Extensão da tangente, cossecante, cotangente e secante

Definimos as funções trigonométricas

$$tg\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta} \qquad sec\theta = \frac{1}{cos\theta} \ ,$$

para $\theta \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, onde k é inteiro.

Note que os ângulos do tipo $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ são os ângulos com lado terminal sobre oy, congruentes a $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$, exatamente onde o cosseno se anula. Também, definimos

$$cotg\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta} \qquad cossec\theta = \frac{1}{sen\theta} \ ,$$

para $\theta \neq k\pi$, onde k é inteiro. Nesse caso, as funções não estão bem definidas para os ângulos com lado terminal sobre ox, que correspondem aos ângulos congruentes a $0 \ ou \ \pi$.

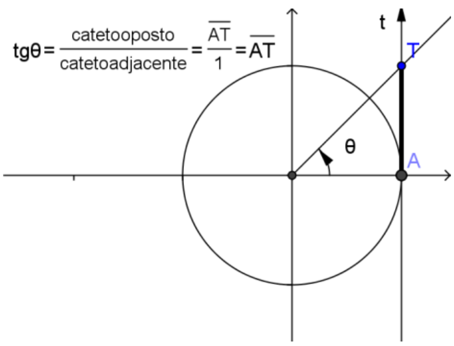
Observe na tabela abaixo alguns valores da tangente.

x (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$
tgx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1

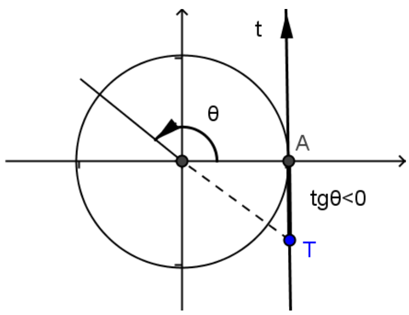
Agora, calcule você mesmo alguns valores da secante, cotangente e cossecante.

Segmento representativo da tangente no círculo trigonométrico

Na reta t paralela a oy e orientada para cima com origem em A=(1,0), marcamos a interseção T com o lado terminal do ângulo se θ for um ângulo do 1-º ou do 4-º quadrante. A tgθ é dada pelo segmento $\overline{AT}$ orientado, isto é, com o sinal positivo, se T estiver acima de A e negativo, se estiver abaixo. Se T=A, a tangente é zero.



Quando θ é um ângulo do 2-º ou 3-º quadrante, prolongamos o lado terminal do ângulo e marcamos o ponto T. Na figura ao lado, θ é do 2-º quadrante, logo a tangente é negativa.



Pensando no segmento representativo da tangente, note que $tg(\theta+\pi)=tg\theta$ e, em geral, $tg(\theta+2k\pi)=tg\theta$, $\forall\theta\neq\frac{(2k+1)\pi}{2}$ (faça um esboço!). Consequentemente, temos pela tabela acima que $tg\left(\frac{5\pi}{4}\right)=tg\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, $tg\left(\frac{7\pi}{6}\right)=tg\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $tg\left(\frac{7\pi}{4}\right)=tg\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-1$, etc..

Exemplo 7:

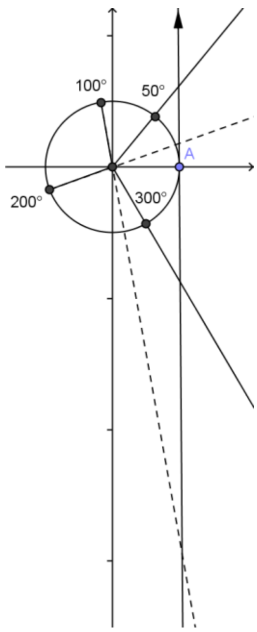
1) Calcule $a)tg225°$, b)$tg\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Solução: $a)tg225°$=$tg(180°+45°)=tg45°=1$.

b)$tg\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}=\frac{\text{sen}\,\frac{\pi}{6}}{-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2) Coloque em ordem crescente tg50°, tg 100°, tg200°, tg300°.

Solução: Observe o esboço no círculo trigonométrico abaixo.



Então, tg100°<tg300°<tg200°<tg50°.

3) Determine o domínio de a)$tg2x$ b)$tg(x-\frac{\pi}{4})$.

