Aula 10

Trigonometria

Metas

Nesta aula vamos relembrar o teorema de Pitágoras, introduzir e aplicar as importantes razões trigonométricas, obtidas a partir dos lados de um triângulo retângulo.

Objetivos

Ao final desta aula você deve:

- conhecer e aplicar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente;
- conhecer relações importantes entre as razões trigonométricas;
- resolver equações e inequações trigonométricas;
- conhecer as leis dos senos e dos cossenos;

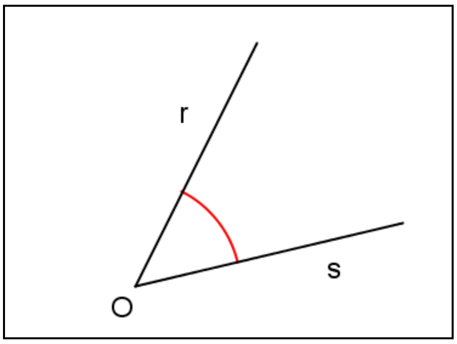
Introdução à Trigonometria

A palavra Trigonometria tem origem grega e seu significado está ligado às medidas de um triângulo (trigonos: triângulo e metrein: medidas). É a área da Matemática onde se estuda as relações existentes entre os lados e os ângulos de um triângulo. Ela surgiu devido às necessidades da Astronomia, para calcular o tempo e se desenvolveu na Geografia e Navegação. Os estudos iniciais estão relacionados aos povos babilônicos e egípcios, sendo desenvolvidos pelos gregos e indianos. Através da prática, conseguiram criar situações de medição de distâncias inacessíveis. Hiparco de Niceia , que viveu em cerca de 120 a.C , considerado o fundador da Trigonometria, foi um astrônomo grego, que introduziu a Trigonometria como ciência. Por meio de estudos ele implantou as relações existentes entre os elementos do triângulo. O Teorema de Pitágoras possui papel importante no desenvolvimento dos estudos trigonométricos, pois é através dele que desenvolvemos fórmulas teóricas comumente usadas nos cálculos relacionados a situações práticas cotidianas.

Mais tarde, por volta do século XVI, apareceu o primeiro gráfico de uma função trigonométrica, a curva *seno*. Posteriormente ao desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, pelos cientistas Isaac Newton e Leibniz, a Trigonometria ganhou moldes definitivos no cenário da Matemática, pois as funções trigonométricas estão associadas a fenômenos ondulatórios, sendo constantemente empregadas em outras ciências, como Medicina, Engenharia, Física, Química, Biologia, entre outras.

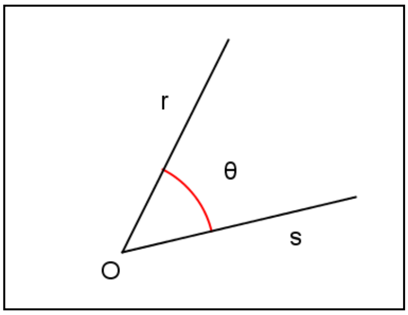
Ângulos

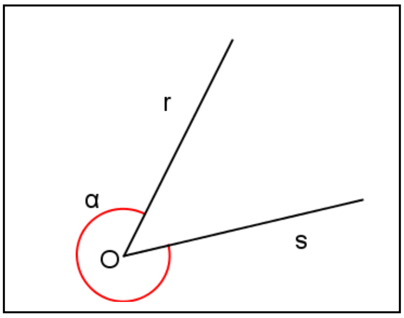
Um ângulo é caracterizado por um par de semirretas de origem no mesmo ponto.



- *O é o vértice do ângulo*
- *r e s as semirretas que formam os lados do ângulo*
- *rôs o ângulo marcado pelo arco*

Também denotamos o *ângulo* por *O*, *usando* o vértice, quando não há ambiguidade, ou marcamos o ângulo e usamos uma letra $(\alpha, \theta, \gamma, ..)$, conforme as figuras abaixo.



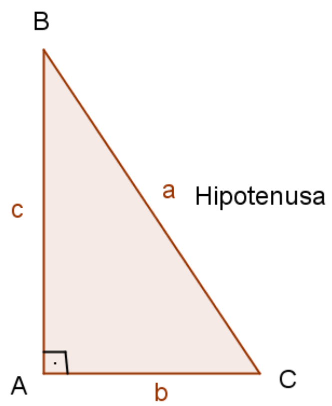


Podemos medir ângulos em graus (sistema sexagesimal), onde dividimos o ângulo de uma volta em 360 partes iguais e 1 grau corresponde a uma porção dessa divisão. Portanto, o ângulo de uma volta em graus corresponde a 360º, meia volta 180º, um quarto de volta 90º e assim por diante. Diz-se que o *ângulo é reto* se sua medida em graus for igual a 90º, será *agudo* se for menor do que 90º e será *obtuso* quando for maior do que 90º.

