Universidade Federal Fluminense

Instituto de Matemática e Estatística

Departamento de Estatística

Fundamentos de Matemática para Estatística

GET00188

Ana Maria Lima de Farias

Março 2019

Essas notas de aula se basearam inicialmente em material gentilmente cedido pelo Professor Douglas Rodrigues Pinto, mas quaisquer erros são de minha exclusiva responsabilidade.

Agradeço também a Yasmin Cavaliere, que me emprestou suas anotações da disciplina Teoria das Probabilidades I ministrada pelo professor Adrian Heringer Pizzinga.

Aos futuros professores da disciplina, caso o desejem, disponibilizo estas notas de aula para que, juntos, possamos elaborar um material de referência para os alunos.

Ana Maria Farias

Conteúdo

Parte I

Introdução ao Pensamento Matemático

Nesta Parte 1 do material, faremos uso de conceitos e resultados sobre os números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais que já devem ser de conhecimento do aluno desde o Ensino Médio. Na Parte 2, voltaremos a esses conjuntos numéricos.

- Conjuntos dos números naturais

  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

  Note que não iremos considerar 0 (zero) como número natural, embora alguns autores o façam. Veja uma discussão em `http://editoradobrasil.com.br/portal_educacional/fundamental2/projeto_apoema/pdf/textos_complementares/matematica/9_ano/pam9_texto_complementar01_conceitos_e_controversias.pdf`.

- Conjunto dos números inteiros

  $\mathbb{Z} = \{0, -1, +1, -2, +2, -3, +3, \ldots\}$

- Conjunto dos números racionais

  $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

- Conjunto dos números reais

  $\mathbb{R}$

- Múltiplos e divisores

  Um número inteiro não nulo n **divide** um número inteiro m se existe um inteiro k, tal que $m = kn$. Se n divide m, m é dito **múltiplo** de n ou, de modo equivalente, n é dito **divisor** de m. Pode-se dizer também que m é **divisível** por n.

- Números pares

  Um número inteiro n é **par** se for divisível por 2, isto é, se existir um inteiro n' tal que $n = 2n'$.

- Números ímpares

  Um número inteiro n é dito **ímpar** se 2 não divide n; nesse caso pode-se provar que existe um número inteiro n' tal que $n = 2n' + 1$.

- Números primos

  Um número inteiro $n > 1$ é **primo** se ele for divisível apenas por ele mesmo e por 1.

  Note que 1 não é primo!

- Números primos entre si

  Dois ou mais números inteiros positivos são ditos primos entre si se 1 é o único divisor comum a todos eles.

Capítulo 1

Conceitos básicos

1.1 Introdução

Em Matemática, os resultados devem ser expressos de forma clara, exata, sem qualquer ambiguidade. Para que um resultado seja declarado verdadeiro, é necessário demonstrar tal veracidade. Não basta intuir ou provar que é verdadeiro para alguns casos – é necessário demonstrar que vale pata todos os casos possíveis envolvidos no resultado.

Exemplo 1.1
Em 1620, Pierre de Fermat (1601-1665) conjecturou que números da forma $F_n = 2^{2^n} + 1$ eram todos primos. Com lápis e papel, ele demonstrou que $F_1 = 3$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ e $F_4 = 65.537$ eram todos primos e isso motivou sua conjectura. No entanto, em 1732, Leonhard Euler (1707-1783) mostrou que $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297 = 671 \times 6.700.417$. Euler também fez uma conjectura que foi derrubada em 1966 pelos matemáticos Landers e Parkin. Euler conjecturou que, para decompor a $n-$ésima potência de um inteiro positivo k em soma de potências de ordem n de números inteiros seriam necessárias pelo menos n parcelas, isto é, deveríamos ter $K^n = a_1^n + a_2^2 + \ldots + a_k^n$, sendo $a_1, a_2, \cdots, a_n$ (ou mais parcelas). O contra-exemplo apresentado foi $144^5 = 27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5$. [Lander e Parkin (1966)]

♦♦

Esses exemplos mostram que, para *afirmar* que um resultado é verdadeiro, é necessário demonstrar que ele é válido para *todos* os casos possíveis envolvidos no enunciado do resultado.

Com esses exemplos vemos, também, que a descoberta de novos resultados em Matemática envolve duas etapas:

- Heurística – é o trabalho de descoberta de resultados, usando-se nossa intuição ou experiência, simulações, casos particulares. Esse trabalho leva ao estabelecimento de uma *conjectura*, isto é, a partir dele *intuímos* um resultado sobre o qual temos alguma evidência, mas não a certeza, da sua veracidade.

- Demonstração – consiste em um encadeamento de deduções que comprovam, de maneira irrefutável, que o resultado dado na conjectura é consequência lógica de resultados já aceitos como verdadeiros. Por outro lado, para mostrar que a conjectura é falsa, é necessário apenas exibir um único exemplo em que o resultado dado não seja válido.

Exemplo 1.2 O Último Teorema de Fermat
Como exemplo de uma conjectura que se transformou em teorema, isto é, para a qual foi apresentada uma demonstração de sua veracidade, temos a seguinte conjectura estabelecida por Fermat em 1637:

"Se $n \geq 3$, então a equação $x^n + y^n = z^n$ não tem soluções x, y, z inteiras e não nulas."

Apenas em 1995, mais de 350 anos depois, uma demonstração foi apresentada pelo matemático inglês Andrew Wiles que, com a ajuda de outro matemático inglês, Richard Taylor, corrigiu um erro em sua primeira demonstração de 1993.

♦♦

Exemplo 1.3 Conjectura de Goldbach
Em 1742, o matemático alemão Christian Goldbach (1690-1742), em correspondência a Euler, apresentou uma versão da conjectura

"Todo número par maior que 2 é a soma de dois números primos."

Essa conjectura está em aberto e, até agora, com recursos computacionais, mostrou-se que é válida para todos os pares menores que 4×10^{14}. Mas, como já dito, isso não é suficiente para demonstrar a veracidade da conjectura.

♦♦

1.2 Frases, sentenças e sentenças abertas

Os resultados matemáticos, sejam conjecturas ou resultados já provados, devem ser estabelecidos de forma clara, sem ambiguidades. Nesta seção apresentamos alguns conceitos importantes no estabelecimento de tais resultados.

Definição 1.1 Frases e sentenças
*Uma **frase** é um conjunto de palavras ou símbolos matemáticos que se relacionam para comunicar uma ideia.*
*Uma **sentença**, ou **proposição**, é uma frase, que pode incluir apenas símbolos matemáticos, tal que*

1. *apresenta-se de forma estruturada como uma oração, com sujeito, verbo e predicado;*
2. *é uma afirmativa declarativa, não podendo ser nem exclamativa, nem interrogativa;*
3. *ela é falsa ou verdadeira, não havendo uma terceira possibilidade (Princípio do Terceiro Excluído);*
4. *ela não pode ser falsa e verdadeira ao mesmo tempo (Princípio da Não-Contradição).*

Iremos denotar as sentenças por letras maiúsculas, embora alguns autores utilizem letras minúsculas. [Vide Ripoll et al. (2011).]

Exemplo 1.4
Verifique que P_1, P_2, P_3 e P_4 são sentenças e determine se são falsas ou verdadeiras.

(a) $P_1 : 16 < 20$

(b) P_2 : No Brasil, até o ano de 2018, houve apenas um presidente do sexo feminino.

(c) $P_3 : \sqrt{2} \in \mathbb{N}$

(d) $P_4 : x \in \mathbb{R}, x^2 - 9 < 0 \Rightarrow - < x < 3$

Solução:

(a) 'Lendo' P_1, temos "16 é menor que 20", que é uma sentença, pois é frase afirmativa, que assume apenas o valor VERDADEIRO.

(b) P_2 é uma sentença que, no entanto, não é uma sentença matemática. Como estamos especificando o período de referência, a sentença é VERDADEIRA.

(c) 'Lendo' P_3, temos "Raíz quadrada de 2 pertence ao conjunto dos números naturais", que é uma sentença, pois é frase afirmativa, que assume apenas o valor FALSO.

(d) P_4 é uma sentença matemática que se lê como "x pertence ao conjunto dos reais e satisfaz $x^2 - 9 < 0$ implica que x é maior que -3 *e* menor que 3". Essa é uma sentença que assume apenas o valor VERDADEIRO

♦♦

Exemplo 1.5
Explique por que as expressões abaixo não são sentenças.

(a) $\frac{1}{3} + 2$

(b) $x + 3 = 6$

(c) $10^8 > 8^{10}$?

Solução:

(a) Não é sentença, pois não tem verbo ou predicado. Poderíamos transformar a expressão em sentença escrevendo
$$\frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$
que seria uma sentença verdadeira, ou
$$\frac{1}{3} + 2 = 3$$
que seria uma sentença falsa.

(b) Não é sentença, pois, se $x = 3$, ela é verdadeira, mas se $x = 2$, ela é falsa. Logo, o Princípio da Não Contradição não é satisfeito. Para transformar em uma sentença poderíamos fazer
$$\exists x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x + 3 = 6$$
que assumiria o valor verdadeiro, ou
$$\forall x \in \mathbb{N}, \ x + 3 = 6$$
que assumiria o valor falso.

(c) Não é sentença, pois é uma frase interrogativa. Para transformar em sentença, bastaria excluir o ponto de interrogação e teríamos uma sentença falsa.

♦♦

Definição 1.2 Sentença aberta
*Uma **sentença aberta** é uma frase subordinada a uma variável, ou objeto, sobre o qual nada se afirma, impossibilitando a determinação do valor lógico da frase.*

Exemplo 1.6
São exemplos de sentenças abertas:

(a) $x + 3 = 6$

(b) $n^2 + n = 10$

(c) T é um quadrilátero

As duas primeiras sentenças abertas dependem de uma variável (x e n, respectivamente), enquanto a terceira depende de um objeto (T).

♦♦

Para explicitar a dependência em uma variável x, denotaremos a sentença aberta por uma letra maiúscula (como antes), seguida do nome da variável entre parênteses. Assim, no exemplo anterior, teríamos

$Q(x) : x + 3 = 6$

$P(n) : n^2 + n = 10$

$P(T)$: T é um quadrilátero.

Note que há uma certa inconsistência na nomenclatura "sentença aberta", pois, pela Definição 1.1, uma sentença aberta não é uma sentença! No entanto, seguiremos essa terminologia amplamente utilizada na literatura.

Nos exemplos acima, fizemos uso de símbolos matemáticos que fazem parte de uma vasta notação matemática utilizada universalmente [vide Figura 1.1 em de Morais Filho (2004)]. Para o uso correto de tais símbolos, apresentamos os alguns dos principais na Tabela 1.1, explicando o significado de cada um. Os símbolos $\exists$ e $\forall$ são chamados **quantificadores existencial e universal**, respectivamente.

As letras do alfabeto grego são também muito utilizadas nos resultados matemáticos; assim, apresentamos este alfabeto na Tabela A.1 do Apêndice A.

1.3 Conectivos e sentenças compostas

É possível construir novas proposições ou sentenças matemáticas a partir de proposições dadas, utilizando-se **conectivos lógicos**, ou simplesmente **conectivos**. Alguns conectivos usuais são "não", "se ... então", "se e somente se", "ou" e "e". Essas novas proposições são chamadas **proposições compostas ou moleculares** e aquelas que contêm apenas uma proposição na sua formação são chamadas **proposições simples ou atômicas**.

1.3.1 Sentenças conjuntivas e disjuntivas

Dadas duas proposições P e Q, podemos formar duas novas proposições:

Tabela 1.1 – Notações e símbolos matemáticos

Símbolo	Como se lê	Símbolo	Como se lê
$\exists$	Existe pelo menos um; Existe; Existe um	$\exists!$	Existe um único; Existe apenas um.
$\forall$	Para todo	$\mid$ ou ;	Tal que
$\Longrightarrow$	Implica que	$\Longleftrightarrow$	Se e somente se; Equivalente (no caso de proposições)
$\leq$	Menor que ou igual a	$<$	Menor que
$\geq$	Maior que ou igual a	$<$	Maior que
$\approx$	Aproximadamente igual a	$\equiv$	Equivalente a
$\triangleq$	É igual por definição	$\in$	Pertence a
$\subset$	Está contido em	$\supset$	Contém
$\cap$	Interseção	$\cup$	União
$\therefore$	Então; Portanto; Logo	$\pm$	Mais ou menos
e	Número neperiano e	π	Número pi
∞	Infinito		
$\sum_{i=1}^{n} p(i)$	Somatório de $p(i)$ em que i varia de 1 a n	$\prod_{i=1}^{n} p(i)$	Produtório de $p(i)$ em que i varia de 1 a n

P e Q – **conjunção** das sentenças P e Q

e

P ou Q – **disjunção** das sentenças P e Q

Em símbolos, temos

- proposição conjuntiva: $P \wedge Q$ (lê-se P e Q)
- proposição disjuntiva: $P \vee Q$ (lê-se P ou Q)

Uma **proposição conjuntiva** $P \wedge Q$ será **verdadeira** se, e somente se, *ambas* as proposições P e Q forem verdadeiras.

Uma **proposição disjuntiva** $P \vee Q$ será **verdadeira** se, e somente se, *pelo menos uma* das proposições P e Q for verdadeira.

Uma maneira prática de se encontrar os valores lógicos de expressões compostas é usando-se uma tabela-verdade. Nessas tabelas, usaremos a letra V para denotar que a sentença é verdadeira e a letra F para denotar que a sentença é falsa. Lembre-se que, dos Princípios do Terceiro Excluído e da Não Contradição, toda proposição está associada a um único valor lógico (F ou V). Isso nos permite obter a seguinte tabela-verdade para proposições compostas conjuntiva e disjuntiva baseadas em duas proposições simples:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Tabela 1.2 – Tabela-verdade da conjunção e disjunção de 2 sentenças

Quando duas sentenças compostas $P(R_1, R_2, \cdots, R_k)$ e $Q(R_1, R_2, \cdots, R_k)$ possuem a mesma tabela-verdade, elas são ditas **equivalentes** e escreve-se

$$P(R_1, R_2, \cdots, R_k) \equiv Q(R_1, R_2, \cdots, R_k)$$

1.3.2 Sentenças condicionais e implicativas

Uma **sentença condicional** é uma sentença composta

Se P, então Q.

formada por duas sentenças P e Q ligadas pelo conectivo "Se ... então", de modo que Q pode ser deduzida de P sempre que se admitir a ocorrência de P.

Uma **sentença implicativa** é uma sentença composta

$$P \Rightarrow Q$$

e podemos ver que é apenas uma outra forma de escrever uma sentença condicional "Se P então Q."