Solução: a) Considere a mudança de variável $t=2x$, então $t\neq\frac{(2k+1)\pi}{2}$. Logo, voltando a x, temos $x\neq\frac{(2k+1)\pi}{4}$. Assim, $D=\{x\in\mathbb{R};\ x\neq\frac{(2k+1)\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}\}$.

b) Considere a mudança de variável $t=x-\frac{\pi}{4}$, então $t\neq\frac{(2k+1)\pi}{2}$. Logo, voltando a x, temos $x-\frac{\pi}{4}\neq\frac{(2k+1)\pi}{2}$. Assim,

$D = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq k\pi + \frac{3\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

4) Dos números tg40°, tg64°, tg345°, tg89°, tg100° , quais são maiores do que 1?

Solução: Pensando no eixo representativo da tangente, temos $tgx > 1$ se e só se $45° < x < 90°$ ou $225° < x < 270°$. Logo, são maiores do que 1 tg64° e tg89°.

5) Calcule tgx, sabendo que $cosx = 0{,}1$ e que $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Solução: Pela identidade trigonométrica fundamental e por ser x um ângulo do 1° quadrante, temos $senx = \sqrt{1-(0{,}1)^2} = \sqrt{0{,}99}$. Logo, $tgx = \frac{\sqrt{0{,}99}}{0{,}1} = 3\sqrt{11}$.

Atividade 6

1) Calcule tgx, sabendo que $cosx = -\frac{5}{6}$ e que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.
2) Simplifique as expressões:

a) $\frac{sec^2 x}{1+tg^2 x}$ b) $\frac{sen^4 x - cos^4 x}{1-\sqrt{2}\,cosx}$ c) $\frac{tgx + cotgx}{cossec^2 x}$

3) Dado $cosx = \frac{\sqrt{5}}{3}$ e $tgx > 0$, calcule y=$tg^2 x + 2senx$.
4) Determine o sinal de a) $tg(\frac{11\pi}{5})$ b) $sen(21°) \times \cos(90°1') \times tg(181°)$
5) Para que ângulos, no intervalo $[-3\pi, 5\pi]$, a tangente não está definida? E a cotangente?

Algumas identidades trigonométricas

Frequentemente, quando trabalhamos com funções trigonométricas, utilizamos identidades para simplificar o estudo. Listamos a seguir algumas das principais identidades que utilizaremos.

1. $cos^2\alpha + sen^2\beta = 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $tg^2(\alpha) + 1 = sec^2\alpha$, $\forall \theta \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, onde k é inteiro.
3. $cotg^2(\alpha) + 1 = cossec^2\alpha$, $\forall \theta \neq k\pi$, onde k é inteiro.
4. $\cos(-\alpha) = cos\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
5. $sen(-\alpha) = -sen\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
6. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$,

   $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
7. $sen(\alpha+\beta) = sen\alpha cos\beta + sen\beta cos\alpha$,

$sen(\alpha - \beta) = sen\alpha cos\beta - sen\beta cos\alpha\,, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

8. *Arco duplo:*

   $\cos(2\alpha) = cos^2\alpha - \ sen^2\alpha \ , \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

   $sen(2\alpha) = 2sen\alpha cos\alpha \quad , \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

9. *Arco metade* :

   $cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+cos\alpha}{2} \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

   $sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-cos\alpha}{2} \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

As identidades acima são demonstradas a partir das definições das funções trigonométricas, por exemplo, dividindo a identidade trigonométrica fundamental (1) por $cos^2\alpha$, obtemos a identidade (2). E se usarmos $sen^2\alpha$, obtemos (3). Para (4) e (5), faça uma figura marcando no círculo trigonométrico $\alpha\ e - \alpha$, por simetria, o resultado segue. Já as identidades do arco duplo, seguem de (6) e (7), para $\alpha = \beta$. As do arco metade, são obtidas da primeira identidade de (8), substituindo α por $\frac{\alpha}{2}$ e usando a identidade (1) do lado direito (para o ângulo $\frac{\alpha}{2}$). As identidades (6) e (7) são menos diretas e serão deixadas como exercício (consulte um livro).