O grau admite dois submúltiplos, o *minuto* definido por $1' = \frac{1°}{60}$ e o *segundo* definido por $1'' = \frac{1'}{60} = \frac{1°}{3600}$.

Elementos do Triângulo Retângulo

Todo triângulo retângulo apresenta um ângulo reto e dois agudos. O triângulo *ABC* da figura abaixo é retângulo em *A*.



Usaremos as letras maiúsculas dos vértices para denotar também os ângulos internos correspondentes e as letras minúsculas *a*,*b*,*c* para denotar os lados opostos aos ângulos *A*,*B*,*C*, respectivamente, e também as medidas dos lados. Assim, temos *A=90º* e

B+C=90º, pois a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180º. Os nomes *cateto* e *hipotenusa* são usados apenas nos triângulos retângulos, no nosso caso, a *hipotenusa é a*, o lado oposto ao ângulo reto, e os demais lados b e c são ditos catetos. Para os triângulos retângulos vale o importante *teorema de Pitágoras*:

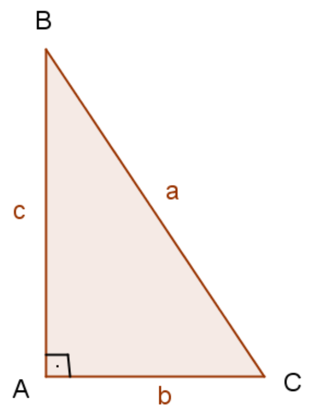
Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos: $a^2 = b^2 + c^2$.

Atividade1:

1) A hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a $2x$ e os catetos 2 e $\sqrt{x}$. Detemine a medida da hipotenusa.
2) Mostre que o único triângulo retângulo cujos lados são inteiros consecutivos possui lados medindo 3,4 e 5.
3) Calcule as medidas dos lados de um triângulo retângulo isósceles cujo perímetro é igual a $6\sqrt{2}$.

Razões trigonométricas importantes no triângulo retângulo

Para um ângulo agudo de um triângulo retângulo, definimos as importantes razões *seno, cosseno e tangente.*



senC = $\frac{c}{a}$ *(Lê-se : seno de C é o cateto oposto dividido pela hipotenusa)*

cosC = $\frac{b}{a}$ *(Lê-se: cosseno de C é o cateto adjacente dividido pela hipotenusa)*

tgC = $\frac{c}{b}$ *(Lê-se: tangente de C é o cateto oposto dividido pelo cateto adjacente)*

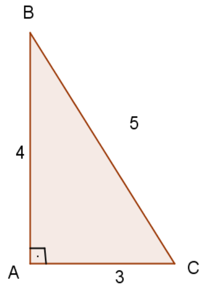
Observe que tgC = $\frac{sen\ C}{\cos C}$.

Outras razões importantes são a cossecante, secante e cotangente, onde

$secC = \frac{1}{cosC}$, $cossecC = \frac{1}{senC}$ e $cotgC = \frac{1}{tgC}$.

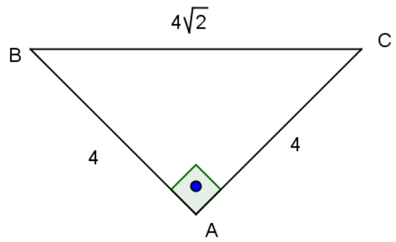
Exemplo1:

1)Dê o valor de senC , cosC e tgC para o triângulo retângulo abaixo.



Solução: Pela definição senC = $\frac{4}{5}$, cosC = $\frac{3}{5}$ e $tgC = \frac{4}{3}$.

2) Calcule $senB$, $cosB$ e determine o valor de $cos^2B + sen^2B$.



Solução:

$cosB = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $senB = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $cos^2B + sen^2B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1.$

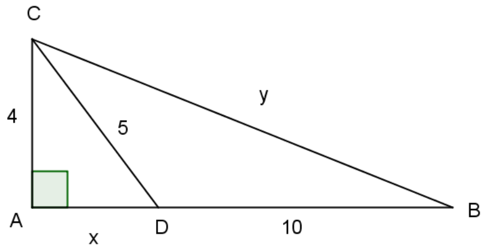
3)Num triângulo retângulo de hipotenusa $2\sqrt{5}$, a soma dos catetos é 6. Calcule o cosseno do menor ângulo do triângulo.

