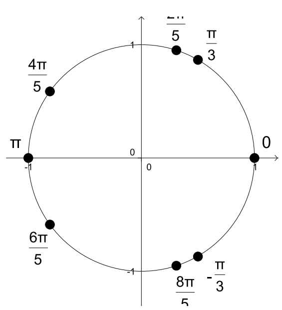
(i) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

ou $\quad x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

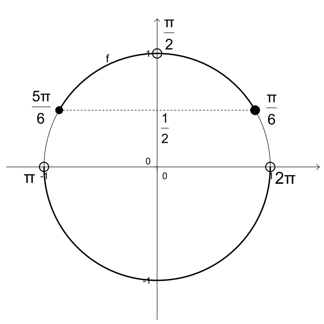


(j) $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

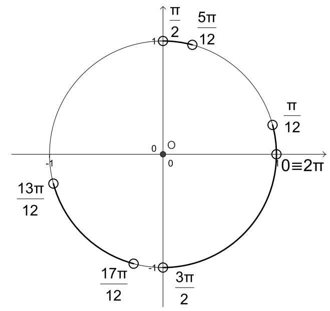
ou $\quad x = \dfrac{2k\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}$



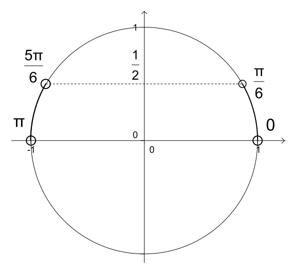
(k) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup (\pi, 2\pi)$



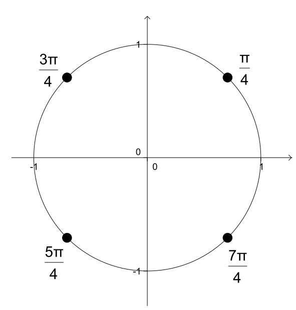
(l) $\left(0, \frac{\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$



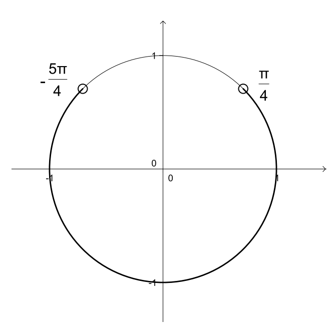
(m) $\left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$



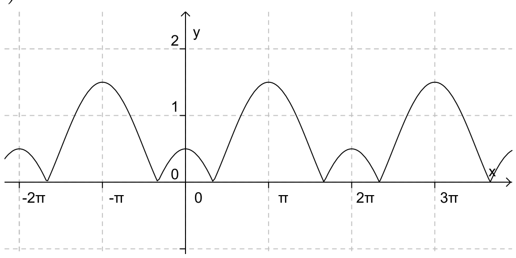
(n) $x = \frac{k\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$



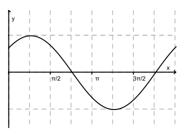
(o) $-\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



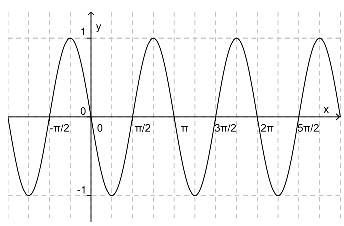
12. (a)



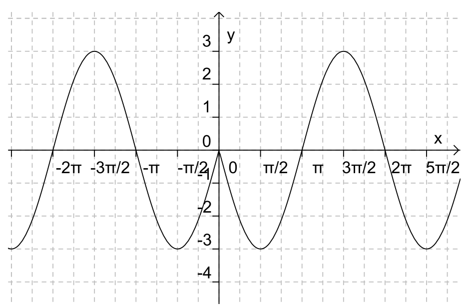
(b)



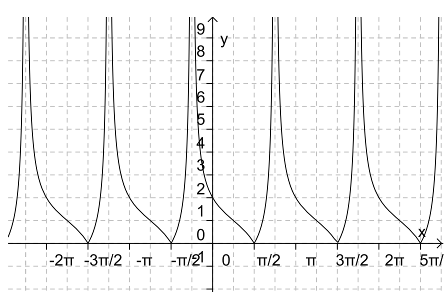
(c)



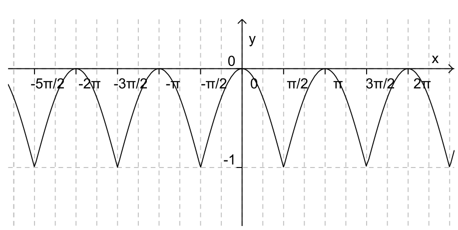
(d)



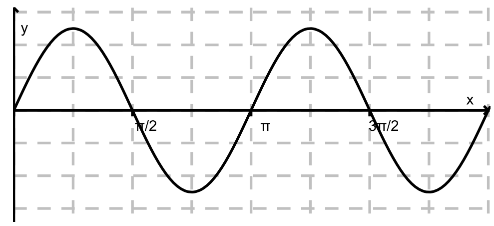
(e)



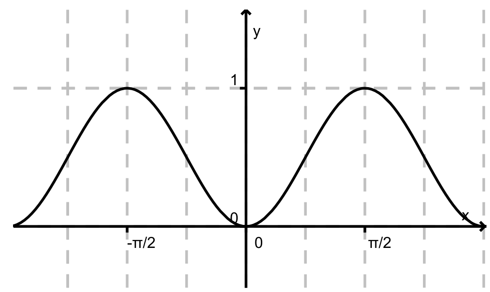
(f)



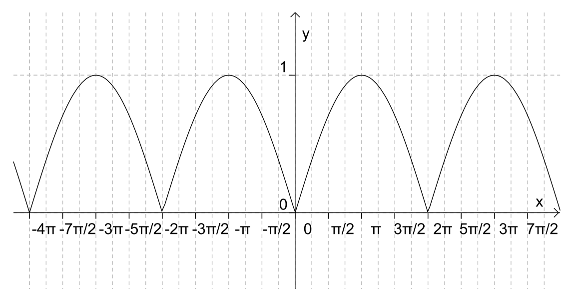
(g)



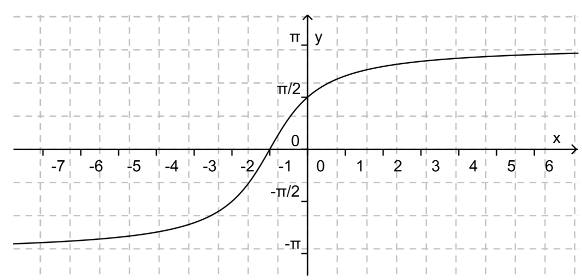
(h)



(i)



(j)



13. (a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $-\frac{\pi}{4}$ (c) π

14. Queremos calcular $\cos(\operatorname{arcsen} x)$.

Considere $\theta = \operatorname{arcsen} x$.

Nesse caso, sabemos que

$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad \cos\theta \ge 0, \quad x = \operatorname{sen}\theta.$

Queremos calcular $\cos\theta$. Mas,

$\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta \Longrightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}.$

Como $\cos\theta \ge 0$, $\cos\theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$

Como $x = \operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta = \sqrt{1 - x^2}$,

Como $\theta = \operatorname{arcsen} x$, $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}$.