***Atenção**: um erro frequente, cometido por muitos alunos é pensar que vale a igualdade sen2x=2senx,$\forall x \in \mathbb{R}$, porém **essa igualdade é falsa**!!! Veja o exemplo 8-1) abaixo.*

Exemplo 8:

1) Dê um exemplo que mostre que em geral, $sen2x \neq 2senx$. Agora, construa uma infinidade de exemplos.

   Solução: Tome $x = \frac{\pi}{6}$, $sen\left(2.\frac{\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 2sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$

   Construindo uma infinidade de exemplos: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}$ onde $n \geq 2$, então, como $\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$, segue que $sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) > sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo, $2sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) > \sqrt{2} > 1$ e portanto $2sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) \neq sen(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{n})<1.$

2) Calcular $sen75°$ e $cos75°$.

Solução: Vamos usar as identidades do arco metade para $\alpha = 150°. Então,$

$cos^2(75°) = \frac{1+cos150°}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Longrightarrow cos75° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, e

$sen^2(75°) = \frac{1-cos150°}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Longrightarrow sen75° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$,

Pois 75° é do 1º quadrante.

Atividade 7

1) O que você acha sobre a igualdade $cos3x = 3cosx$, é falsa ou verdadeira em $\mathbb{R}$?
2) Calcule o valor de $sen^4x - cos^4x + cos2x$.
3) Simplifique as expressões abaixo:
   a) $\frac{cotgx + cossecx}{senx}$
   b) $\frac{cos^2x - sen^2x}{cos^2x - senxcosx}$
   c) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(\pi + x)}{sen\,(\pi - x)\cos\,(x - 2\pi)\cos(\frac{\pi}{2} + x)}$
4) Calcule $sen105°$.
5) Calcule $cos15°$.
6) Demonstre as identidades a) $tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\ .tg\beta}$

   $b) tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\ .tg\beta}$.
7) Se $tgx = \frac{6}{5}$, qual o valor de $tg2x$?

   (Sugestão: use o exercício 6) acima)
8) Mostre que $tg(22°30') = \sqrt{2} - 1$.
9) Mostre que $senx + cosx = \sqrt{2}cos(x - \frac{\pi}{4})$.

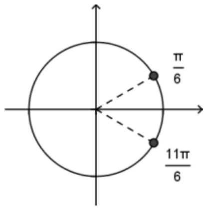
Equações trigonométricas

Resolver uma equação trigonométrica significa *encontrar os valores dos ângulos que pertencem ao intervalo dado, que tornam a equação verdadeira*. Se nenhum intervalo for dado inicialmente, supomos que queremos todos os ângulos reais que satisfazem a equação.

Exemplo 9- Equações mais simples.

1) Resolva $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [0,2\pi]$. Marque o conjunto solução no círculo trigonométrico.

   Solução: Os ângulos no intervalo $[0,2\pi]$ são $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{11\pi}{6}$.

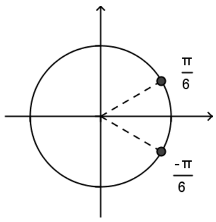


2) Resolva $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [0,\pi]$.

   Solução:O ângulo no intervalo $[0,\pi]$ é $x = \frac{\pi}{6}$.

3) Resolva $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-\pi,\pi]$. Marque o conjunto solução no círculo trigonométrico.

   Solução:Os ângulos no intervalo $[-\pi,\pi]$ são $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = -\frac{\pi}{6}$.



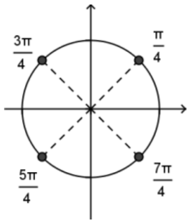
4) Resolva $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

   Solução: Os ângulos são todos os congruentes a $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = -\frac{\pi}{6}$ $(ou \frac{11\pi}{6})$.

   Assim, $S = \left\{x \in \mathbb{R}; x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ , } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5) Resolva $cos^2x = \frac{1}{2}$, $x \in [0,2\pi]$. Marque o conjunto solução no círculo trigonométrico.

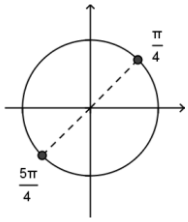
Solução:$cos^2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $cosx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo, S={$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ }.



6) Resolva $\text{sen}2x = 1$, $x \in \mathbb{R}$. Marque o conjunto solução no círculo trigonométrico.