Solução: Vamos denotar um cateto por *x* e o outro será *6-x*, já que, por hipótese, a soma dos catetos é 6. Pelo teorema de Pitágoras, segue que $(2\sqrt{5})^2 = x^2 + (6-x)^2 \Leftrightarrow$ $20 = x^2 + 36 - 12x + x^2 \Leftrightarrow 20 = 2x^2 - 12x + 36 \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 16 = 0 \Leftrightarrow$ $x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2 ou\ x = 4$. Portanto, as dimensões do triângulo são 2,4 e $2\sqrt{5}$. O menor ângulo α do triângulo é formado pela hipotenusa e o cateto de medida 4, logo $cos\alpha = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

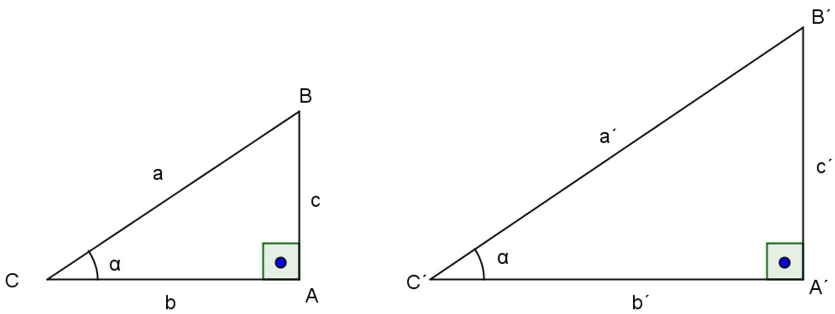
Atividade2:

1) Num triângulo ABC, retângulo em A, a hipotenusa é a=25cm e cosB=0,96. Calcule o perímetro do triângulo.

2) Num triângulo ABC, retângulo em A, temos b=4cm e a-c=2cm. Calcule tgC, sendo os lados a , b e c opostos, respectivamente, A , B e C.
3) Calcule os valores de $x\ e\ y$ da figura.



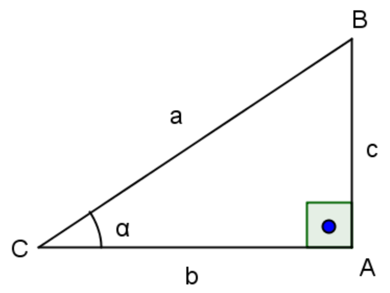
Caro leitor, nesse ponto devemos refletir um pouco sobre as razões introduzidas. As seis razões trigonométricas, seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente não dependem do "tamanho do triângulo retângulo"; elas dependem apenas da medida do ângulo. De fato, dois triângulos retângulos com um ângulo agudo de mesma medida são semelhantes.



Portanto, de acordo com as figuras acima, temos por semelhança que $\frac{a}{a´} = \frac{c}{c´} \Rightarrow \frac{c´}{a´} = \frac{c}{a} \Rightarrow senC = senC´$ e de $\frac{a}{a´} = \frac{b}{b´} \Rightarrow \frac{b´}{a´} = \frac{b}{a} \Rightarrow cosC = cosC´$. Daí, segue que os valores da tangente, cotangente, secante e cossecante só dependem da medida α do ângulo.

OBS: Pela figura acima, vemos que $sen(90° - \alpha) = \frac{b}{a} = cos\alpha,\ tg(90° - \alpha) = \frac{b}{c} = cotg\alpha$, $\sec(90° - \alpha) = \frac{a}{c} = cossec\alpha$ *, o que justifica os nomes das razões(cosseno de* α *é seno do complementar de* α *e assim por diante*).

No exemplo1 exercício 2 acima, verificamos que a soma dos quadrados do seno e do cosseno do mesmo ângulo B é igual a 1. Abaixo, vamos mostrar que, na verdade, essa relação é verdadeira para qualquer ângulo α agudo e mais tarde vamos estendê-la a um ângulo qualquer. Considere o triângulo retângulo ABC.



De fato, pelo teorema de Pitágoras sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$, mas como $sen\alpha = \frac{c}{a}$ e $cos\alpha = \frac{b}{a}$, temos que $c = a\ sen\ \alpha$ e $b = a\ cos\alpha$, logo

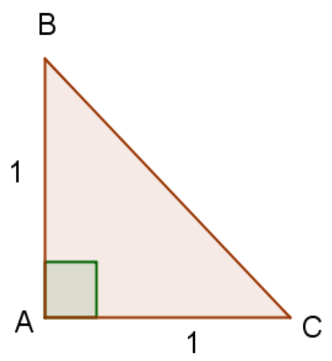
$$a^2 = (acos\alpha^2) + (asen\alpha)^2 \Longrightarrow a^2 = a^2cos^2\alpha + a^2sen^2\alpha \Longrightarrow$$
$$cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$$