Exemplo 1.7
Na forma "Se n é um número inteiro divisível por 10, então n é um número par" temos uma sentença condicional composta pelas sentenças

P : n é um número inteiro divisível por 10

e

Q : n é um número par.

Mas se escrevemos "n é um número inteiro divisível por 10 $\Longrightarrow$ n é um número par", temos uma sentença implicativa, que transmite exatamente o mesmo resultado.

♦♦

1.4 Negação de sentenças

A negação de uma sentença P é a sentença "não P", que representamos por $\neg P$ (ou $\sim P$). Saber negar uma sentença matemática será importante na demonstração de teoremas por redução ao absurdo, que veremos no próximo capítulo.

Do Princípio da Não-Contradição, resulta o seguinte:

$$P \text{ é verdadeira} \Longrightarrow \neg P \text{ é falsa}$$

$$\neg P \text{ é verdadeira} \Longrightarrow P \text{ é falsa}$$

É válido também o **princípio da dupla negação**, ou seja:

$$\neg(\neg P) \equiv P$$

Usando esses resultados, vamos ver, agora, como formular a **negação de sentenças disjuntivas** com o uso de tabela-verdade dada na Tabela 1.3. Analisando a primeira linha, temos:

$$\left.\begin{array}{l} P \text{ Verdadeira} \\ Q \text{ Verdadeira} \end{array}\right\} \Longrightarrow (P \vee Q) \text{ Verdadeira} \Longrightarrow \neg(P \vee Q) \text{ Falsa}$$

$$\left.\begin{array}{l} P \text{ Verdadeira} \Longrightarrow \neg P \text{ Falsa} \\ Q \text{ Verdadeira} \Longrightarrow \neg Q \text{ Falsa} \end{array}\right\} \Longrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \text{ Falsa}$$

De maneira análoga, completam-se as outras linhas a partir das suposições sobre P e Q.

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Tabela 1.3 – Tabela-verdade da negação da conjunção

Para a **negação de sentenças conjuntivas**, veja a Tabela 1.4. Para a segunda linha, por exemplo, temos

$$\left.\begin{array}{l} P \text{ Verdadeira} \\ Q \text{ Falsa} \end{array}\right\} \Longrightarrow (P \wedge Q) \text{ Falsa} \Longrightarrow \neg(P \wedge Q) \text{ Verdadeira}$$

$$\left.\begin{array}{l} P \text{ Verdadeira} \Longrightarrow \neg P \text{ Falsa} \\ Q \text{ Falsa} \Longrightarrow \neg Q \text{ Verdadeira} \end{array}\right\} \Longrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \text{ Verdadeira}$$

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Tabela 1.4 – Tabela-verdade da negação da conjunção

De maneira análoga, completam-se as outras linhas a partir das suposições sobre P e Q.

Comparando a quarta e a sétima colunas de cada uma das Tabelas 1.3 e 1.4, concluímos $\neg(P \vee Q)$ e $\neg P \wedge \neg Q$ têm a mesma tabela-verdade, assim como $\neg(P \wedge Q)$ e $\neg P \vee \neg Q$ e isso nos leva às chamadas ***Leis de De Morgan da Lógica***:

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

que podem ser lidas como

"a negação da disjunção de duas sentenças é a conjunção das negações destas sentenças"

e

"a negação da conjunção de duas sentenças é a disjunção das negações destas sentenças".

Consideremos, agora, uma sentença implicativa $P \Rightarrow Q$. A veracidade de tal sentença significa que **todo** elemento que satisfaz P também satisfaz Q. Assim, a **negação da sentença implicativa** $P \Rightarrow Q$ é "existe (pelo menos) **um** elemento que satisfaz P e não satisfaz Q, que se escreve como

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q \tag{1.1}$$

Com relação ao quantificador existencial, consideremos a sentença

$$\exists x \in \mathcal{U} \,|\, P(x) \text{ vale.}$$

Sua negação é

$$\forall x \in \mathcal{U} \,|\, P(x) \text{ não vale}$$

e a negação da sentença com o quantificador universal

$$\forall x \in \mathcal{U} \,|\, P(x) \text{ vale.}$$

é

$$\exists x \in \mathcal{U} \,|\, P(x) \text{ não vale.}$$

Vemos, assim, que a negação transforma o quantificador existencial em universal e o quantificador universal em existencial.

1.5 Axiomas, teoremas, lemas e corolários

As sentenças matemáticas verdadeiras podem ser nomeadas axiomas (ou postulados) e teoremas.

Um **axioma** ou **postulado** é uma sentença matemática aceita como verdadeira, sem ser necessária sua demonstração. Em geral, axiomas formam a base de uma teoria.

Exemplo 1.8

- Postulados de Euclides da Geometria Plana
    1. Pode-se traçar uma única reta passando por dois pontos distintos quaisquer.
    2. Pode-se prolongar um segmento de reta indefinidamente para formar uma reta.
    3. Dados um ponto A e um segmento de reta r quaisquer, sempre é possível construir um círculo centrado em A com raio igual ao comprimento de r.
    4. Todos os ângulos retos são congruentes.
    5. Por um ponto A fora de uma reta dada r, pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada r.
- Axiomas de Kolmogorov da Teoria de Probabilidade

♦♦

Em princípio, um **teorema** é uma sentença matemática para a qual *existe* uma demonstração que garante sua veracidade. Tal sentença pode ser condicional

$$\text{Se } P \text{ então } Q$$

ou implicativa

$$P \Longrightarrow Q.$$

Em ambos os casos, a sentença P é a **hipótese** e Q é a **tese**, ou seja, o resultado a ser provado ou demonstrado.

Nem sempre um teorema é apresentado nessas formas, mas, em geral, é possível reescrevê-lo em um delas.

Exemplo 1.9
Teorema: *Todo número inteiro múltiplo de 5 termina em* 0 *ou* 5.

Mesmo nessa forma é possível identificar a hipótese (todo número inteiro múltiplo de 5) e a tese (termina em 0 ou 5) e reescrever o teorema como

Se um número inteiro é múltiplo de 5, então ele termina em 0 *ou* 5.

ou ainda

Seja n um número inteiro. Se né múltiplo de 5*, então n termina em* 0 *ou* 5*.*

♦♦

Exemplo 1.10
Teorema: *O conjunto dos números primos é infinito.*

A formulação deste teorema constitui-se apenas em um conclusão, mas poderíamos escrever

Se X é o conjunto dos números primos, então X é infinito.

o que deixa claro qual é a hipótese (X é o conjunto dos números primos) e qual é a tese (X é infinito).

♦♦

Alguns teoremas podem ser chamados por outros nomes, como explicitado a seguir.

Corolário é um teorema obtido como consequência de um outro teorema recém-provado.

Lema é um teorema usado para provar um outro teorema que lhe sucede, sendo assim, um resultado auxiliar ou preparatório.

Proposição é um teorema que não é central no contexto e tem importância menor. (Não confunda com o conceito de proposição dado na Definição 1.1.)

Podemos ver que essa nomenclatura expressa uma sequência lógica na demonstração de teoremas.

$$\text{Lema} \implies \text{Teorema} \implies \text{Corolário}$$

1.6 Condição necessária ou suficiente

As sentenças implicativas do tipo $P \Rightarrow Q$ podem ser apresentadas de maneiras diferentes, utilizando-se as expressões "condição necessária" e "condição suficiente". Consideremos, então, a sentença $P \Longrightarrow Q$.

- Como P implica Q, resulta que P é condição suficiente para Q, ou seja, basta que P seja válida para que Q também seja válida.
- Como Q é válida sempre que P o for, então Q é condição necessária para P.

Exemplo 1.11
Vamos considerar um exemplo não matemático para ajudar a entender bem o significado das palavras necessária e suficiente no contexto dos teoremas matemáticos. Sejam, então, as sentenças

P : João nasceu em Minas Gerais

Q : João é brasileiro

Sabemos, então, que $P \Rightarrow Q$. Note que é necessário que João seja brasileiro (Q verdadeira) para que ele seja mineiro (P verdadeira). Por outro lado, o fato de João ter nascido em Minas Gerais (P verdadeira) é suficiente para garantir que João seja brasileiro (Q verdadeira).

♦♦

Exemplo 1.12
Consideremos novamente o teorema apresentado no Exemplo 1.9 em sua forma

Seja n um número inteiro. Se n é múltiplo de 5, então n termina em 0 ou 5.

Definindo as sentenças

P : n é um número inteiro múltiplo de 5

Q : n termina em 0 ou 5

vemos, pelo teorema, que $P \Rightarrow Q$ e podemos escrever

Um número inteiro n terminar em 0 ou 5 é condição necessária para que o número seja múltiplo de 5.

ou ainda

Um número inteiro n ser múltiplo de 5 é condição suficiente para que n termine em 0 ou 5.

♦♦

A **recíproca** de uma sentença implicativa $P \Rightarrow Q$ é a sentença $Q \Rightarrow P$. No Exemplo 1.11, a recíproca é

João é brasileiro $\Rightarrow$ João nasceu em Minas Gerais.

e no Exemplo 1.12, a recíproca é

Seja n um número inteiro. Se n termina em 0 ou 5, então n é múltiplo de 5.

Com esses exemplos, podemos ver que a recíproca de uma sentença verdadeira pode ser falsa (Exemplo 1.11) ou verdadeira (Exemplo 1.12). Dizemos, então, que João ser brasileiro é condição necessária, mas não suficiente, para que João tenha nascido em Minas Gerais. No exemplo dos múltiplos de 5, dizemos que um número inteiro n terminar em 0 ou 5 é condição necessária e suficiente para que esse número seja múltiplo de 5. Neste caso, dizemos que as sentenças

P : n é um número inteiro múltiplo de 5

Q : n é um número inteiro que termina em 0 ou 5 são **equivalentes** e escrevemos

$$P \Leftrightarrow Q$$

As duas sentenças $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$ poderiam ser enunciadas como

Teorema: *Um número inteiro n é múltiplo de 5 se, e somente se, ele termina em 0 ou 5.*

1.7 Exercícios propostos

Seção 1.2

1.1 Determine, dentre as frases a seguir, quais são proposições e quais não são, e explique o porquê.

a) $5 - 2 > 2$

b) x é um número par.

c) $10^{2019} - 1$ é divisível por 3.

d) $-x$ é um número negativo.

e) $\exists a \in \mathbb{R}$ tal que $a^2 > 16$ ou $a^2 < 16$.

f) $\exists a \in \mathbb{R}$ tal que $a^2 > 16$ e $a^2 < 16$.

1.2 Dentre as **proposições** do exercício anterior, determine quais são falsas e quais são verdadeiras.

1.3 No Exercício 1.1, utilize o quantificador universal ou o quantificador existencial para transformar, a seu critério, as sentenças abertas em sentenças.

1.4 [de Morais Filho (2004)] Dentre as afirmações a seguir, identifique quais não representam a ideia do que seja um número par.

Um número **par** é um número inteiro m tal que

a) $m = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

b) m é da forma $m = 2k$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

c) $\forall k \in \mathbb{Z}, m = 2k$.

d) $\exists k \in \mathbb{Z}; m = 2k$.

Seção 1.3

1.5 Determine se cada uma das sentenças é falsa ou verdadeira, justificando sua resposta.

a) $5 \geq 5$.

b) $3 < 5$ e $9 < 6$, ou $10 < 12$.

c) $3 < 5$ ou $9 < 6$, e $10 < 12$.

1.6 Sobre dois números reais x, y sabe-se que $x > 0$ *ou* $y > 0$. Verifique se cada uma das afirmativas a seguir é falsa ou verdadeira, justificando sua resposta.

a) x pode ser negativo.

b) y pode ser zero.

c) y não pode ser negativo.

1.7 Sobre dois números reais x, y sabe-se que $x > 0$ *e* $y < 0$. Verifique se cada uma das afirmativas a seguir é falsa ou verdadeira, justificando sua resposta.

a) x ou y podem ser negativos.

b) x e y podem ser zero.

c) x e y podem ser negativos.

1.8 Sobre dois números reais x, y sabe-se que $x \cdot y < 0$. Verifique se cada uma das afirmativas a seguir é falsa ou verdadeira, justificando sua resposta.

a) $x < 0$ ou $y < 0$.

b) $x < 0$ e $y < 0$.

c) ($x > 0$ e $y < 0$) ou ($x < 0$ e $y > 0$).

d) ($x > 0$ ou $y < 0$) e ($x < 0$ ou $y > 0$).

Seção 1.4

1.9 Escreva cada sentença a seguir usando notação matemática e depois escreva a negação de cada uma delas, também em notação matemática.

a) Existe um número natural n tal que $n > 35$.

b) Não é verdade que (7 é um número primo e 8 é um número ímpar.)

c) (Não é verdade que 7 é um número primo) ou 8 é um número ímpar.

d) Seja $x \in \mathbb{R}$. Se o quadrado de x é menor que 9, então x é maior que -3 e menor que 3.

e) Dado um número real x, existe um número natural n tal que n é maior que x.

1.10 Negue a seguinte definição: Um conjunto $\mathbb{D}$ é **denso** em $\mathbb{R}$ quando

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \epsilon > 0, \exists d \in \mathbb{D} \text{ tal que } |x - d| < \epsilon.$$

Seção 1.6

1.11 [de Morais Filho (2004)] Reescreva cada teorema a seguir usando, primeiramente a expressão *condição necessária* e depois, a expressão *condição suficiente*.

a) Se dois números inteiros terminarem em 76, então o mesmo ocorre com o seu produto.

b) Um número inteiro é divisível por 4 quando o número formado pelos seus dois últimos algarismos for divisível por 4.

c) Todo polígono regular pode ser inscrito em um círculo.

1.12 [de Morais Filho (2004)] Reescreva cada teorema abaixo na forma condicional *Se ... então*.

a) Uma condição suficiente para que um triângulo seja isósceles é que ele tenha dois ângulos internos congruentes.

b) Não ser primo é uma condição necessária para que o número seja da forma $n^4 + 4$ para $n \geq 2$.

1.13 [de Morais Filho (2004)] Enuncie a recíproca de cada proposição a seguir e verifique se é válida.

a) Todo quadrado é um polígono de lados congruentes.

b) Uma condição necessária para que um número seja múltiplo de 8 é que esse número seja par.

c) Se dois números são negativos, então sua soma é negativa.

1.14 [de Morais Filho (2004)] Encontre os erros nas "equivalências" a seguir. Em cada uma delas, há pelo menos uma implicação que não é válida e você deve encontrá-la. Lembre-se que para invalidar uma sentença, basta apresentar um **contraexemplo**, ou seja, um exemplo para o qual a sentença não é válida.