Solução: Mudando a variável, $t = 2x$, temos $sent = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Logo,

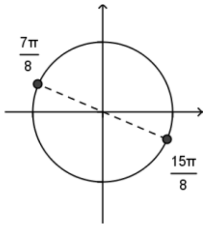
$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.



7) Resolva $\text{sen}(2x - \frac{\pi}{4}) = -1$, $x \in \mathbb{R}$. Marque o conjunto solução no círculo trigonométrico.

Solução:Mudando a variável, $t = 2x - \frac{\pi}{4}$, temos $sent = -1 \Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

Logo, $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{8} + k\pi$.



OBS:No exemplo acima vimos várias equações do tipo senx=a ou cosx=a. Note que como cosx e senx são números reais pertencentes ao intervalo [-1,1], uma equação desse tipo admite solução, se e só se , $a \in [-1,1]$. Por exemplo, as equações senx=2, $senx = \sqrt{3}$, cosx= -5, $cosx = \pi$ não possuem solução ($S = \emptyset$). Por outro lado, equações em que $-1 \leq a \leq 1$, do tipo senx=0,1 , $senx = 1/\sqrt{3}$, cosx= -1/5, $cosx = \sqrt{\pi - 3}$, sempre possuem solução, mesmo que os valores não correspondam a ângulos notáveis.

Exemplo 10- Equações mais elaboradas, algumas requerem o uso de identidades.

Resolva as equações abaixo.

1) $2cos^2x + cosx = 0$, $x \in [0,2\pi]$.

Solução:$2cos^2x + cosx = 0 \Leftrightarrow \ cosx(2cosx + 1) = 0 \ \Leftrightarrow$

$cosx = 0 \ ou \ cosx = -\frac{1}{2}$ Logo, $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

2) $tg\theta = 2sen\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Solução: $tg\theta = 2sen\theta \Leftrightarrow \frac{sen\theta}{cos\theta} = 2sen\theta \ \Leftrightarrow \ sen\theta = 0 \ ou \ \frac{1}{cos\theta} = 2 \Leftrightarrow$

$sen\theta = 0 \ ou \ cos\theta = \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ \theta = 0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

3) $cos^2x + senx + 1 = 0$.

Solução: Usando a identidade trigonométrica fundamental, obtemos $cos^2x + senx + 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ 1 - sen^2x + senx + 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ sen^2x - senx - 2 = 0$. Mudando a variável $t = senx$, obtemos a equação do 2º grau $t^2 - t - 2 = 0$, cujas raízes são $t_1 = -1 \ e \ t_2 = 2$. Voltando a x, temos duas equações

- $senx = 2$, que não tem solução pois $-1 \leq senx \leq 1$;
- $senx = -1$, que tem como solução $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R}; x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4) $sen2x + cosx = 0, x \in [0,2\pi]$.

Solução:Usando a identidade do arco duplo, a equação dada é equivalente a $2senxcosx + cosx = 0 \ \Leftrightarrow cosx = 0 \ ou \ 2senx + 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ cosx = 0 \ ou \ senx = -\frac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

Atividade 8

Nos exercícios a seguir, encontre a solução e marque no círculo trigonométrico.

1) $sen3x = -1, \ x \in [-\pi, 2\pi]$.
2) $senx.cos(2x - \pi) = 0$.
3) $2sen4x - 1 = 0, \ x \in [0,2\pi]$.
4) $sen3x - sen(-3x) = -1$.
5) $sen^2x + cosx + 1 = 0$.
6) $sen2x + sen4x = 0$.

7) $sen^2x - cos^2x = \frac{1}{2}, x \in [0,2\pi]$.

8) $2sen^2x + senx - 1 = 0, \ x \in [-\pi, 3\pi]$.

9) $cos2x - cos^2x = 0$.

10) $cossec^2x = 5 - 8sen^2x$, em $[0,2\pi]$.

Inequações trigonométricas

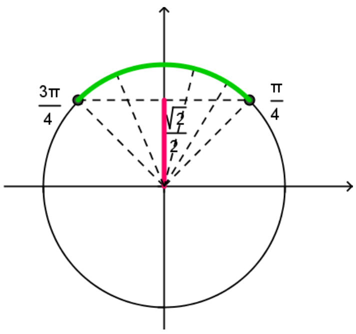
Para resolver uma inequação trigonométrica, procure determinar primeiro a solução da equação associada para ter uma idéia do problema. Depois, faça um esboço no círculo trigonométrico para determinar a solução da inequação.