Assim, temos a *Identidade Trigonométrica Fundamental:*

$$\boxed{cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1}$$

Ângulos Notáveis

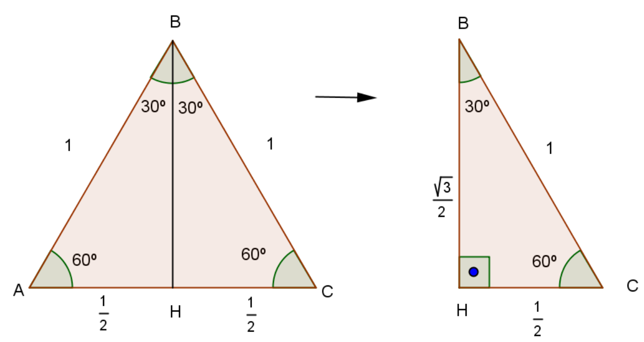
A) 45º



No triângulo retângulo isósceles ao lado, os catetos medem 1, a hipotenusa $\sqrt{2}$ e os ângulos agudos 45º. Logo, *sen45º*$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, *cos45º* $= \frac{\sqrt{2}}{2}$ *e tg45º=1.*

B)

30º e 60º



Dividimos o triângulo equilátero de lado 1, tomamos a altura BH(que também é bissetriz de B) e formamos um triângulo retângulo, cujos ângulos agudos medem 30º e 60º, conforme a figura acima. De acordo com o triângulo retângulo HBC, temos que

$sen30° = cos60° = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$,

$cos30° = sen60° = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$tg30° = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$tg60° = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$.

Os valores acima são precisos. Para os demais ângulos pode-se usar alguma identidade trigonométrica para o cálculo das razões trigonométricas ou ainda podemos aproximar esses valores usando ferramentas matemáticas mais sofisticadas. As calculadoras científicas, em geral, nos dão valores aproximados para essas razões. Porém, podemos fazer aproximações, ainda que grosseiras, usando um transferidor e uma régua. Observe o próximo exemplo.

Exemplo2:

Com o auxílio de uma régua e um transferidor, vamos aproximar os valores de sen25°, cos25° e tg25°.

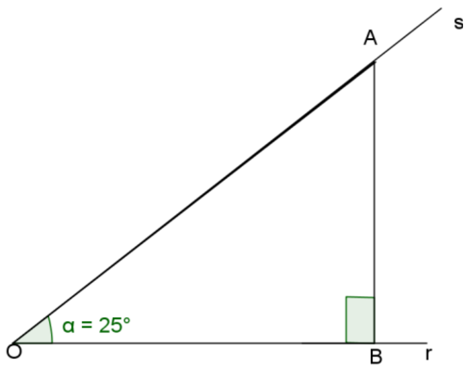
Solução:

Desenhamos com o auxílio de um transferidor um ângulo rÔs de 25º. Marcamos A em s, tal que AO=10cm. A seguir traçamos AB perpendicular a r e medimos com a régua AB≅4,3cm e OB≅9,1cm. Temos, então :

$sen25º = \frac{AB}{OA} \cong \frac{4,3}{10} = 0,43$,

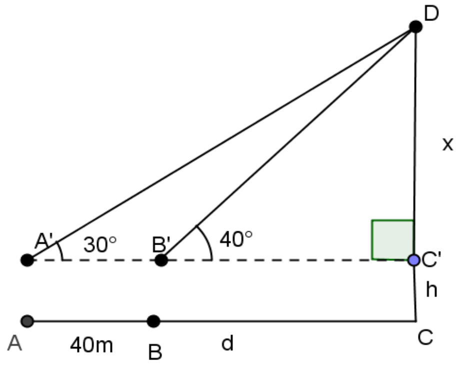
$cos25º = \frac{OB}{OA} \cong \frac{9,1}{10} = 0,91$,

$tg25º = \frac{AB}{OB} \cong \frac{4,3}{9,1} \cong 0,47$.



Exemplo3: Um observador em A vê uma torre vertical CD sob um ângulo de 30° e caminhando até B passa a vê-la sob 40°. Dados AB=40 e a altura do observador h=1,70m, calcule, aproximada-mente, a altura da torre $x + h$ e a que distância d ela se encontra do observador. Suponha

$sen40° \cong 0,64, cos40° \cong 0,77$ e $tg40° \cong 0,84$.



Solução: No triângulo retângulo B´C´D, temos $tg40° = \frac{C'D}{B'C'} = \frac{x}{d}$.

No triângulo retângulo A´C´D, temos $\frac{\sqrt{3}}{3} = tg30° = \frac{C'D}{A'C'} = \frac{x}{40+d}$. Logo,

$d\,tg40° = x$ e $x = \frac{\sqrt{3}}{3}(40+d) \Rightarrow d\,tg40° = \frac{\sqrt{3}}{3}(40+d) \Rightarrow d\left(tg40° - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{40\sqrt{3}}{3}$

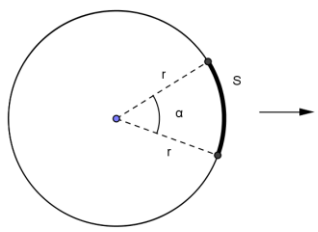
$\Rightarrow d = \frac{40\sqrt{3}}{3tg40°-\sqrt{3}}$ ≅87,9 m. Portanto, $x = d.tg40° \cong 73{,}08m$ e a altura da torre é aproximadamente 74,8m.