Sejam $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

a) $a = b \Leftrightarrow |a| = |b|$.

b) $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$.

c) $x > 1 \Leftrightarrow |x| > 1$.

Capítulo 2

Métodos de Prova

Como já dito, para que um resultado matemático seja declarado verdadeiro, é necessário apresentar uma demonstração.

Uma demonstração de que a sentença T pode ser deduzida a partir da sentença H ($H \Rightarrow T$) é uma cadeia de argumentações lógicas válidas que usam H para concluir os resultados dados em T. Dito de outra forma, uma demonstração é uma sequência finita de sentenças $P_1, P_2, \cdots, P_k$ tais que cada uma delas é um dos seguintes elementos:

1. Hipóteses
2. Axiomas
3. Definições
4. Teoremas já demonstrados
5. Passos prévios da demonstração já provados

Diferentes métodos de prova podem ser usados para demonstrar teoremas e veremos, agora, alguns deles.

2.1 Teoremas na forma implicativa

Nesta seção, vamos considerar teoremas na forma implicativa, ou seja

$$P(x) \Rightarrow Q(x)$$

em que $P(x)$ e $Q(x)$ são sentenças abertas.

2.1.1 Método direto

Nesse método supomos que $P(x)$ (hipótese) é verdadeira e provamos que $Q(x)$ também é verdadeira, utilizando os elementos listados acima.

Exemplo 2.1 Soma de dois números pares
Se $x, y \in \mathbb{Z}$ são números pares, então $x + y$ também é par.

Demonstração:
Da hipótese, sabemos que x, y são números inteiros pares. Logo, $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $x = 2m$ e $y = 2n$. Logo,

$$x + y = 2m + 2n = 2(m + n)$$

Mas $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow m' = m + n \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$x + y = 2m', \quad m' \in \mathbb{Z}$$

o que prova que $x + y$ é par.

cqd ♦

Exemplo 2.2 Quadrado de número par
Se $x \in \mathbb{Z}$ é um número par, então x^2 também é par.

Demonstração:
Se $x \in \mathbb{Z}$ é par, então $\exists m \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2m$. Então,

$$x^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2 \cdot (2m^2)$$

Mas $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m' = 2m^2 \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$x^2 = 2m', \quad m' \in \mathbb{Z}$$

o que prova que x^2 é par.

cqd ♦

Exemplo 2.3
Se $x \in \mathbb{Z}$ é um número par, então $x^2 + x$ também é par.

Demonstração:
Do Exemplo 2.2 sabemos que x^2 é par; assim, $x^2 + x$ é a soma de dois números pares, que também é par, pelo Exemplo 2.1.

Num contexto em que os exemplos citados não estivessem explícitos, poderíamos fazer a prova completa da seguinte forma:

Se $x \in \mathbb{Z}$ é par, $\exists m \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2m$. Então,

$$x^2 + x = (2m)^2 + 2m = 4m^2 + 2m = 2 \cdot (2m^2) + 2m = 2 \cdot (2m^2 + m)$$

Mas $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m' = 2m^2 + m \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$x^2 + x = 2m', \quad m' \in \mathbb{Z}$$

o que prova que $x^2 + x$ é par.

cqd ♦

2.1.2 Demonstração por absurdo

Para demonstrar $P \Rightarrow Q$ por absurdo, supõe-se que a hipótese P é verdadeira, mas a tese P é falsa, ou seja, supõe-se que $P \wedge \neg Q$ ocorre e a partir daí deduz-se um resultado absurdo, uma sentença contraditória como $R \wedge \neg R$. Como não é possível deduzir uma sentença falsa a partir de uma sentença verdadeira, conclui-se que $P \wedge \neg Q$ é falsa e, por (1.1), isso significa que $\neg(P \Rightarrow Q)$ é falsa e, portanto $P \Rightarrow Q$ é verdadeira, o que justifica o método de demonstração.

Exemplo 2.4
Se $x \in \mathbb{Z}$ é tal que x^2 é par, então x também é par.

Demonstração:
Suponhamos, por absurdo, que x seja ímpar. Então, pelo Exercício 2.2, resulta que x^2 é ímpar, um absurdo, pois contraria a hipótese.

cqd ♦

Exemplo 2.5
Não existem soluções inteiras positivas para a equação $x^2 - y^2 = 1$.

Demonstração:
Uma forma de escrever o resultado dado como uma sentença implicativa é a seguinte: "Se x_0 e y_0 são raízes da equação $x^2 - y^2 = 1$, então x_0 e y_0 não são números inteiros positivos.

Suponhamos, por absurdo, que existam inteiros positivos a, b tais que $a^2 - b^2 = 1$. Então teríamos $(a + b)(a - b) = 1$ e, portanto

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = -1 \end{cases}$$

Do primeiro sistema resulta que $a = 1$ e $b = 0$, contrariando a hipótese de que a e b são inteiros positivos. Do segundo sistema, resulta $a = -1$ e $b = 0$, novamente contrariando a hipótese. Logo, não existem inteiros positivos que satisfazem a equação dada.

cqd ♦

Exemplo 2.6
$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Demonstração:
Embora não esteja explicitamente na forma implicativa, podemos reescrever o resultado como "$x = \sqrt{2} \Rightarrow x \notin \mathbb{Q}$".

Suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Então existem números inteiros p e q primos entre si tais que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2. \tag{2.1}$$

Logo, p^2 é par e, pelo Exemplo 2.4, sabemos que p também é par, ou seja, existe um inteiro k tal que $p = 2k$. Substituindo na Equação (2.1) obtemos

$$(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2 \text{ é par } \Rightarrow q \text{ é par.} \tag{2.2}$$

Concluímos, então, que p e q são ambos pares e, portanto, múltiplos de 2, o que contraria a hipótese de serem primos entre si. Logo, não podemos supor que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ e isso completa a demonstração por absurdo.

cqd ♦

Exemplo 2.7
Existem infinitos números primos.

Demonstração:
Seja $A = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ um conjunto finito qualquer de números primos. Faça

$$n = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$$
$$q = n + 1$$

Se q é primo, então existe um número primo fora de A.

Se q não é primo, então q é divisível por algum número primo p^*, isto é, existe um inteiro i_1 tal que

$$\frac{q}{p^*} = i_1.$$

Suponhamos que $p^* \in A$. Então, p^* é divisor de n, ou seja, existe um inteiro i_2 tal que

$$\frac{n}{p^*} = i_2.$$

Resulta que

$$q = n + 1 = p^* i_1 \tag{2.3}$$
$$n = p^* i_2 \tag{2.4}$$

Substituindo (2.4) em (2.3) obtemos

$$p^* i_2 + 1 = p^* i_1 \Rightarrow i_2 + \frac{1}{p^*} = i_1 \tag{2.5}$$

Como i_1 e i_2 são inteiros, para que (2.5) seja válida é necessário que 1 seja divisível por p^*, o que é um absurdo, pois 1 só é divisível por ele mesmo. Logo, $p^* \notin A$, ou seja, existe um número primo fora de A.

Provamos, então, que qualquer que seja o conjunto finito A de números primos, sempre haverá um número primo que não pertence a A. Logo, há infinitos números primos.

cqd ⧫

2.1.3 Demonstração pela contrapositiva

A **contrapositiva** da sentença $P \Rightarrow Q$ é a sentença $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Um outro método de prova utiliza a contrapositiva, com base no Princípio da Contrapositividade apresentado a seguir.

Teorema 2.1 Princípio da Contrapositividade
$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg Q \Longrightarrow \neg P)$

Demonstração:
Antes de passar à demonstração, que será feita usando o método de redução a um absurdo, note que este princípio fornece um outro método de prova: em vez de provar que $P \Rightarrow Q$ é verdadeira, podemos provar que sua contrapositiva é verdadeira. Para ilustrar de forma intuitiva o por quê da validade deste princípio, seja A o **conjunto verdade** de P, isto é, o conjunto de todos os elementos que tornam P verdadeira e, analogamente, seja B o conjunto verdade de Q. Como $P \Rightarrow Q$, então $A \subset B$ (veja Figura 2.1). Por outro lado, se um elemento não está em B, então ele também não está em A, ou seja, $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

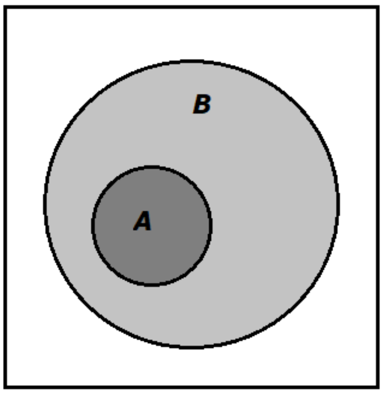


Figura 2.1 – Ilustração do Princípio da Contrapositividade

Passemos, agora, à demonstração formal do teorema, que consiste em duas sentenças implicativas.

(a) $(P \Rightarrow Q) \Longrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

Suponhamos, por absurdo, que $\neg Q \not\Rightarrow \neg P$, isto é, suponhamos que $\neg Q \wedge \neg(\neg P)$ seja verdadeira. Pelo princípio da dupla negação, resulta que $\neg Q \wedge P$ é verdadeira, ou seja, $\neg Q$ e P são ambas verdadeiras. Da hipótese segue que Q também é verdadeira, ou seja, chegamos ao absurdo $Q \wedge \neg Q$ é verdadeira. Logo, $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

(b) $(\neg Q \Rightarrow \neg P) \Longrightarrow (P \Rightarrow Q)$

De maneira análoga, suponhamos por absurdo que $P \not\Rightarrow Q$, isto é, suponhamos que $P \wedge \neg Q$ seja verdadeira. Então, P e $\neg Q$ são ambas verdadeiras. Da hipótese, resulta que $\neg P$ também é verdadeira, ou seja, chegamos ao absurdo $P \wedge \neg P$ é verdadeira. Logo, $P \Rightarrow Q$.

$\square$

Exemplo 2.8
Vamos usar o método da contrapositividade, ou da contraposição, para mostrar que se m, n são inteiros tais que $m + n$ é par, então m e n têm a mesma paridade.

Demonstração:
A hipótese da sentença original é

P : m, n são inteiros tais que $m + n$ é par

e a tese é

Q : m e n têm a mesma paridade.

Assim, a contrapositiva é "Se m, n são inteiros positivos de paridades opostas, então $m + n$ não é par", com hipótese

$\neg Q$: m, n são inteiros de paridades opostas

e tese

$\neg P$: $m + n$ não é par, o que é equivalente a $m + n$ é ímpar.

Para fazer a demonstração da contrapositiva, suponhamos, sem perda de generalidade, que m seja um número inteiro par e n, um número inteiro ímpar. Então existem inteiros m' e n' tais que

$$\left.\begin{array}{l} m = 2m' \\ n = 2n' + 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow m + n = 2m' + 2n' + 1 = 2(m' + n') + 1 \Longrightarrow m + n \text{ é ímpar, já que } m', n' \in \mathbb{Z}$$

cqd ♦

2.2 Teoremas não explicitados na forma implicativa

2.2.1 Afirmações de existência

Alguns teoremas tomam a forma $\exists x \in A$ tal que $P(x)$ é verdadeira. Para demonstrar tais teoremas podemos *exibir* um tal x ou usar resultados que *garantam* a existência de um x.

Exemplo 2.9
$\exists x \in \mathbb{Z}$ tal que x é múltiplo de 2 e 35 simultaneamente.

Demonstração:
Basta fazer $x = 2 \cdot 35 = 70$.

cqd ♦

Exemplo 2.10
Se $p(x) = x^7 + 2x^3 + 2$, então $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x_0) = 0$.

Demonstração:
Não existem fórmulas fechadas para as raízes de polinômios de grau maior ou igual a 5. Mas note o seguinte: $p(-1) = -1 - 2 + 2 = -1$ e $p(1) = 1 + 2 + 2 = 5$. Como $p(x)$ é uma função contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário [1], existe $x_0 \in [-1, 1]$ tal que $p(x_0) = 0$.

Veja a Figura 2.2: como a função é contínua, para passar do ponto A para o ponto B, o gráfico terá que cruzar o eixo x em pelo menos um ponto x_0, ou seja, existe x_0 tal que $p(x_0) = 0$.

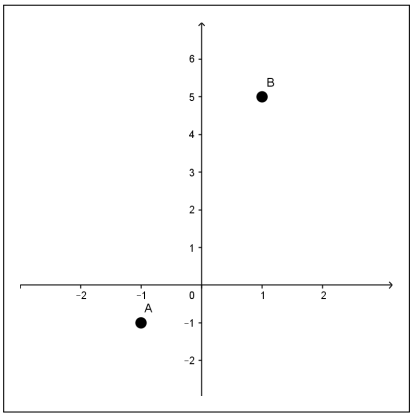


Figura 2.2 – Ilustração do Teorema do Valor Intermediário para o Exemplo 2.9

cqd ♦

[1] Se uma função real f definida num intervalo $[a, b]$ é continua, então dado qualquer valor d entre $f(a)$ e $f(b)$, existe pelo menos um c entre a e b tal que $f(c) = d$.

2.2.2 Afirmações de impossibilidade

Para provar afirmações do tipo

$$\nexists a \in A \text{ tal que } P(a) \text{ é verdadeira.}$$

podemos, por exemplo, usar o método de demonstração por absurdo, ou seja, a partir da hipótese de existência de algum a, chegar em algum resultado absurdo como $Q \wedge \neg Q$.

Exemplo 2.11
Não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 + 2n + 3 = n(n+1)$.
Demonstração:
Suponhamos, por absurdo, que exista n_0 tal que

$$n_0^2 + 2n_0 + 3 = n_0(n_0 + 1) \Rightarrow n_0^2 + 2n_0 + 3 = n_0^2 + n_0 \Rightarrow n_0 + 3 = 0$$

o que é absurdo, pois não existe número natural que, somado ao 3, dê 0. Logo, $\nexists n \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 + 2n + 3 = n(n+1)$. Note que a hipótese de n ser natural é fundamental!

cqd ♦

2.2.3 Afirmações de universalidade

Para demonstrar a validade de proposições da forma

$$\forall a \in A,\ P(a) \text{ é verdadeira.}$$

podemos usar o método direto já visto.

Quando $A = \mathbb{N}$, a proposição de universalidade se torna

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \text{ é verdadeira}$$

e veremos, na seção 2.3, um método de demonstração baseado no Princípio da Indução Matemática.

2.2.4 Falsidade de afirmações de universalidade

Para provar a falsidade de afirmações de validade do tipo

$$\forall a \in A,\ P(a) \text{ é verdadeira}$$

basta apresentar um contra-exemplo.