Exemplo 11:

Resolva e marque o conjunto solução no círculo trigonométrico.

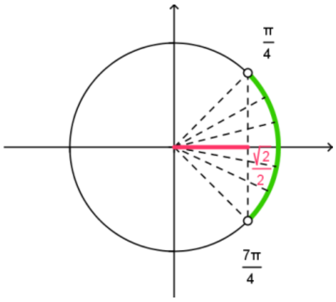
1) $senx \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [0,2\pi]$.

Solução: A equação associada é $senx = \frac{\sqrt{2}}{2}$, cujas soluções no intervalo dado são $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$. Olhando no círculo trigonométrico, temos $S = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, pois para os ângulos desse intervalo, quando projetamos o ponto correspondente no círculo sobre oy o valor da ordenada é maior do que, ou igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



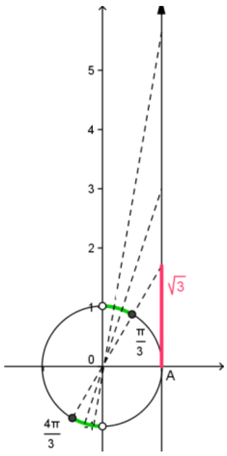
2) $cosx > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [0,2\pi]$.

Solução: A equação associada é $cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$, cujas soluções no intervalo dado são $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$ (esses ângulos não satisfazem a inequação!). Olhando no círculo trigonométrico, temos $S = \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$, pois para os ângulos desse intervalo, quando projetamos o ponto correspondente no círculo sobre ox , o valor da abscissa é maior do que $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



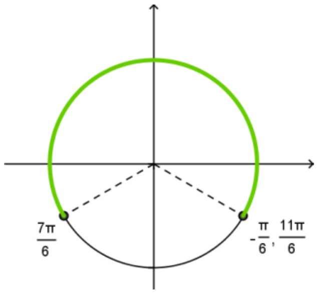
3) $tgx \geq \sqrt{3}$, $x \in [0,2\pi], x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Solução: A equação associada é $tgx = \sqrt{3}$, cujas soluções no intervalo dado são $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$. Olhando no círculo trigonométrico, temos $S = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \cup [\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2})$, pois para os ângulos desse intervalo, quando prolongamos seu lado terminal até o eixo representativo da tangente, sua interseção ocorre em pontos acima de A=(1,0) e a distância ao ponto A=(1,0) é maior do que, ou igual a $\sqrt{3}$.



4) $2senx + 1 \geq 0$.

Solução: A inequação dada é equivalente a $senx \geq -\frac{1}{2}$. Marcando o conjunto solução da equação associada, $senx = -\frac{1}{2}$, no círculo trigonométrico, observamos que o conjunto solução em $[0,2\pi]$ é dado por $\left[0, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$. Como o problema requer todas as soluções em ℝ, então respeitando a ordem dos reais, podemos escrever $S = \left\{x \in \mathbb{R}; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\, , k \in \mathbb{Z}\right\}$.

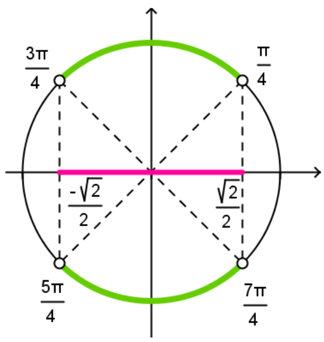


5) $2cos^2x - 1 < 0$.

Solução: Nesse exemplo, primeiro vamos transformar a inequação dada em duas mais simples. Observe.

- Mudamos a variável $t = cosx$, então temos $2t^2 - 1 < 0$.
- Estudamos o sinal da parábola $y = 2t^2 - 1$, cujas raízes são $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $y = 2t^2 - 1 < 0 \iff -\frac{\sqrt{2}}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Voltando à variável x, segue que $2cos^2x - 1 < 0 \iff -\frac{\sqrt{2}}{2} < cosx < \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Marcamos no círculo trigonométrico as soluções das equações $cosx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$, e determinamos para quais os ângulos teremos a projeção em ox entre $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R}; \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ } ou \text{ } \frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x <\right.$ *7π4+2kπ, k∈ℤ.*



Atividade 9

Nos exercícios de 1) a 5) resolva e marque o conjunto solução no círculo trigonométrico.