Atividade3:

1) Com o auxílio de uma régua e um transferidor, aproxime os valores de sen70°, cos70° e tg70°.
2) Num triângulo retângulo, um cateto mede 12 cm e o ângulo oposto é de 60°. Calcule a hipotenusa e o outro cateto. Faça um esboço.
3) Um avião levanta vôo sob um ângulo de 30°. Quando tiver percorrido meio quilômetro, a que altura estará do solo? Faça um esboço.
4) Uma escada de 6m de comprimento está encostada a uma parede vertical, formando com ela um ângulo de 30° graus. Calcule a distância do pé da escada à parede.
5) Quando o sol está a 60° acima da linha do horizonte, qual é o comprimento da sombra de um poste de 7,5m de altura? Aproxime o resultado em metros com uma casa decimal.

Arcos e ângulos na circunferência em radianos

Quando cortamos uma circunferência de raio r num ponto e a “desentortamos” , obtemos um segmento de reta cuja medida é dada pela fórmula $l = 2\pi r$ e essa medida é chamada de comprimento da circunferência. Quando tomamos um arco s dessa circunferência, correspondente a um ângulo central α e o “desentortamos”, o comprimento desse arco pode ser obtido por uma regra de três simples .



Medida em graus		comprimento do arco
α	$\leftrightarrow$	s
$360°$	$\leftrightarrow$	$2\pi r$

Logo, $s = \frac{2\pi r\alpha}{360}$.

Observe que se tomarmos a mesma abertura α com raios r_1 e r_2, os comprimentos de arco associados $s_1 = \frac{2\pi r_1 \alpha}{360}$ e $s_2 = \frac{2\pi r_2 \alpha}{360}$ são diferentes. Porém, note que $\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2} = \frac{2\pi\alpha}{360}$. Assim, associamos ao *ângulo α sua medida em radianos* $\frac{2\pi\alpha}{360} = \frac{\pi\alpha}{180}$, já que esse valor independe do raio. Sendo assim, obtemos as correspondências

Medida em graus	360º	180º	90º	270º	45º	60º	30º	1º	$\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \cong 57{,}3°$
Medida em radianos	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{180} \cong 0{,}01745$	1

Observe que, nesse caso, *o comprimento de um arco da circunferência de raio r e ângulo central de **θ radianos** é dado por*

$$\boxed{s = \theta r.}$$

Quando o raio é 1, o comprimento do arco s é igual ao valor do ângulo subtendido θ em radianos.

Exemplo4:

1) Quantos graus mede o arco descrito por uma partícula que faz um percurso de $4\pi m$ numa circunferência de diâmetro 1,6 cm?

   Solução: Usando a unidade em centímetros, temos que $400\pi = \theta.0{,}8 \implies \theta = \frac{400\pi}{0{,}8} = 500\pi\ rad$. Logo, o arco descrito em graus é igual a $500\pi \times \frac{180}{\pi} = 90.000°$.

2)Quantos centímetros percorre uma partícula que descreve um arco de 510º numa circunferência de raio 6?

Solução: Primeiro transformamos a medida do ângulo para radianos, então $\theta = \frac{\pi}{180}.510 = \frac{17\pi}{6}$. Logo, a partícula percorre $s = \theta r = \frac{17\pi}{6}.6 = 17\pi\ cm.$

Atividade 4:

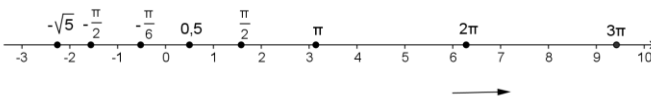
1) Calcule o comprimento do arco de uma circunferência de raio 2, cujo ângulo central é 30°.
2) Dê a medida em radianos dos ângulos 72°, 210°, 270° e 315°.
3) Determine o valor do raio r, tal que o comprimento do arco

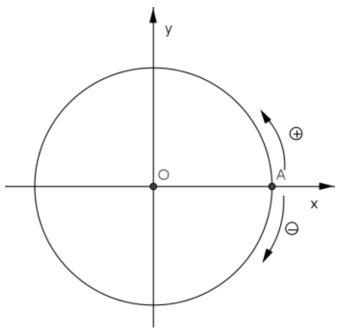
subtendido ao ângulo de 60° seja 3π.

O Círculo Trigonométrico

Considere num plano um sistema de coordenadas cartesianas xOy e uma circunferência de raio unitário, com centro na origem do sistema. Nesta circunferência, o comprimento de qualquer arco é igual à medida, em radianos, do ângulo central subtendido por esse arco, pois $l = r\theta = \theta$. Veremos agora, como associar a cada número real θ um ponto no círculo trigonométrico.