Exemplo 2.12
Verifique se é verdadeira a afirmação $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 - n + 41$ é primo.

Solução:
É interessante notar que a afirmação é válida para $n \in \mathbb{N}$, $n < 41$. (Veja a lista dos 1000 primeiros números primos em `https://pt.wikibooks.org/wiki/Teoria_de_números/10000_primos`.) No entanto, $n = 41 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$, que não é primo, já que é divisível por 41. Este exemplo mostra, mais uma vez, que, para provar um resultado, não basta verificar sua validade para alguns casos; é necessário provar que vale para todos os casos envolvidos no resultado. ♦♦

2.3 Princípio da Indução Matemática

Nesta seção, estudaremos o princípio da indução matemática, que é uma importante ferramenta para demonstração da veracidade de sentenças abertas de universalidade definidas no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Assim, reapresentamos algumas definições para tal contexto, lembrando que estamos adotando que $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$.

Definição 2.1 Sentença aberta em $\mathbb{N}$
Uma sentença aberta em $\mathbb{N}$ é uma sentença $P(n)$ que depende de uma variável natural n.

Definição 2.2 Conjunto verdade
Dada uma sentença aberta em $\mathbb{N}$, seu conjunto verdade é um subconjunto V definido como

$$V = \{n \in \mathbb{N}; P(n) \text{ é verdadeira}\}$$

A questão que se coloca é: como demonstrar que uma sentença aberta é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$? Uma resposta é dada pelo princípio da indução matemática.

Princípio da indução matemática

Dado um subconjunto S do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ tal que

1. $1 \in S$ e
2. $n \in S \Longrightarrow n + 1 \in S$

então $S = \mathbb{N}$.

Dito de outra forma, o único subconjunto de $\mathbb{N}$ que satisfaz as condições (1) e (2) acima é o próprio $\mathbb{N}$. Assim, para demonstrar que uma sentença aberta $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, basta mostrar que seu conjunto verdade V satisfaz a essas condições, o que implicará que $V = \mathbb{N}$.

Teorema 2.2 Demonstração por indução matemática
Seja $P(n)$ uma sentença aberta em $\mathbb{N}$. Se

1. *$P(1)$ é verdadeira e*
2. *$\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ verdadeira $\Longrightarrow P(n+1)$ verdadeira,*

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:
Note que a hipótese (1) é equivalente a dizer que $1 \in V$ e a hipótese (2) é equivalente a $n \in V \Rightarrow n + 1 \in V$. Pelo princípio da indução matemática, resulta que $V = \mathbb{N}$.

□

É possível generalizar o teorema anterior para casos em que determinada propriedade seja válida apenas para inteiros maiores que determinado valor a. Por exemplo, a propriedade $2^n > n^2$ é válida apenas para $n \geq 5$. (Verifique que ela não é válida para $n \leq 4$.)

Teorema 2.3 Demonstração por indução matemática - Caso geral
Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$ e seja $a \in \mathbb{N}$ qualquer. Se

1. *$P(a)$ é verdadeira e*
2. *$\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq a$, $P(n)$ verdadeira $\Longrightarrow P(n+1)$ verdadeira,*

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Demonstração:
Note que provar que $P(n)$ é verdadeira para $n \geq a$ é equivalente a provar que $P(n + a - 1)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

A seguir, apresentamos uma versão que será útil em demonstrações de propriedades definidas recursivamente em que o $n-$ésimo termo depende de dois ou mais termos anteriores.

Teorema 2.4 Indução completa
Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$ e seja $a \in \mathbb{N}$ qualquer. Se

1. *$\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq a$, $P(i)$ verdadeira para $a \leq i \leq n \Longrightarrow P(n+1)$ verdadeira*

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Demonstração:
Não apresentaremos a demonstração deste teorema, que pode ser vista em Hefez (2012). Mas é importante notar a diferença entre os Teoremas 2.3 e 2.4, conforme se ilustra na **Figura 2.3**: na indução completa, a veracidade de $P(n+1)$ depende da veracidade da afirmativa para todos os naturais anteriores, e não apenas do natural imediatamente anterior.

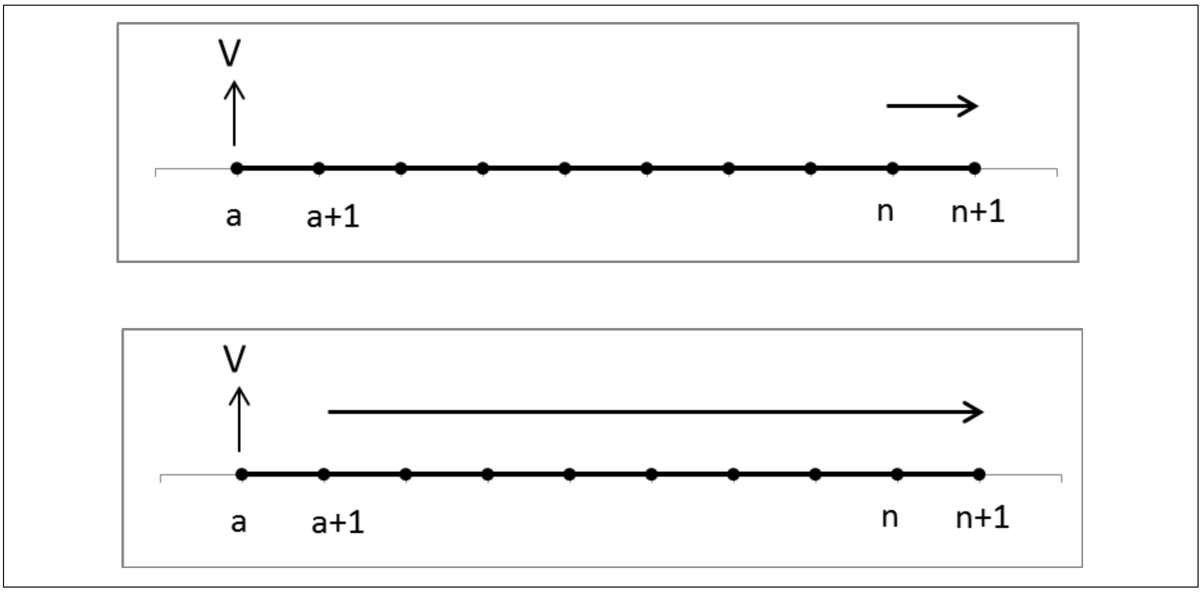


Figura 2.3 – Ilustração dos teoremas sobre indução matemática

□

Exemplo 2.13 Soma dos n primeiros números naturais
Obtenha uma expressão para a soma dos n primeiros números naturais e demonstre sua veracidade.

Solução:
Vamos denotar por S_n a soma dos n primeiros números naturais, ou seja,

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n$$

Seguindo o artifício usado por Gauss, note que podemos escrever S_n de duas formas equivalentes, já que a adição é comutativa.

$$\begin{array}{ccccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n \\ S_n & = & n & + & n-1 & + & \cdots & + & 1 \end{array}$$

Somando termo a termo, obtemos

$$\begin{array}{ccccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n \\ S_n & = & n & + & n-1 & + & \cdots & + & 1 \\ \hline 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) \end{array}$$

o que resulta em

$$2S_n = n(n+1) \Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Embora esse seja um argumento bastante interessante, não constitui uma prova formal de que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2.6}$$

Vamos demonstrar essa igualdade por indução, ou seja, vamos provar por indução que a sentença

$P(n) : S_n = \dfrac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

é verdadeira.

Passo 1: $P(1)$ é verdadeira.

De fato: $S_1 = 1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$.

Passo 2: Provar que $P(n)$ verdadeira $\Longrightarrow P(n+1)$ verdadeira.

Hipótese de indução (HI): $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Tese: $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

Dem:

$$S_{n+1} = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = S_n + (n+1)$$

Pela hipótese de indução, resulta

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

o que completa demonstração. ♦♦

Exemplo 2.14 Soma dos produtos de dois naturais consecutivos
Prove que

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \tag{2.7}$$

Solução:

Nossa sentença é $P(n) : \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Vamos provar, por indução, que ela é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$.

Passo 1: $P(1)$ é verdadeira.

De fato: $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} i(i+1) = 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$.

Passo 2: Provar que $P(n)$ verdadeira $\Longrightarrow P(n+1)$ verdadeira.

HI: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Tese: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

De fato:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) &= \sum_{i=1}^{n} i(i+1) + (n+1)(n+2) \\
&\underbrace{=}_{\text{(HI)}} \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}
\end{aligned}$$

o que completa demonstração. ♦♦

2.3.1 Definição por recorrência

Define-se uma expressão E_n, **por recorrência**, para todo número natural n em duas etapas: (i) define-se claramente E_1 e (ii) estabelece-se uma forma de se obter E_{n+1} a partir de E_n. Pelo princípio da indução matemática, resulta que, com esse procedimento, E_n fica perfeitamente definida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Quando estudamos a soma dos n primeiros números naturais no Exemplo 2.13, definimos:

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n$$

Podemos definir essa soma por recorrência, o que nos libera do uso dos três pontinhos $\cdots$, recurso intuitivo, mas pouco formal. Para isso, fazemos:

- $S_1 = 1$
- $S_n = S_{(n-1)} + n \qquad \forall n \geq 2$

Analogamente, podemos definir o fatorial $n!$ de um número natural n como

- $0! = 1$
- $n! = (n-1)!n \ \forall n \geq 1$

2.4 Exercícios propostos

2.1 Prove que se $x, y \in \mathbb{Z}$ são números ímpares, então $x + y$ é par.

2.2 Prove que se $x \in \mathbb{Z}$ é ímpar, então x^2 também é ímpar.

2.3 Prove que se $x \in \mathbb{Z}$ é ímpar, então $x^2 + x$ é par.

2.4 Demonstre, por absurdo, os seguintes resultados:

a) Não existem soluções inteiras positivas para a equação $x^2 - y^2 = 10$.

b) Sejam a, b, c são números inteiros. Se a não divide bc, então a não divide b.

c) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $4n^s + 4n + 5 \neq (2n + 1)^2 - 3$.

2.5 Use o método da contraposição para demonstrar os seguintes resultados:

a) Não existem soluções inteiras positivas para a equação $x^2 - y^2 = 10$.

b) Se m, n são inteiros tais que $m + n$ é ímpar, então m e n têm paridades opostas.

c) Se a, b são números reais tais que $a \cdot b$ é irracional, então ou a ou b é irracional.

2.6 Prove que existem inteiros positivos n_1, n_2 tais que $117 = n_1^2 - n_2^2$.

2.7 Prove, por indução que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i - 1) = n^2, \ \forall n \in \mathbb{N}$. De que trata esse resultado?

2.8 Prove, por indução, que a soma dos cubos de três números naturais consecutivos é sempre divisível por 9.

2.9 Uma progressão aritmética (p.a.) de razão r e termo inicial a é uma sequência de números $a_i, \ i = 1, 2, \cdots$ tal que $a_1 = a$ e cada termo a partir do segundo é igual ao anterior somado de r, ou seja,

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a \\
a_2 &= a_1 + r \\
a_3 &= a_2 + r \\
a_4 &= a_3 + r
\end{aligned}
$$

Prove, por indução, que o termo geral pode ser escrito como

$$a_n = a + (n - 1) \cdot r$$

2.10 Reescreva cada um dos resultados a seguir com notação de somatório e demonstre sua validade usando o método de demonstração por indução.

(a) $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

(b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(c) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

(d) $1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n-1)2^n$

(e) $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Parte II

Teoria de Conjuntos e Conjuntos Numéricos

Capítulo 3

Teoria de Conjuntos

3.1 Definições básicas

Um **conjunto** é uma coleção bem definida de objetos. Esses objetos são chamados **elementos** do conjunto.

Denotaremos os conjuntos por letras maiúsculas (A,B,C) e os elementos por letras minúsculas (a,b,c,x,y). Para indicar que um elemento a **pertence** ao conjunto A faremos uso do símbolo $\in$ e escrevemos

$$a \in A$$

que se lê "a pertence a A". Para indicar que um elemento b não pertence ao conjunto A escrevemos

$$b \notin A$$

que se lê "b não pertence a A.

Na teoria de conjuntos, assume-se que os conjuntos de interesse estejam contidos em um *grande* conjunto, chamado **conjunto universo** ou **universal**. Por exemplo, na geometria plana, o conjunto universo é o conjunto de todos os pontos no plano. Em estudos sobre populações humanas, o conjunto universo poderia ser o conjunto de todos os seres humanos no mundo. Denotaremos o conjunto universo pela letra $\mathcal{U}$.

Há duas maneiras básicas de se especificar um conjunto e seus elementos. A primeira consiste em listar todos os elementos do conjunto, listagem essa que deve ser colocada entre chaves, com os elementos separados por vírgula. Por exemplo, podemos escrever o conjunto das letras vogais como

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

Outra maneira é estabelecer uma propriedade que os elementos do conjunto devem satisfazer.

Por exemplo, o conjunto dos números naturais pares pode ser escrito como

$$B = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ é par}\}$$

ou como

$$B = \{2, 4, 6, \ldots\}.$$

Dois conjuntos A e B são ditos **iguais** se todo elemento de A é também elemento de B e, reciprocamente, todo elemento de B é também elemento de A. Ou seja,

$$A = B \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ \qquad\text{e} \\ x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$$

Alguns conjuntos podem não ter qualquer elemento. Por exemplo, se

$$C = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x^2 = 3\}$$

então C não tem elementos, pois não existe número natural cujo quadrado seja 3. Um conjunto que não possui elementos é chamado **conjunto vazio** e é representado pelo símbolo $\varnothing$.

Se todo elemento de um conjunto A é também elemento de um conjunto B, dizemos que A é **subconjunto** de B ou ainda que A **está contido** em B e escrevemos $A \subseteq B$. Pode-se ler também como B **contém** A, que se escreve como $B \supseteq A$. Assim,

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Se A é subconjunto de B, mas B possui pelo menos um elemento que não pertence a A, então dizemos que A é **subconjunto próprio** de B e escrevemos $A \subset B$ ou $B \supset A$.

Teorema 3.1

(i) Para qualquer conjunto A, $\varnothing \subseteq A \subseteq \mathcal{U}$.

(ii) Para qualquer conjunto A, $A \subseteq A$.

(iii) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

(iv) $A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Demonstração:

(i) Suponhamos, por absurdo, que $\varnothing$ *não* seja subconjunto de A. Então $\exists a \in \varnothing$ tal que $a \notin A$. Mas isso é absurdo, pois $\varnothing$ não possui elementos e isso completa prova.

Pela própria definição do conjunto universo, resulta que $x \in A \Rightarrow x \in \mathcal{U}$. Logo, $A \subseteq \mathcal{U}$.