1) $senx \geq \frac{1}{2}$, $x \in [0,2\pi]$.
2) $cosx < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [0,2\pi]$.
3) $tgx \geq 1$, $x \in [0,2\pi], x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.
4) $2cos^2x + cosx - 1 < 0$.
5) $cos2x - 6cosx + 5 \geq 0$, $x \in [0,2\pi]$.

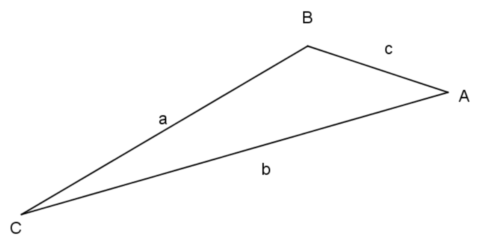
6) Determine o domínio das funções

a) $f(x) = \frac{senx}{1-cosx}$

b) $f(x) = \sqrt{1-2cosx}$

Lei dos Senos em triângulos quaisquer

Dado um triângulo qualquer ABC de lados a, b e c , respectivamente, opostos aos ângulos A, B e C, valem as igualdades:



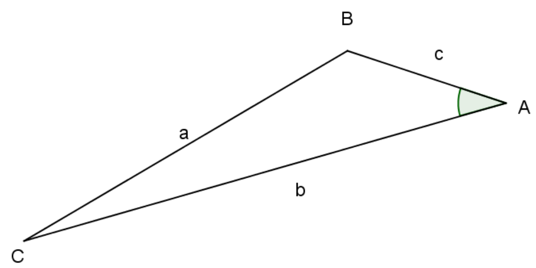
$$\boxed{\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}}$$

Em palavras, podemos enunciar a lei dos senos como segue.

"Em todo triângulo, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos."

Lei dos Cossenos em triângulos quaisquer

Dado um triângulo qualquer ABC de lados a, b e c , respectivamente opostos aos ângulos A, B e C , vale a seguinte relação:

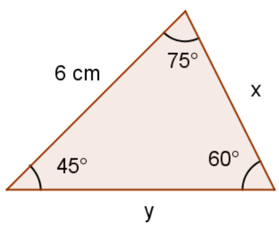


$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, cosA}$$

Observe que a lei dos cossenos estende o teorema de Pitágoras, pois quando o ângulo A é reto , temos $cosA = 0$ e a igualdade fica $a^2 = b^2 + c^2$.

Exemplo 12:

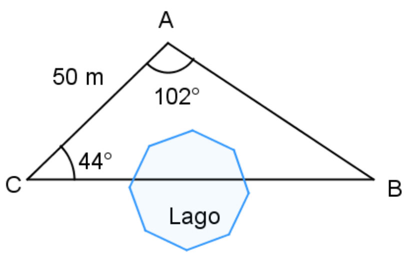
1) Calcule x e y.



Solução: Veja no exemplo 8-2) o cálculo de $sen75° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

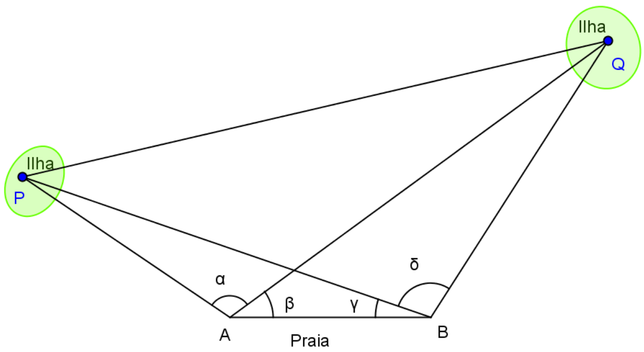
Pela lei dos senos, temos $\frac{x}{sen\,45°} = \frac{6}{sen\,60°} \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}.6.\frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$. Analogamente, $\frac{y}{sen\,75°} = \frac{6}{sen\,60°} \Longrightarrow y = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.6.\frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2\sqrt{3}+3}$.