- Se θ=0 fazemos corresponder o ponto A=(1,0), origem do círculo trigonométrico.
- Se θ *>0,* partimos de A e percorremos um arco de comprimento θ no círculo trigonométrico, no sentido anti-horário.
- Se θ *<0,* partimos de A e percorremos um arco de comprimento | θ | no círculo trigonométrico, no sentido horário.



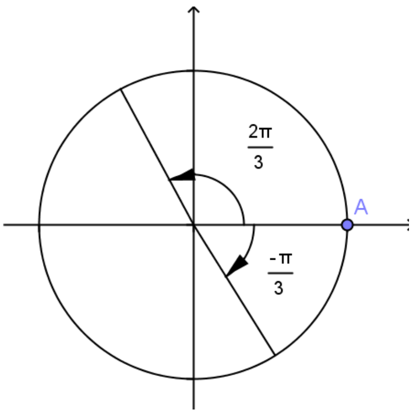


Observe que há percursos que podem dar mais de uma volta na circunferência. Os arcos θ e $\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, são ditos congruentes (ou côngruos), pois são representados no mesmo ponto do círculo trigonométrico. Nesse caso, |k| é o número de voltas a mais e o sinal de k o sentido das voltas, isto é, k >0 indica o sentido anti-horário para as voltas, enquanto k<0 indica o horário. Quando θ >0, fazer um percurso de comprimento θ é percorrer um arco de θ radianos(rad) sobre o círculo trigonométrico no sentido anti-horário e para $\theta < 0$, o arco tem comprimento $-\theta$ e é percorrido no sentido horário.

Exemplo5:

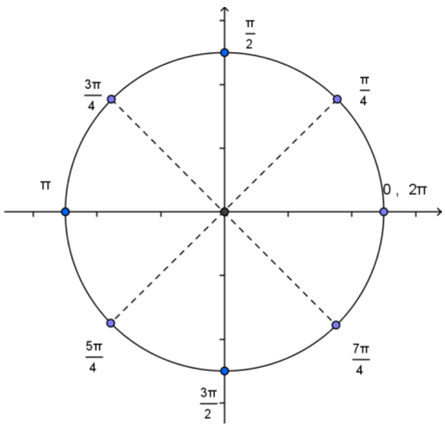
1) Marque no círculo trigonométrico os ângulos correspondentes a $\frac{2\pi}{3}$ e $-\frac{\pi}{3}$ $radianos.$

Solução:



2)Divida o círculo trigonométrico em 8 partes iguais, a partir de A=(1,0), e marque o arco θ, correspondente a cada ponto divisor, para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

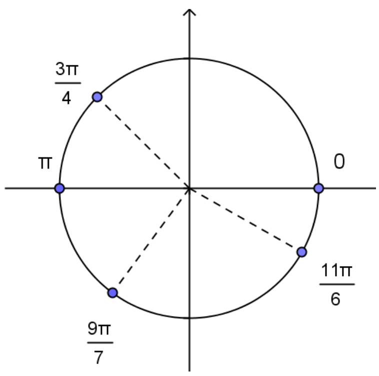
Solução:



3) Descubra o ângulo congruente no intervalo $[0,2\pi]$ e marque no círculo trigonométrico.

a)36π b)41π c)$\frac{83\pi}{4}$ d)- $\frac{13\pi}{6}$ e)$\frac{51\pi}{7}$

Solução:



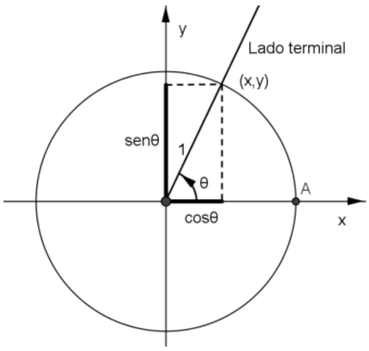
a) $36\pi = 18 \times 2\pi$, logo 36π é congruente a 0.
b) $41\pi = \pi + 40\pi$, logo 41π é congruente a π.

c) Dividindo 83 por 4, temos $\frac{83\pi}{4} = \frac{80\pi+3\pi}{4} = 20\pi + \frac{3\pi}{4} = 10 \times 2\pi + \frac{3\pi}{4}$, logo $\frac{83\pi}{4}$ é congruente a $\frac{3\pi}{4}$ (135°).

d) $-\frac{13\pi}{6} = \frac{-12\pi-\pi}{6} = -2\pi - \frac{\pi}{6}$, logo $-\frac{13\pi}{6}$ é congruente a $-\frac{\pi}{6}$. Porém, queremos o ângulo em $[0,2\pi]$, assim $-\frac{13\pi}{6} = -2\pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi - 2\pi = -4\pi + \frac{11\pi}{6}$. O ângulo é congruente a $\frac{11\pi}{6}$ (330°)

e) Dividindo 51 por 7, temos $\frac{51\pi}{7} = \frac{49\pi+2\pi}{7} = 7\pi + \frac{2\pi}{7}$, mas 7 é ímpar , então reescrevemos assim $\frac{51\pi}{7} = \frac{49\pi+2\pi}{7} = 7\pi + \frac{2\pi}{7} = 6\pi + \pi + \frac{2\pi}{7} = 6\pi + \frac{9\pi}{7}$ $= 3 \times 2\pi + \frac{9\pi}{7}$, logo $\frac{51\pi}{7}$ é congruente a $\frac{9\pi}{7}$ ($\cong 231°$).