(ii) Se $x \in A$, é claro que $x \in A$, ou seja, $A \subseteq A$.

(iii) As hipóteses são $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ e a tese é $A \subseteq C$. Seja, então, $x \in A$ um elemento qualquer de A.

$$x \in A \underbrace{\Longrightarrow}_{A \subseteq B} x \in B \underbrace{\Longrightarrow}_{B \subseteq C} x \in C$$

ou seja, $x \in A \Rightarrow x \in C$ e, como x é qualquer, conclui-se que $A \subseteq C$. Na Figura 3.1 ilustramos esse resultado com um diagrama de Venn, que é uma representação pictórica de conjuntos. O conjunto universal $\mathcal{U}$ é representado pelo retângulo e os eventos de interesse, por círculos.

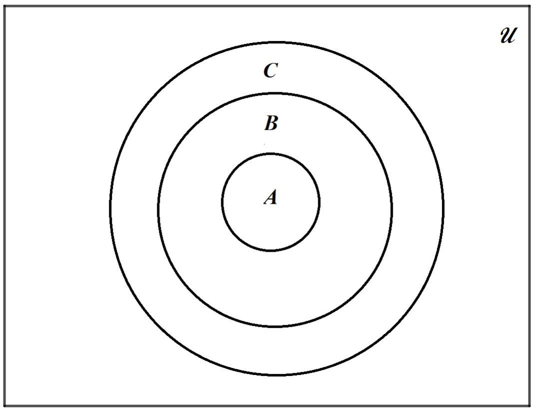


Figura 3.1 – $A \subseteq B \subseteq C$

(iv) Da definição de igualdade de conjuntos, temos

$$A = B \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B & \therefore \quad A \subseteq B \\ \text{e} & \\ x \in B \Rightarrow x \in A & \therefore \quad B \subseteq A \end{cases}$$

ou seja, $A = B \Longrightarrow A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Reciprocamente,

$$\begin{cases} A \subseteq B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B \\ \text{e} \\ B \subseteq A \Leftrightarrow x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$$

ou seja, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A \Longrightarrow A = B$.

□

Exemplo 3.1 Adaptado de Lipschutz (1999)

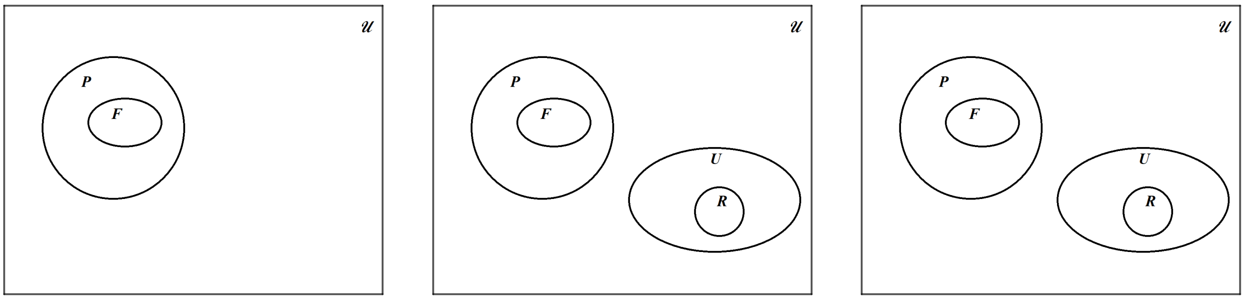
Verifique se o seguinte argumento é válido, com o uso de diagramas de Venn.

H_1 :	Minhas panelas são os únicos objetos que tenho que são feitos de ferro.
H_2 :	Os presentes que você me deu são muito úteis.
H_3 :	Nenhuma das minhas panelas tem qualquer serventia para mim.
T :	Os presentes que você me deu não são feitos de ferro.

As afirmativas H_1, H_2, H_3 são as hipóteses e a afirmativa T é a conclusão. O argumento será válido se a conclusão seguir logicamente das hipóteses.

Solução:

Podemos ver que os conjuntos de interesse são objetos de ferro (F), objetos úteis (U) e inúteis (U^c), minhas panelas (P) e o seu presente (R). Como as minhas panelas são os únicos objetos de ferro, segue $F \subseteq P$ (Figura 3.2a). Note que eu posso ter panelas feitas de outro material. Por outro lado, como minhas panelas não têm serventia para mim, segue que $P \nsubseteq U$ (Figura 3.2b). Como os presentes que você me deu são úteis, resulta que $R \subseteq U$ (Figura 3.2c). Vemos, assim, que a conclusão é válida.



(a) $F \subseteq P$ **(b)** $P \nsubseteq U$ **(c)** $R \subseteq U$

Figura 3.2 – Solução do Exemplo 3.1

♦♦

3.2 Operações com conjuntos: interseção, união e complementaridade

Através de operações elementares de conjuntos, é possível obter outros conjuntos. Na Figura 3.3 ilustramos esses novos conjuntos como áreas sombreadas no respectivo diagrama de Venn.

- A **interseção** de dois conjuntos A e B é o conjunto $A \cap B$ formado pelos elementos que pertencem a A ***e*** a B:

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} \,|\, x \in A \text{ e } x \in B\}$$

  Se $A \cap B = \varnothing$, os conjuntos A e B são **disjuntos**.

- A **união** de dois conjuntos A e B é o conjunto $A \cup B$ formado pelos elementos que pertencem a A ***ou*** a B.

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

- O **complementar** de A é o conjunto formado por todos os elementos de $\mathcal{U}$ que não pertencem a A, ou seja,
$$A^c = \{x \in \mathcal{U} \,|\, x \notin A\}$$

Teorema 3.2
Sejam A e B conjuntos quaisquer. Então

(i) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

(ii) $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$

Demonstração:

$$x \in A \cap B \Longrightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow A \cap B \subseteq A \\ \qquad e \\ x \in B \Rightarrow A \cap B \subseteq B \end{cases}$$

$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \quad \therefore \quad A \subseteq A \cup B$

$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \quad \therefore \quad B \subseteq A \cup B$

$\square$

Teorema 3.3
Sejam A e B conjuntos quaisquer. Então as seguintes afirmativas são equivalentes:

(a) $A \subseteq B$

(b) $A \cap B = A$

(c) $A \cup B = B$

Demonstração:

(i) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

Suponhamos, por absurdo, que $A \cap B \neq A$. Como $A \cap B \subseteq A$ pelo teorema anterior, resulta que $A \cap B$ é subconjunto próprio de de A. Logo, existe $x \in A$ tal que $x \notin A \cap B$. Mas, como $A \subseteq B$, $x \in A \Rightarrow x \in B$, o que nos leva a $x \in A$ e $x \in B$, ou seja, $x \in A \cap B$, um absurdo.

(ii) $A \cap B = A \Rightarrow A \cup B = B$

Suponhamos, por absurdo, que $A \cup B \neq B$. Como $B \subseteq A \cup B$ pelo teorema anterior, resulta que B é subconjunto próprio de de $A \cup B$. Logo, existe $x \in A \cup B$ tal que $x \notin B$. Então, temos que ter $x \in A$. Mas, como $A = A \cap B$, resulta que $x \in B$, um absurdo.

(iii) $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$

Suponhamos, por absurdo, que $A \nsubseteq B$. Então, existe $x \in A$ tal que $x \notin B$. Mas $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$, pelo teorema anterior. Como, por hipótese, $A \cup B = B$, temos que ter $x \in B$, um absurdo.

□

Exemplo 3.2
Considere os seguintes conjuntos em $\mathcal{U} = \{\text{letras do alfabeto português}\}$:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$
$$B = \{a, e, f, g, o\}$$
$$C = \{e, g, h, i, u\}$$

Liste os elementos dos seguintes conjuntos:

$$A \cap B \qquad A \cup C \qquad (A \cup B) \cap C \qquad A^c \qquad A \setminus B \qquad B \setminus C$$

Solução:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{a, e, o\} \\ A \cup C &= \{a, e, g, h, i, o, u\} \\ (A \cup B) \cap C &= \{e, g, i, u\} \\ A^c &= \{\text{letras do alfabeto português que são consoantes}\} \\ A \setminus B &= \{i, u\} \\ B \setminus C &= \{a, f, o\} \end{aligned}$$

♦♦

3.2.1 Propriedades: interseção, união, complementaridade

Seja E uma equação da álgebra dos conjuntos. Por exemplo, $A \cup \varnothing = A$. O **dual** de E, denotado por E^*, é a equação obtida a partir de E substituindo-se cada ocorrência de $\cap, \cup, \Omega, \varnothing$ por $\cup, \cap, \varnothing, \Omega$, respectivamente. Por exemplo, o dual de $A \cup \varnothing = A$ é $A \cap \Omega = A$. O **princípio da dualidade** estabelece que, se uma equação E da álgebra dos conjuntos é verdadeira, então seu dual E^* também o é.

Com base no princípio da dualidade, apresentamos a seguir as propriedades das operações de união, interseção e complementaridade, organizadas aos pares de tal forma que, em cada par, uma equação é o dual da outra.

1. Identidade

$$\begin{aligned} A \cap \varnothing &= \varnothing \\ A \cup \mathcal{U} &= \mathcal{U} \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} A \cup \varnothing &= A \\ A \cap \mathcal{U} &= A \end{aligned} \tag{3.2}$$

2. Complementar

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^c &= \varnothing \\ \varnothing^c &= \mathcal{U} \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} A \cap A^c &= \varnothing \\ A \cup A^c &= \mathcal{U} \end{aligned} \tag{3.4}$$

3. Involução

$$(A^c)^c = A$$

4. Idempotência

$$\begin{aligned} A \cap A &= A \\ A \cup A &= A \end{aligned} \tag{3.5}$$

5. Comutatividade

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cup B &= B \cup A \end{aligned} \tag{3.6}$$

6. Associatividade

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \end{aligned} \tag{3.7}$$

7. Distributividade

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned} \tag{3.8}$$

8. Absorção

$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= A \\ A \cup (A \cap B) &= A \end{aligned} \tag{3.9}$$

9. Leis de De Morgan

$$\begin{aligned}(A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \\ (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \qquad (3.10)\end{aligned}$$

A demonstração das seis primeiras propriedades é imediata e você irá demonstrá-las no Exercício 3.4. Iremos demonstrar aqui a primeira das equações de cada uma das três últimas propriedades e no Exercício 3.5 você irá demonstrar a segunda equação.

- Distributividade: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

  Seja $x \in A \cap (B \cup C)$. Então

$$\begin{cases} x \in A \\ e \\ x \in B \cup C \Rightarrow x \in B \text{ ou } x \in C \end{cases}$$

  Se $x \in B$, então $x \in A$ e $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

  Se $x \in C$, então $x \in A$ e $x \in C \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cup C)$.

  Logo, $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cup C) \quad \therefore \quad A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

  Reciprocamente, seja $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Então $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$.

  Se $x \in A \cap B$, então $x \in A$ e $x \in B \subseteq B \cup C$ e, portanto, $x \in A \cap (B \cup C)$.

  Se $x \in A \cap C$, então $x \in A$ e $x \in C \subseteq B \cup C$ e, portanto, $x \in A \cap (B \cup C)$.

  Logo, $x \in (A \cap B) \cup (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C) \quad \therefore \quad A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

  Do Teorema 3.2 resulta que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- Absorção: $A \cap (A \cup B) = A$

  Como $A \subseteq A \cup B$, pelo Teorema 3.3, resulta que $A \cap (A \cup B) = A$.

- Leis de De Morgan: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

  Seja $x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ ou $x \notin B \Rightarrow x \in A^c$ ou $x \in B^c \Rightarrow x \in (A^c \cup B^c)$

  Logo, $x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \in (A^c \cup B^c) \quad \therefore \quad (A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$.

  Reciprocamente, suponha $x \in A^c \cup B^c \Rightarrow x \in A^c$ ou $x \in B^c \Rightarrow x \notin A$ ou $x \notin B$.

  Se $x \notin A$, então $x \notin A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B)^c$.

  Se $x \notin B$, então $x \notin A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B)^c$.

  Logo, $x \in (A^c \cup B^c) \Rightarrow x \in (A \cap B)^c \quad \therefore \quad A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$.

  Do Teorema 3.2 resulta que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

3.3 Diferença e diferença simétrica

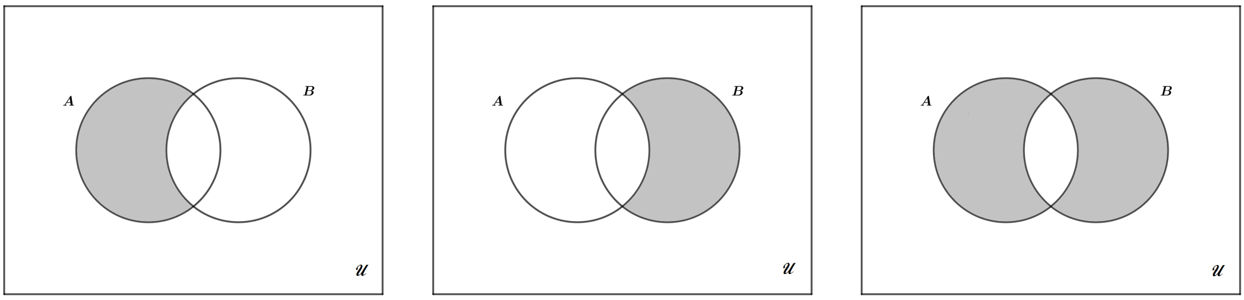
A **diferença** entre A e B é o conjunto $A \setminus B$ formado por todos os elementos de A que não pertencem a B. Assim, $A \setminus B$ é o complementar de B relativo a A.

$$A \setminus B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Assim como com números, a diferença não é comutativa, isto é, $A \setminus B \neq B \setminus A$, como ilustrado nas Figuras 3.3a e 3.3b. Note que podemos escrever $A \setminus B = A \cap B^c$ e $B - A = B \cap A^c$.

A **diferença simétrica** entre dois conjuntos A e B, representada aqui por $A \triangle B$ e ilustrada na Figura 3.3c, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B, mas não a ambos. Em notação simbólica,

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \tag{3.11}$$



(a) $A \setminus B$ **(b)** $B \setminus A$ **(c)** $A \triangle B$

Figura 3.3 – Diferença e diferença simétrica entre conjuntos

Alguns textos utilizam a notação $A - B$ em vez de $A \setminus B$ e $A \oplus B$ em vez de $A \triangle B$ [ver Lipschutz (1999)].