2) Deseja-se determinar a distância entre dois pontos A e B, entre os quais há um lago. Para isso coloca-se uma marca no ponto C, a 50 m de A, e determina-se, usando um *teodolito* *, $A\hat{C}B = 44°$ e $C\hat{A}B = 102°$. Calcule a distância aproximada de AB, sabendo que $sen44° \cong 0{,}695$, $sen34° \cong 0{,}559$ e $sen78° \cong 0{,}978$.



Solução: Pela lei dos senos, sabemos que $\frac{50}{sen\,34°} = \frac{AB}{sen\,44°} \Longrightarrow AB = \frac{50.sen\,44°}{sen\,34°} \cong \frac{34{,}75}{0{,}559} \cong 62{,}16$. Logo, a distância aproximada é de 62m.

3) Para determinar a distância entre dois pontos P e Q, um em cada ilha, um topógrafo, situado na praia, coloca duas marcas nos pontos A e B, e mede as distâncias. Depois, põe o teodolito no ponto A , mede os ângulos $\alpha\ e\ \beta$, em seguida no ponto B e mede os ângulos $\gamma\ e\ \delta$ (conforme a figura abaixo). Como ele determina a distância entre os pontos que estão um em cada ilha?



Solução: Podemos usar a lei dos senos e calcular PB e BQ:

- Do triângulo APB, temos $\frac{PB}{sen\,(\alpha+\beta)} = \frac{AB}{sen\,\theta}$, onde θ=180°-$(\alpha+\beta+\gamma)$. Daí, $PB = sen(\alpha+\beta)\frac{AB}{sen\theta} = sen(\alpha+\beta)\frac{AB}{sen\,(\alpha+\beta+\gamma)}$, onde na última igualdade usamos a fórmula do seno da diferença.
- Do triângulo ABQ, temos $\frac{BQ}{sen\beta} = \frac{AB}{sen\varphi}$, onde φ=180°-$(\gamma+\delta+\beta)$. Daí, $BQ = sen\beta\frac{AB}{sen\varphi} = sen\beta\frac{AB}{sen\,(\gamma+\delta+\beta)}$, onde na última igualdade usamos a fórmula do seno da diferença.

Queremos calcular PQ. Pela lei dos cossenos no triângulo BPQ, temos:

$$PQ^2 = PB^2 + BQ^2 - 2PB.BQ.cos\delta \quad \text{, donde}$$

$$\text{PQ}=AB.\sqrt{\frac{sen^2(\alpha+\beta)}{sen^2(\alpha+\beta+\gamma)} + \frac{sen^2\beta}{sen^2(\gamma+\delta+\beta)} - 2\frac{cos\delta\,.sen\beta\,.sen\,(\alpha+\beta)}{sen\,(\alpha+\beta+\gamma)sen\,(\gamma+\delta+\beta)}}\,.$$

Atividade 10

1) Num triângulo ABC, temos AC=8 cm, BC=6 cm, $\alpha = B\hat{A}C$ e $\beta = A\hat{B}C$. Se $\beta = 60°$, calcule $sen\alpha$.

2) Dois lados de um triângulo medem 6 cm e 9 cm e formam um ângulo de 60°. Calcular o outro lado.

3) Determine os ângulos do triângulo cujos lados medem 3 , $\sqrt{3}\ e\ 2\sqrt{3}$.

4) Prove que ,
   a) se a é o maior lado do triângulo ABC e $a^2 < b^2 + c^2$, então o triângulo é acutângulo;

b) se a é o maior lado do triângulo ABC e $a^2 > b^2 + c^2$, então o triângulo é obtusângulo;

De a) e b), segue que se $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é ___________________.
(Recíproca do teorema de Pitágoras.)

5) Dados os lados dos triângulos, usando o exercício 4), verifique se o triângulo é acutângulo, obtusângulo ou retângulo.
   a) 10,24,26
   b) 10,15,20
   c) 9,40,41
   d) 16,33,30

*** Teodolito**

Há muitas variedades de teodolitos, alguns para fins de Topografia e outros, com maior precisão, de uso em Astronomia.
Veja http://pt.wikipedia.org/wiki/Teodolito