Extensão de seno e cosseno à toda a reta



A cada $\theta \in \mathbb{R}$, associamos um ângulo no círculo trigonométrico. Considerando o lado terminal do ângulo, este tem interseção com o círculo trigonométrico num ponto de coordenadas (x, y), conforme a figura ao lado. Observe que para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos que $x = cos\theta \; e \; y = sen\theta$, de acordo com o triângulo retângulo da figura.

Agora, vamos estender as definições de seno e cosseno para a reta toda usando o ponto de interseção entre o lado terminal do ângulo e o círculo, ou seja, define-se

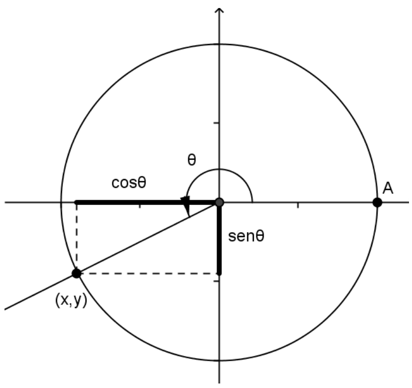
$$cos\theta = x$$

$$(a\ abscissa\ do\ ponto\ de\ interseção)\ \ e$$

$$sen\theta = y$$

$$(a\ ordenada\ do\ ponto\ de\ interseção),$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$.



Assim, o $cos\theta$ será lido no eixo Ox e o $sen\theta$ no eixo Oy. Acabamos de definir duas importantes funções, a saber, as funções $sen: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Note que os valores do seno e do cosseno são os mesmos para ângulos congruentes, já que esses têm o mesmo lado terminal, isto é $\cos(\theta + 2k\pi) = cos\theta$ e $sen(\theta + 2k\pi) = sen\theta$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$. Além disso, o conjunto imagem do seno e do cosseno é o intervalo [-1,1]. Denotando por P o ponto de interseção entre o lado terminal do ângulo e o círculo, temos os seguintes valores.

- $cos0 = 1\ e\ sen0 = 0, cos2k\pi = 1\ e\ sen2k\pi = 0,$ pois P=(1,0), $k \in \mathbb{Z}$.
- $cos\frac{\pi}{2} = 0\ e\ sen\frac{\pi}{2} = 1$, pois P=(0,1). [Marcamos 90° no sentido anti-horário.]
- $cos\pi = -1\ e\ sen\pi = 0$, pois P=(-1,0). [Marcamos 180° no sentido anti-horário.]
- $cos\frac{3\pi}{2} = 0\ e\ sen\frac{3\pi}{2} = -1$, pois P=(0,-1). [Marcamos 270° no sentido anti-horário.]
- $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0\ e\ sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, pois P=(0,-1). [Marcamos 90° no sentido horário.]
- $\cos(\frac{5\pi}{2}) = 0\ e\ sen\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1$, pois P=(0,1). [$\frac{5\pi}{2}$ =2π+$\frac{\pi}{2}$, portanto é congruente a $\frac{\pi}{2}$]

Além disso, temos os sinais do seno e do cosseno:

- $cos\theta > 0$, se P estiver no 1° ou no 4° quadrante; $cos\theta < 0$, se P estiver no 2° ou no 3° quadrante.
- $sen\theta > 0$, se P estiver no 1° ou no 2° quadrante; $sen\theta < 0$, se P estiver no 3° ou no 4° quadrante.

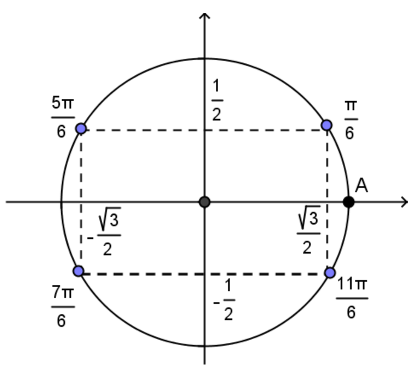
Identidade trigonométrica fundamental:

Aplicando o teorema de Pitágoras a um dos triângulos retângulos da figura anterior de catetos $b = |sen\theta|,\ c = |\cos\theta|$ e hipotenusa a=1, obtemos

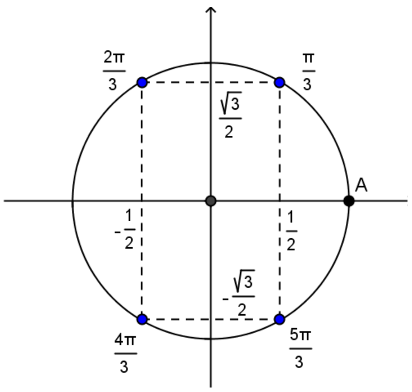
$$\boxed{cos^2\theta + sen^2\theta = 1.}$$

Essa identidade é válida para todo θ real, mesmo para os ângulos com lados terminais sobre os eixos coordenados (verifique!).