Observando a Figura 3.3c, podemos ver que $A \triangle B$ é o conjunto dos elementos que pertencem a exatamente um dos conjuntos A e B, conforme mostraremos a seguir, com uso das propriedades das operações vistas anteriormente.

$$\begin{aligned}
A \triangle B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \\
&= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (B \cap B^c) \\
&= \varnothing \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup \varnothing = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)
\end{aligned}$$

Essa equivalência permite definir a diferença simétrica como

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \tag{3.12}$$

3.3.1 Propriedades da diferença

Sejam $A, B, C \in \mathcal{U}$ conjuntos quaisquer. São válidas as seguintes propriedades.

1. $A \setminus \varnothing = A$

   De fato: $A \setminus \varnothing = A \cap \varnothing^c = A \cap \mathcal{U} = A$.

2. $\mathcal{U} \setminus A = A^c$

   De fato: $\mathcal{U} \setminus A = \mathcal{U} \cap A^c = A^c$.

3. $A \setminus A = \varnothing$

   De fato: $A \setminus A = A \cap A^c = \varnothing$.

4. $A \setminus A^c = A$

   De fato: $A \setminus A^c = A \cap (A^c)^c = A \cap A = A$.

5. $(A \setminus B)^c = A^c \cup B$

   De fato: $(A \setminus B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup (B^c)^c = A^c \cup B$

6. $A \setminus B = B^c \setminus A^c$

   De fato: $A \setminus B = A \cap B^c = B^c \cap A = B^c \cap (A^c)^c = B^c \setminus A^c$

7. (a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

   De fato: $(A \setminus B) \setminus C = (A \cap B^c) \setminus C = A \cap B^c \cap C^c = A \cap (B^c \cap C^c) = A \cap (B \cup C)^c = A \setminus (B \cup C)$

   (b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

   De fato: $A \setminus (B \setminus C) = A \cap (B \setminus C)^c \underbrace{=}_{\text{Prop.5}} A \cap (B^c \cup C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

8. (a) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$

   De fato:

   $$A \cup (B \setminus C) = A \cup (B \cap C^c) = (A \cup B) \cap (A \cup C^c) = (A \cup B) \cap (A^c \cap C)^c = (A \cup B) \setminus (C \cap A^c) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$$

   (b) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

   De fato:

   $$\begin{aligned} A \cap (B \setminus C) &= A \cap (B \cap C^c) = A \cap B \cap C^c = (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B \cap A^c) \\ &= (A \cap B) \cap (A^c \cup C^c) = (A \cap B) \cap (A \cap C)^c = (A \cap B) \setminus (A \cap C) \end{aligned}$$

   Esses dois resultados mostram que a interseção é distributiva em relação à diferença, o que não ocorre com a união.

9. (a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

   De fato: $A \setminus (B \cup C) = A \cap (B \cup C)^c = A \cap B^c \cap C^c = A \cap B^c \cap A \cap C^c = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

(b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

De fato: $A \setminus (B \cap C) = A \cap (B \cap C)^c = A \cap (B^c \cup C^c) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

10. (a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

De fato: $(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap C^c = (C^c \cap A) \cup (C^c \cap B) = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

(b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

De fato: $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \cap C^c = A \cap B \cap C^c = A \cap C^c \cap B \cap C^c = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

11. (a) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

De fato: $A \setminus (A \setminus B) = A \setminus (A \cap B^c) = A \cap (A \cap B^c)^c = A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B) = A \cap B$

(b) $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$

De fato: $(A \setminus B) \setminus B = (A \setminus B) \cap B^c = (A \cap B^c) \cap B^c = A \cap B^c = A \setminus B$

3.3.2 Propriedades da diferença simétrica

Sejam $A, B, C \in \mathcal{U}$ conjuntos quaisquer. São válidas as seguintes propriedades.

1. $A \triangle A = \varnothing$

De fato: $A \triangle A = (A \cap A^c) \cup (A^c \cap A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$

2. $A \triangle \varnothing = A$

De fato: $A \triangle \varnothing = (A \cap \varnothing^c) \cup (A^c \cap \varnothing) = (A \cap \mathcal{U}) \cup \varnothing = A \cup \varnothing = A$

3. $(A \triangle B) = (B \triangle A)$

De fato: $(A \triangle B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (B \cup A) \setminus (B \cap A) = (B \triangle A)$

4. $(A \triangle B)^c = (A \cap B) \cup (A^c B^c)$

De fato:

$$
\begin{aligned}
A \triangle B)^c &= [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)]^c = [(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)]^c \\
&= (A \cap B^c)^c \cap (B \cap A^c)^c = (A^c \cup B) \cap (B^c \cap A) \\
&= (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap A) \cup (B \cap B^c) \cup (B \cap A) \qquad = (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B)
\end{aligned}
$$

Como $A \triangle B$ é o conjunto dos elementos que pertencem a exatamente um dos conjuntos A e B, o seu complementar, $(A \triangle B)^c$, é o conjunto dos elementos que não pertencem a qualquer dos dois conjuntos ou pertencem a ambos os conjuntos (veja o diagrama na Figura 3.3c).

5. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

Primeira demonstração:

$$
\begin{aligned}
A \cap (B \triangle C) &= A \cap [(B \cup C) \setminus (B \cap C)] = [A \cap (B \cup C)] \setminus (A \cap B \cap C) \\
&= [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cap (A^c \cup B^c \cup C^c) = [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cap [(A^c \cup B^c) \cup (A^c \cup C^c)] \\
&= [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cap [(A \cap B)^c \cup (A \cap C)^c] \\
&= [(A \cap B) \cap (A \cap B)^c] \cup [(A \cap B) \cap (A \cap C)^c] \cup [(A \cap C) \cap (A \cap B)^c] \cup [(A \cap C) \cap (A \cap C)^c] \\
&= \varnothing \cup [(A \cap B) \cap (A \cap C)^c] \cup [(A \cap C) \cap (A \cap B)^c] \cup \varnothing \\
&= [(A \cap B) \cap (A \cap C)^c] \cup [(A \cap C) \cap (A \cap B)^c] \\
&= [(A \cap B) \setminus (A \cap C)] \cup [(A \cap C) \setminus (A \cap B)] = (A \cap B) \triangle (A \cap C)
\end{aligned}
$$

Segunda demonstração:

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) \triangle (A \cap C) &= [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \setminus [(A \cap B) \cap (A \cap C)] = [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \setminus (A \cap B \cap C) \\
&= [(A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)] \cup [(A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)] \\
&= [(A \cap B) \cap (A^c \cup B^c \cup C^c)] \cup [(A \cap C) \cap (A^c \cup B^c \cup C^c)] \\
&= (A \cap B \cap A^c) \cup (A \cap B \cap B^c) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap C \cap A^c) \cup (A \cap C \cap B^c) \cup (A \cap C \\
&= \varnothing \cup \varnothing \cup (A \cap B \cap C^c) \cup \varnothing (A \cap C \cap B^c) \cup \varnothing \\
&= (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) = A \cap [(B \cap C^c) \cup (B^c \cap C)] \\
&= A \cap [(B \setminus C) \cup (C \setminus B)] = A \cap (B \triangle C)
\end{aligned}
$$

6. $A \cup (B \triangle C) = (A \cup B \cup C) \cap (A \cup B^c \cup C^c)$

   De fato:

   $A \cup (B \triangle C) = A \cup [(B \cup C) \cap (B \cap C)^c] = [A \cup (B \cup c)] \cap [A \cup (B \cap C)^c] = (A \cup B \cup C) \cap (A \cup B^c \cup C^c)$

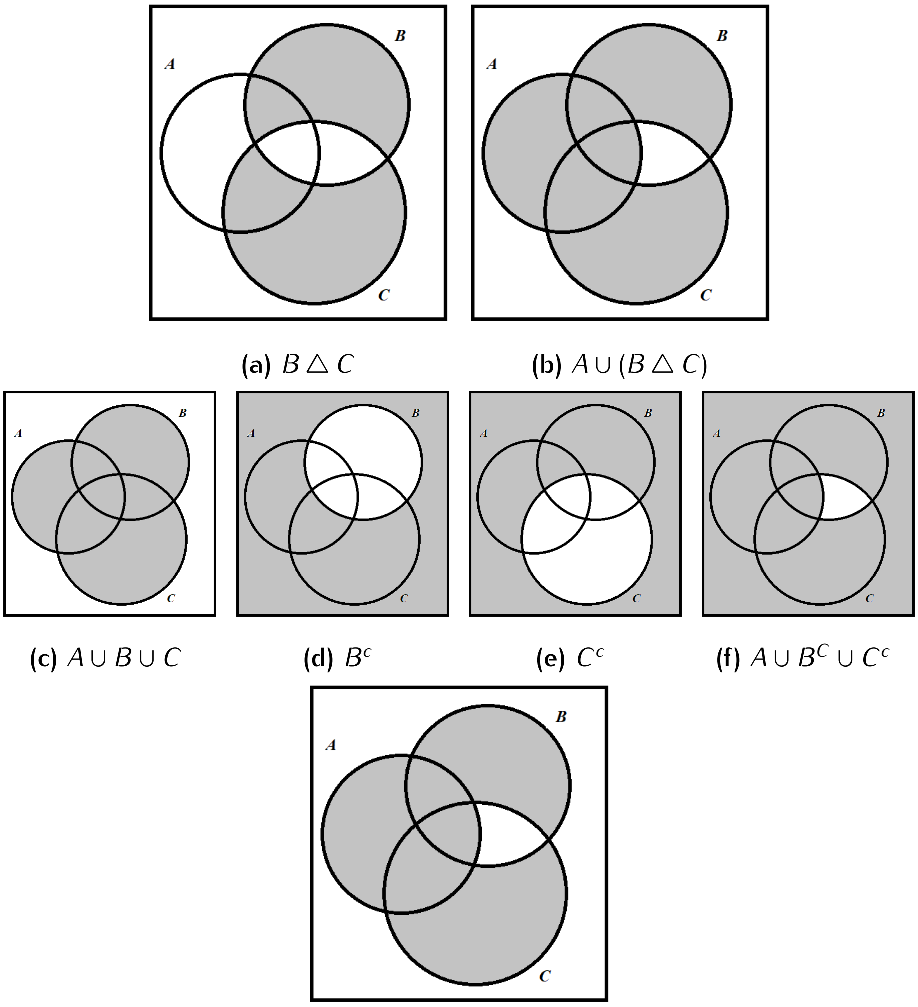
   Vemos, assim, que união não é distributiva em relação à diferença simétrica. Esse resultado está ilustrado na Figura 3.4.

7. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

   - $$
     \begin{aligned}
     (A \triangle B) \triangle C &= [(A \triangle B) \cap C^c] \cup [A \triangle B)^c \cap C] \\
     &= \{[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] \cap C^c\} \cup \{[(A^c \cap B^c) \cup (A \cap B)] \cap C\} \\
     &= [(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c)] \cup [(A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C)]
     \end{aligned}
     $$

     Resulta que $(A \triangle B) \triangle C$ é formado pelos elementos que pertencem a apenas um dos 3 conjuntos ou aos 3 simultaneamente.

   - $$
     \begin{aligned}
     A \triangle (B \triangle C) &= [A \cap (B \triangle C)^c] \cup [A^c \cap (B \triangle C)] \\
     &= \{A \cap [(B^c \cap C^c) \cup (B \cap C)]\} \cup \{A^c \cap [(B \cap C^c) \cup (B^c \cap C)]\} \\
     &= [A \cap B^c \cap C^c] \cup [A \cap B \cap C] \cup [A^c \cap B \cap C^c] \cup [A^c \cap B^c \cap C]
     \end{aligned}
     $$



(a) $B \triangle C$ (b) $A \cup (B \triangle C)$

(c) $A \cup B \cup C$ (d) B^c (e) C^c (f) $A \cup B^C \cup C^c$

(g) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B^C \cup C^c)$

Figura 3.4 – União e diferença simétrica entre conjuntos

Como antes, $A \triangle (B \triangle C)$ é formado pelos elementos que pertencem a apenas um dos 3 conjuntos ou aos 3 simultaneamente.

Como $A \triangle (B \triangle C)$ e $(A \triangle B) \triangle C$ têm os mesmos elementos, conclui-se que $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$, ou seja, a **diferença simétrica é associativa**.

8. Se $A \triangle B = A \triangle C$, então $B = C$.

De fato: suponhamos, por absurdo, que $B \neq C$. Então, pelo menos uma das duas situações ocorre:

$$\exists x \in B \,|\, x \notin C$$

ou

$$\exists x \in C \,|\, x \notin B$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que a primeira situação ocorra (a outra demonstração é análoga). Se $x \in A$, então

$$x \in A \text{ e } x \in B \text{ e } x \notin C \Longrightarrow \begin{cases} x \in A \cap B \\ \text{e} \\ x \in (A \cap C^c) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \notin A \triangle B \\ \text{e} \\ x \in (A \cap C^c) \cup (A^c \cap C) = A \triangle C = A \triangle B \end{cases}$$

um resultado absurdo. Logo, $x \notin A$ e temos, então

$$x \in A^c \text{ e } x \in B \text{ e } x \notin C \Longrightarrow \begin{cases} x \in A^c \cap B \subseteq (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) = A \triangle B \\ \text{e} \\ x \in (A^c \cap C^c) \subseteq (A \triangle C)^c = (A \triangle B)^c \end{cases}$$

Chegamos, novamente, a um absurdo, o que prova que não existe tal x, ou seja, $x \in B \Rightarrow x \in C$. Logo, $B \subseteq C$.

De maneira análoga prova-se que $C \subseteq B$ e, portanto, se $A \triangle B = A \triangle C$, então $B = C$. Isso prova que a diferença simétrica satisfaz a **lei do cancelamento**.

3.4 Conjuntos finitos e princípios de contagem

No que segue, vamos usar a notação $\#A$ para indicar o número de elementos de um conjunto A.

O resultado fundamental sobre contagem do número de elementos de conjuntos é dado a seguir.

Teorema 3.4
Se A e B são conjuntos disjuntos, então $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.

Demonstração:
Para contar o número de elementos de $A \cup B$, podemos começar com $\#A$. Em seguida, temos que contar o número de elementos de B que não estão em A. Mas como $A \cap B = \varnothing$, nenhum elemento de B está em A. Então existem $\#B$ elementos de B que não estão em A, e isso completa a prova.

$\square$

Deste teorema seguem imediatamente os seguintes resultados, que você irá demonstrar nos exercícios.

Teorema 3.5
Sejam A e B conjuntos quaisquer em $\mathcal{U}$. Então

1. $\#A^c = \#\mathcal{U} - \#A$
2. $\#(A \setminus B) = \#A - \#(A \cap B)$

3. $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$

Demonstração:
Veja o Exercício 3.11.

$\square$

3.5 Produto cartesiano

Sejam A e B conjuntos em $\mathcal{U}$. O **produto cartesiano** de A e B é o conjunto $A \times B$ formado pelos *pares ordenados* (a, b) em que $a \in A$ e $b \in B$, ou seja,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\} \tag{3.13}$$

Exemplo 3.3
Considere os conjuntos $A = \{1, 3, 4, 6\}$ e $B = \{2, 5, 7\}$ em $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Liste os elementos de $A \times B$ e de $B \times A$.

Solução:

$$\begin{aligned} A \times B =& \{(1, 2), (1, 5), (1, 7), (3, 2), (3, 5), (3, 7), (4, 2), (4, 5), (4, 7), (6, 2), (6, 5), (6, 7)\} \\ B \times A =& \{(2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 4), (5, 6), (7, 1), (7, 3), (7, 4), (7, 6)\} \end{aligned}$$

♦♦

3.6 Exercícios propostos

3.1 Considere os seguintes conjuntos em $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

$$\begin{array}{lll} A = \{1, 2, 3, 4, 5\} & B = \{4, 5, 6, 7\} & C = \{5, 6, 7, 8, 9\} \\ D = \{1, 3, 5, 7, 9\} & E = \{2, 4, 6, 8\} & F = \{1, 5, 9\} \end{array}$$

Determine

(a) $A \cap B$ e $A \cup B$

(b) $B \cap C$ e $B \cup C$

(c) $D \cap F$ e $D \cup F$

(d) $A \setminus B$ e $B \setminus A$

(e) $D \setminus F$ e $F \setminus D$

(f) $A \triangle B$, $C \triangle D$, $E \triangle F$

(g) $A \cap (B \cup E)$

(h) $(A \setminus B)^c$

(i) $A \cup (B \triangle C)$

(j) $(B \cap F) \cup (C \cap E)$ e $(B \cup F) \cap (C \cup E)$

3.2 Adaptado de Lipschutz (1999) Considere as seguintes hipóteses:

H_1 : Estatísticos são pessoas felizes.

H_2 : Todo médico é saudável.

H_3 : Nenhuma pessoa feliz é saudável.

Determine a validade de cada uma das seguintes conclusões com o uso de diagramas de Venn:

(a) Nenhum estatístico é saudável.

(b) Médicos são pessoas felizes.

(c) Nenhuma pessoa pode ser médico e estatístico simultaneamente.

3.3 O diagrama de Venn na Figura 3.5 ilustra 3 conjuntos em $\mathcal{U}$.

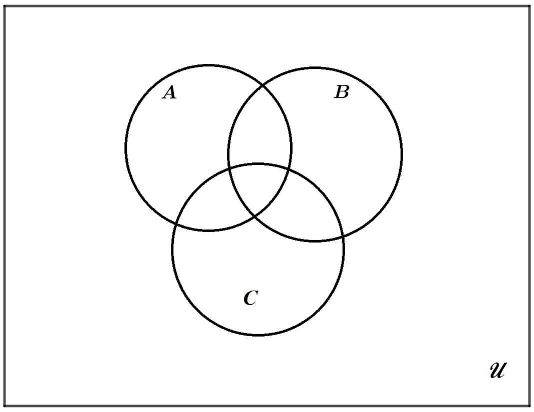


Figura 3.5 – 3 conjuntos

Sombreie os seguintes conjuntos:

(a) $A \setminus (B \cup C)$

(b) $A^c \cap (B \cap C)$

(c) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$

3.4 Demonstre as Propriedades 1 a 6 apresentadas na Seção 3.2.1.

3.5 Demonstre a segunda equação de cada uma das propriedades 7 a 9 apresentadas na Seção 3.2.1.

3.6 Use os conjuntos do Exemplo 3.2 para mostrar que a união não é distributiva em relação à diferença simétrica , ou seja, $A \cup (B \triangle C) \neq (A \cup B) \triangle (A \cup C)$.

3.7 Prove as seguintes equivalências:

(a) $A \subseteq B$ se, e somente se, $A \cap B^c = \varnothing$.

(b) $A \subseteq B$ se, e somente se, $A^c \cup B = \mathcal{U}$.

(c) $A \subseteq B$ se, e somente se, $B^c \subseteq A^c$.

3.8 Simplifique as seguintes expressões:

(a) $[(A \cap B) \cup (A \cap B^c)] \cap (A^c \cup B)$

(b) $[(A \cup B) \cap (A \cup B^c)] \cap (A \cup B)$

(c) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$

3.9 Sejam A e B eventos quaisquer em $\mathcal{U}$.

(a) Mostre que A é a união disjunta de $A \setminus B$ e $A \cap B$.

(b) Use o resultado anterior para obter uma expressão para $\#(A \setminus B)$.

3.10 Em uma pesquisa sobre hábitos de leitura com 60 brasileiros fazendo pós-graduação nos Estados Unidos, encontrou-se que

25 leem Newsweek	9 leem Newsweek e Fortune
26 leem Time	11 leem Newsweek e Time
26 leem Fortune	8 leem Time e Fortune
3 leem as 3 revistas	

(a) Esboce um diagrama de Venn e indique o número de elementos em cada parte do diagrama. Certifique-se de indicar claramente os seus cálculos, com a devida notação matemática.

(b) Determine o número de alunos que leem pelo menos uma revista.

(c) Determine o número de alunos que leem exatamente uma revista.

3.11 Demonstre o Teorema 3.5.

Capítulo 4

Conjunto dos Números Inteiros

4.1 Conceitos e propriedades básicas

O conjunto dos números inteiros é

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

Note que o conjunto dos naturais, $\mathbb{N}$, é um subconjunto de $\mathbb{Z}$.

As operações de adição e multiplicação nos inteiros têm as seguintes propriedades: para $a, b, c \in \mathbb{Z}$ inteiros quaisquer.

1. Fechamento

   $a + b \in \mathbb{Z}$

   $a \cdot b \in \mathbb{Z}$

2. Associatividade

   $a + (b + c) = (a + b) + c$

   $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

3. Existência do elemento neutro

   $a + 0 = a$ 0 é o elemento neutro da adição.

   $a \cdot 1 = a$ 1 é o elemento neutro da multiplicação.

4. Existência de inverso na adição

   $\exists a' \in \mathbb{Z}$ tal que $a + a' = 0$

   Dizemos que a' é o simétrico de a.

5. Comutatividade

   $a + b = b + a$

   $a \cdot b = b \cdot a$

6. Distributividade da multiplicação

   $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

7. Integridade da multiplicação

   $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$

A partir desse conjunto básico de operações, é possível gerar outras propriedades importantes, como a apresentada a seguir.

Proposição 4.1 Unicidade do elemento simétrico
O simétrico de cada número inteiro é único.

Demonstração:
Suponhamos, por absurdo, que a', a'' sejam ambos simétricos de a. Então

$$\begin{aligned} a' &\underbrace{=}_{\text{elem.neutro}} a' + 0 \underbrace{=}_{\text{comut.}} 0 + a' \underbrace{=}_{\text{hip.}} (a + a'') + a' \underbrace{=}_{\text{assoc.}} a + (a'' + a') \\ &\underbrace{=}_{\text{comut.}} a + (a' + a'') \underbrace{=}_{\text{assoc.}} (a + a') + a'' \underbrace{=}_{\text{hip.}} 0 + a'' \underbrace{=}_{\text{comut.}} a'' + 0 \underbrace{=}_{\text{elem.neutro}} a'' \end{aligned}$$

□

Tal unicidade nos permite estabelecer a seguinte notação: o simétrico de $a \in \mathbb{Z}$ é representado por $-a$. Além disso, ela nos permite definir a operação de subtração no conjunto dos inteiros:

$$a - b \triangleq a + (-b) \ \ \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

No conjunto dos inteiros está definida uma **relação de ordem**, denotada por $a > b$ ou por $b < a$, que significa que $a - b \in \mathbb{N}$. Como $a - 0 = a$, resulta que $a > 0$ se, e somente se, $a \in \mathbb{N}$. Dessa forma, dizer que $a > b$ é equivalente a dizer que $a - b > 0$.

Vemos, assim, que o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ pode ser dividido em três partes disjuntas:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ – conjunto dos inteiros $x|x > 0$
- $\mathbb{Z}^- = \{\cdots, -3, -2, -1\}$ – conjunto dos inteiros $x|x < 0$
- $\{0\}$

Propriedades importantes da relação de igualdade e da relação de ordem são:

1. $a = b \Longleftrightarrow a + c = b + c \quad \forall c \in \mathbb{Z}$.
2. $a \cdot c = b \cdot c \Longleftrightarrow a = b \quad \forall c \neq 0 \in \mathbb{Z}$.
3. $a < b \Longleftrightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in \mathbb{Z}$.

   $a \leq b \Longleftrightarrow a + c \leq b + c \quad \forall c \in \mathbb{Z}$.
4. $a < b \Longleftrightarrow a \cdot c < b \cdot c \quad \forall c > 0 \in \mathbb{Z}$.

   $a \leq b \Longleftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c \quad \forall c > 0 \in \mathbb{Z}$.
5. $a < b \Longleftrightarrow a \cdot c > b \cdot c \quad \forall c < 0 \in \mathbb{Z}$.

   $a \leq b \Longleftrightarrow a \cdot c \geq b \cdot c \quad \forall c < 0 \in \mathbb{Z}$.

Teorema 4.1 Propriedade arquimediana dos inteiros
Dado um inteiro $\delta > 0$, para cada $k \in \mathbb{Z}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $k < n \cdot \delta$.

Demonstração:
Se $k \leq 0<$ o resultado é imediato, pois $k \leq 0 < \delta = 1 \cdot \delta$. Suponhamos, agora, $k > 0$.

$$\delta > 0 \Leftrightarrow \delta \geq 1 \Leftrightarrow 2 \cdot k \cdot \delta \geq 2 \cdot k > k$$

ou seja, basta tomar $n = 2 \cdot k$.

□

4.2 Divisibilidade

Algumas definições e propriedades básicas sobre divisibilidade em $\mathbb{Z}$ são dadas a seguir.

1. Um número inteiro b é **divisor** de a – escreve-se $b|a$ – se existe um número inteiro c tal que $a = b \cdot c$. Diz-se também que b **divide** a ou que a é **múltiplo** de b.

   Note que, no conjunto dos inteiros, se b é divisor de a, então $-b$ também o é: $a = b \cdot c \Rightarrow a = (-b) \cdot (-c)$.
2. $1|a \qquad b|0 \qquad a|a \qquad b|a \Rightarrow |b| \leq |a|$
3. Para qualquer $a \in \mathbb{Z}$, $1, -1, a, -a$ são divisores de a e são chamados os **divisores triviais**.
4. Um **número primo** é qualquer inteiro $p \neq 0, \pm 1$ cujos divisores são todos triviais.

   É fácil ver que, se a é primo, então $-a$ também é primo. Assim, consideraremos, a partir de agora, apenas os números primos positivos.

5. Um número inteiro é divisor comum de dois ou mais números inteiros se ele for divisor de cada um desses números inteiros.

6. Dois números inteiros são **relativamente primos** se seus únicos divisores comuns forem os divisores triviais 1 e -1.

   Note que dois números primos são relativamente primos, mas a recíproca não é verdadeira.

7. O máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros é o maior dos divisores comuns a esses números.

   Usaremos a notação $\text{mdc}(a, b)$ para indicar o máximo divisor comum de a e b. Note que a e b são primos entre si se, e somente se, $\text{mdc}(a, b) = 1$.

4.3 Divisão exata e inexata

Quando b é divisor de a, dizemos que a divisão de a por b é exata. Vamos analisar a existência e unicidade da divisão exata. Dizer que b é divisor de a significa que existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b \cdot q$.

- $a \neq 0$

  Se $b = 0$, não existe q tal que $b \cdot q = a \neq 0$, ou seja, se $a \neq 0$, é impossível fazer a divisão exata de a por $b = 0$.

  Se $b \neq 0$, como $a \neq 0$, uma divisão exata $a = b \cdot q$ implica $q \neq 0$ e esse $q \in \mathbb{Z}$ pode ou não existir. Se ele existir, ele será único e o chamaremos de **quociente** de a por b.

- $a = 0$

  $0 = b \cdot q$: se $b = 0$, então qualquer inteiro q serve, ou seja, não há unicidade e não faz sentido usar o termo quociente neste caso; se $b \neq 0$, a única solução, ou seja, o quociente é $q = 0$.

Quando a não é múltiplo de $b \neq 0$, a divisão de a por b não será exata e uma divisão inexata importante é a divisão euclidiana, que consiste em escrever a como

$$a = b \cdot q + r, \qquad q, r \text{ inteiros com } 0 \leq r < |b|.$$

q é o quociente e r é o resto da divisão.

Por exemplo, 4 não divide 9 e podemos escrever $9 = 4 \cdot 1 + 5$; no entanto, essa não é a divisão euclidiana, uma vez que $5 > 4$. A divisão euclidiana de 9 por 4 é $9 = 4 \cdot 2 + 1$.

Teorema 4.2 Existência e unicidade da divisão euclidiana
Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$, existem, e são únicos, inteiros q e r tais que

$$a = q \cdot b + r \qquad 0 \leq r < |b|$$

Demonstração:

- Existência

  ⋆ $b > 0$

  Pela propriedade arquimediana dos inteiros, existe $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $n \cdot b > a$. Seja

  $$\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{Z} | p \cdot b \leq a\}$$

  Então, $\mathcal{P}$ é limitado superiormente, pois

  $$p \in \mathcal{P} \Rightarrow p \cdot b \leq a < n \cdot b \Rightarrow p \cdot b < n \cdot b \underbrace{\Rightarrow}_{b>0} p < n.$$

  Pode-se provar que $\mathcal{P}$ tem um máximo, isto é, $\exists q \in \mathcal{P}$ tal que $p \leq q\ \forall p \in \mathcal{P}$.

  Como $q \in \mathcal{P}$, segue que $q \cdot b \leq a \Rightarrow r = a - q \cdot b \geq 0$.

  Suponhamos, por absurdo, que $r \geq b = |b|$.

  $$r \geq b \Rightarrow a - q \cdot b \geq b \Rightarrow a \geq b(q+1) \Rightarrow q + 1 \in \mathcal{P}$$

  o que é absurdo, pois contraria o fato de q ser o máximo de $\mathcal{P}$.

  Provamos, assim, que se $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b > 0$, então existem $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $a = q \cdot b + r, \quad 0 \leq r < |b|$.