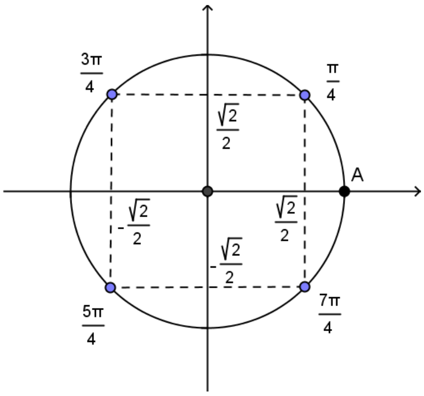
Valores notáveis do seno e do cosseno



$$cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ , sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$
$$cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ , sen\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2};$$
$$cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ , sen\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$
$$cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ , sen\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$



$$cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\ ,sen\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$cos\frac{2\pi}{3}=\ -\frac{1}{2},sen\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$cos\frac{4\pi}{3}=\ -\frac{1}{2},sen\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$cos\frac{5\pi}{3}=\ \frac{1}{2},sen\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$



$$cos\frac{\pi}{4}=\ \frac{\sqrt{2}}{2},sen\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$cos\frac{3\pi}{4}=\ -\frac{\sqrt{2}}{2},sen\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$cos\frac{5\pi}{4}=\ -\frac{\sqrt{2}}{2},sen\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$cos\frac{7\pi}{4}=\ \frac{\sqrt{2}}{2},sen\frac{7\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exemplo6:

1) Determine o seno e o cosseno de a)$\frac{19\pi}{3}$ b)1350° c)-510°

Solução:

a) $\frac{19\pi}{3}=3\times 2\pi+\frac{\pi}{3}$, logo $\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ $sen\left(\frac{19\pi}{3}\right)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b)1350°=3× $360°+270°$, logo cos(1350°)=cos270°=0 e sen270°==-1.

c)-510°= -720°+210°=-2×360°+210°, logo cos(-510°)=cos210°=-$\frac{\sqrt{3}}{2}$ e sen210°=$-\frac{1}{2}$.

2)Determine o sinal de a)$sen232°$ b)$cos271°$ c)$cos143°$

Solução:

a) 232° é um ângulo do 3° quadrante, logo sen232° é negativo.

b)271° é um ângulo do 4° quadrante, logo cos271° é positivo.

c) 143° é um ângulo do 2° quadrante, logo cos143° é negativo.

3)Resolva as equações em $[0,2\pi]$ a)*senx*=1 *b)senx*=0 *c)cosx*=1/2 .

Solução:

a)$senx = 1$ se e só se o lado terminal do ângulo no círculo trigonométrico estiver sobre o semieixo positivo dos y, logo $x = \frac{\pi}{2}$. Assim, $S = \{\frac{\pi}{2}\}$.

b)$Senx = 0$ se e só se o lado terminal do ângulo *x* estiver sobre o eixo *ox*. Logo, $S = \{0, \pi, 2\pi\}$.

c)Marcando no eixo 0x do círculo trigonométrico $cosx = \frac{1}{2}$, observamos que há dois ângulos em $[0{,}2\pi]$ onde *cosx=1/2*. São eles, $x = \frac{\pi}{3}(60°)\ e\ x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}(300°)$.

Atividade5:

1) Se $senx = 3/5$ e x é um ângulo do 2º quadrante, determine $cosx$.
2) Determine o sinal de a)$sen282°$ b)$cos241°$ c)$sen148°$
3) Determine o seno e o cosseno de a)$\frac{19\pi}{6}$ b)1530° c)-$\frac{5\pi}{4}$
4) Localize os ângulos no círculo trigonométrico e coloque os valores em ordem crescente : sen70°, sen160°, sen250°, sen300°. (Não precisa calcular os valores exatos!)
5) Resolva as equações em $[0{,}4\pi]$: a) $senx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b)$cosx = -1$.
6) Calcule k, tal que $senx = 1 + 4k\ e\ cosx = 1 + 2k$.
7) Se $senx + cosx = 1 + 3a$ e $senx - cosx = 1 - a$, calcule a.
8) Se $cosx = 2senx$, calcule $senx$.
9) Se $sen^2x - senx = 2cos^2x$, calcule *cosx.*
10) Dado que $senx.cosx = a$, calcule o valor de $y = (senx + cosx)^2$ em função de a.