  ⋆ $b < 0$

  $b < 0 \Rightarrow -b > 0$; logo, existem $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $a = q \cdot (-b) + r = (-q) \cdot b + r$ com $0 \leq r < -b = |b|$ e isso completa a prova da existência.

- Unicidade

  Suponhamos, por absurdo,

  $$a = b \cdot q + r \qquad 0 \leq r < |b|$$
  $$a = b \cdot q' + r' \qquad 0 \leq r' < |b|$$

  ⋆ Se $q = q'$ então $b \cdot q + r = b \cdot q + r' \Rightarrow r = r'$.

  ⋆ Se $q \neq q'$, suponha, sem perda de generalidade, que

  $$q < q' \Rightarrow q' - q > 0 \Rightarrow q' - q \geq 1$$

  .

  $$b \cdot q + r = b \cdot q' + r' \Rightarrow r - r' = b \underbrace{(q - q')}_{\geq 1}$$

Assim, $r - r'$ teria que estar na lista $b, 2b, 3b \cdots$. Mas isso é impossível, pois

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leq r < |b| \\ 0 \leq r' < |b| \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 0 \leq r < |b| \\ -|b| < r' \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -|b| < r - r' < |b| \Rightarrow 0 \leq |r - r'| < |b|$$

Então temos que ter $q = q' \Rightarrow r = r'$.

□

Teorema 4.3
Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$ e $a = b \cdot q + r$ a divisão euclidiana de a por $b \neq 0$. Então c é divisor comum de a e b se, e somente se, c é divisor comum de b e r.

Demonstração:
Seja c um divisor comum de a e b. Então, existem inteiros m e n tais que $a = mc$ e $b = nc$. Mas

$$a = b \cdot q + r \Rightarrow r = a - b \cdot q = mc - (nc) \cdot q = c(m - nq) \Rightarrow c|r.$$

Reciprocamente, seja d um divisor comum de b e r. Então, existem inteiros m_1 e n_1 tais que $b = m_1 d$ e $r = n_1 d$.

$$a = b \cdot q + r \Rightarrow a = (m_1 d) \cdot q + n_1 d = (m_1 q + n_1) d \Rightarrow d|a.$$

□

Como exemplo, a divisão euclidiana de 99 por 30 é

$$99 = 30 \cdot 3 + 9 \Rightarrow \mathrm{mdc}(99, 30) = \mathrm{mdc}(9, 30) = 3$$

Teorema 4.4 Existência do máximo divisor comum
Se $a, b \in \mathbb{Z}$, então mdc(a, b) existe e pode ser escrito como uma combinação linear de a e b, com coeficientes inteiros.

Demonstração:
Parte 1: Existência do mdc

- $b = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a|0 \\ a|a \end{array}\right\} \Rightarrow a \text{ é divisor comum de } a \text{ e } b$$

Qualquer outro divisor comum d de a e 0 divide a ou seja, temos que ter $d \leq a$. Logo, $a = \mathrm{mdc}(a, 0)$.

- $b > 0$

  Por conveniência de notação, vamos fazer

$$a = r_0 \qquad b = r_1$$

e tomar a divisão euclidiana de r_0 por r_1:

$$r_0 = q_1 \cdot r_1 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

Pelo Teorema 4.5 sabemos que

$$\text{mdc}(r_0, r_1) = \text{mdc}(r_1, r_2) \quad \text{ou seja} \quad \text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(r_1, r_2)$$

Se $r_2 = 0$, então $\text{mdc}(r_1, r_2) = r_1 \Rightarrow \text{mdc}(a, b) = r_1$

Se $r_2 \neq 0$, podemos fazer a divisão euclidiana de r_1 por r_2:

$$r_1 = q_2 \cdot r_2 + r_3 \quad 0 \leq r_3 < r_2 < r_1 = b$$

Sabemos que

$$\text{mdc}(r_3, r_2) = \text{mdc}(r_1, r_2) = \text{mdc}(a, b)$$

Se $r_3 = 0$, então $\text{mdc}(r_3, r_2) = r_2 = \text{mdc}(a, b)$

Se $r_3 \neq 0$, podemos fazer

$$r_2 = q_3 \cdot r_3 + r_4 \quad 0 \leq r_4 < r_3 < r_2 < r_1 = b$$

Esse processo pode continuar, mas o importante é que, em um número finito de passos, obteremos um resto nulo, pois como cada $r_i \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r_i < b$, a sequência de restos tem que ser finita. Na verdade, essa sequência terá, no máximo, $b - 1$ termos. Então, em algum passo, obteremos um resto nulo; seja $r_{n+1} = 0$ e $r_{n-1} = r_n \cdot q_n + r_{n+1}$. Então

$$\begin{aligned} \text{mdc}(r_n, r_{n+1}) &= \text{mdc}(r_n, 0) = r_n = \text{mdc}(r_n, r_{n-1}) = \cdots = \text{mdc}(r_3, r_2) = \text{mdc}(r_2, r_1) \\ &= \text{mdc}(r_1, r_0) = \text{mdc}(a, b) \end{aligned}$$

Provamos, assim, que, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b > 0$, existe $\text{mdc}(a, b)$.

- $b < 0$

$$b < 0 \Rightarrow -b > 0 \Rightarrow \exists\, \text{mdc}(a, -b) \Rightarrow \exists d \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \left\{ \begin{array}{l} a = k \cdot d \\ -b = k' \cdot d \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = k \cdot d \\ b = (-k') \cdot d \end{array} \right.$$

ou seja, d é divisor de a e b.

Suponhamos, por absurdo, que d não seja o máximo divisor comum de a e b. Então, existe $d' \in \mathbb{Z}$ tal que $d' > d$ e

$$\left\{ \begin{array}{l} a = k_1 \cdot d' \\ b = k_2 \cdot d' \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = k_1 \cdot d' \\ -b = (-k_2) \cdot d' \end{array} \right.$$

Então, $d' > d$ seria divisor comum de a e $-b$, o que é absurdo, pois $d = \text{mdc}(a, -b)$.

Provamos, assim, que, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b < 0$, existe $\text{mdc}(a, b)$ e $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a, -b)$

Concluímos, então, que sempre existe o máximo divisor comum de dois inteiros quaisquer.

Parte 2: mdc como combinação linear de a e b

- $b = 0$

  Vimos que $a = \text{mdc}(a, 0) = a \cdot 1 + 0$, uma combinação linear de a e $b = 0$.

- $b > 0$

  Do processo de prova da existência do máximo divisor comum, obtivemos o seguinte:

$$
\begin{aligned}
&r_2 = r_0 - q_1 \cdot r_1 = a - q_1 \cdot b \Rightarrow r_2 = M_1 \cdot a + N_1 \cdot b \quad M_1, N_1 \in \mathbb{Z} \\
&r_3 = r_1 - q_2 \cdot r_2 = b - q_2 \cdot (M_1 \cdot a + N_1 acdotb) = M_2 \cdot a + N_2 \cdot b \quad M_2, N_2 \in \mathbb{Z} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

  Então, cada resto das sucessivas divisões euclidianas pode ser escrito como combinação linear de a e b; em particular,

$$r_n = \text{mdc}(a, b) = a \cdot M_{n-1} \cdot a + N_{n-1} \cdot b \quad M_1, N_1 \in \mathbb{Z}$$

- $b < 0$

  Vimos que $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a, -b)$ e sabemos que existem inteiros M, N tais que

$$\text{mdc}(a, -b) = M \cdot a + N \cdot (-b) \quad \therefore \quad \text{mdc}(a, b) = M \cdot a + N \cdot (-b) = M \cdot a + (-N) \cdot b$$

Logo, o máximo divisor comum de dois inteiros a e b quaisquer pode ser escrito como combinação linear de a e b com coeficientes inteiros.

□

É importante observar que a representação do $\text{mdc}(a, b)$ como combinação linear de a e b não é única, pois

$$\text{mdc}(a, b) = ax + by = a(x + bt) + b(y - at) \ \forall t \in \mathbb{Z}$$

.

Teorema 4.5
Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$ e $a = b \cdot q + r$ a divisão euclidiana de a por b. Então

$$mdc(a, b) = mdc(b, r).$$

Demonstração:
Sabemos que existe $d = \text{mdc}(a, b)$. Pelo Teorema 4.3, sabemos que d é divisor comum de b e r. Suponhamos, por absurdo, que d não seja o $\text{mdc}(b, r)$. Então, pelo Teorema 4.4, existe $d' = \text{mdc}(b, r)$ e $d' > d$. Mas pelo Teorema 4.3, d' também é divisor comum de a e b, o que é absurdo, pois d é o maior divisor comum de a e b.

□

A demonstração do Teorema 4.4 leva ao seguinte algoritmo.

Algoritmo de Euclides para o mdc

Para achar o mdc de a e $b = r_0$, obtemos a divisão euclidiana de a por $b = r_0$ e depois fazemos sucessivas divisões euclidianas até obtermos um resto nulo, por exemplo, o resto r_{n+1}:

$$\begin{array}{ll} a = r_0 \text{ por } b = r_1 & r_0 = r_1 \cdot q_1 + r_2 \\ r_1 \text{ por } r_2 & r_1 = r_2 \cdot q_2 + r_3 \\ \vdots & \\ r_{n-1} \text{ por } r_n & r_{n-1} = r_n \cdot q_n + r_{n+1} = r_n \cdot q_n \\ \text{mdc}(a, b) = r_n & \end{array}$$

Exemplo 4.1
Usando o algoritmo de Euclides, encontre o $\text{mdc}(33810, 4116)$.

Solução:

$$\begin{aligned} 33810 &= 8 \times 4116 + 882 \\ 4116 &= 4 \times 882 + 588 \\ 882 &= 1 \times 588 + 294 \\ 588 &= 2 \times 294 + 0 \\ \text{mdc}(33810, 4116) &= 294 \end{aligned}$$

♦♦

4.4 Teoremas da divisibilidade

Como já dito, vamos considerar apenas os primos positivos.

Teorema 4.6
Seja $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \geq 2$. Então a tem pelo menos um divisor primo.

Demonstração:
Se a é primo, então a é esse divisor. Consideremos, então, $a \geq 2$ não primo. Então a tem um

divisor positivo diferente de 1 e dele mesmo. Seja b_1 o menor desses divisores. Suponhamos, por absurdo, que b_1 não seja primo. Então, b_1 tem um divisor d não trivial e $0 < d < b_1$. Então, $d|b_1$ e $b_1|a$, o que implica que também $d|a$. Ou seja, a teria um divisor menor que b_1, o que é absurdo, pois b_1 é o menor dos divisores positivos de a.

□

Teorema 4.7
Se um número primo $p > 0$ não divide $a \in \mathbb{Z}$, então a e p são primos entre si.

Demonstração:
Como p é primo, os divisores comuns de p e a têm que estar na lista p e 1. Mas como p não divide a, essa lista se reduz a 1, ou seja, $\text{mdc}(p, a) = 1$.

□

Teorema 4.8
Sejam a, b inteiros não nulos que não são primos entre si. Então a e b são múltiplos de um mesmo número primo.

Demonstração:
Como a, b não são primos entre si, eles têm pelo menos um divisor comum $d \geq 2$. Se d for primo, o resultado está provado. Se d não for primo, pelo Teorema 4.7, ele tem pelo menos um divisor d' que é primo.

$$\left.\begin{array}{l} d'|d \Rightarrow d = kd' \\ d|a \Rightarrow a = md = mkd' = m'd' \\ d|b \Rightarrow b = nd = nkd' = n'd' \end{array}\right\} \Rightarrow d'|a \text{ e } d'|b$$

□

Teorema 4.9
Seja c um número inteiro que divide o produto $a \cdot b$ e é relativamente primo com um dos dois. Então, c divide o outro número, ou seja,

$$c|ab \text{ e } mdc(a, c) = 1 \Longrightarrow c|b$$

Demonstração:

$$\text{mdc}(a, c) = 1 \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{Z} \,|\, 1 = ax + cy \rightarrow b = bax + bcy \underbrace{\Longrightarrow}_{c|ab} b = kcx + bcy = c(kx + by) \rightarrow c|b$$

□

Teorema 4.10
Se um número primo divide o produto de dois inteiros, então este primo divide pelo menos um desses inteiros, ou seja,

$$p \text{ primo e } p|ab \Longrightarrow p|a \text{ ou } p|b.$$

Demonstração:
Sem perda de generalidade, suponha que p não divida a. Como p é primo, pelo Teorema 4.6, p e a são relativamente primos e, pelo Teorema 4.9, p divide b.

$\square$

Teorema 4.11 Teorema Fundamental da Aritmética
Todo número inteiro, diferente de 0 e de ± 1, ou é primo, ou é o produto de primos (positivos) e esse produto pode ser escrito de maneira única, exceto pela ordem dos fatores. Dito de outra forma, se $a \in \mathbb{Z}$ é tal que $a \neq 0$ e $a \neq \pm 1$, então existem primos distintos $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ e inteiros positivos $j_1, j_2, \cdots, j_n$ tais que

$$a = \pm p_1^{j_1} \cdot p_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{j_n}.$$

Demonstração:
A demonstração não será apresentada.

$\square$

Como exemplo, temos

- $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$
- $16200 = 2^3 \times 3^4 \times 5^2$

4.5 Exercícios Propostos

1. Prove que dois números inteiros consecutivos são sempre primos entre si.

2. Prove que se $d \neq 0$ é um inteiro divisor de $a \in \mathbb{Z}$, então d divide a^2. Prove que a recíproca é falsa.

3. Partindo da divisão euclidiana de 10 por 6, mostre que 10, 100, 1000, $\cdots$ são múltiplos de 10 aumentados de 4.

4. Sejam a, b inteiros positivos. Prove que $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a, -b) = \text{mdc}(-a, b) = \text{mdc}(-a, -b)$.

5. Prove que, se um inteiro positivo divide cada um de dois outros inteiros positivos, então ele também divide o máximo divisor comum deles.

6. Sejam a, b, c inteiros não nulos.

   (a) Prove que $\text{mdc}(ac, bc) = |c| \cdot \text{mdc}(a, b)$.

   (b) Se a e b são primos entre si, calcule o $\text{mdc}(ac, bc)$.

7. Seja p um inteiro positivo. Prove que, a, b são inteiros que têm o mesmo resto na divisão euclidiana por p se, e somente se, p divide $a - b$.

8. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $c \neq 0$. Se c é um divisor comum de a e b, então c é divisor de qualquer combinação linear inteira de a e b. (*Obs.*: Uma combinação linear inteira de a e b é qualquer expressão da forma $m \cdot a + n \cdot b$, com $m, n \in \mathbb{Z}$.)

Capítulo 5

Conjunto dos Números Racionais

5.1 Frações e os números racionais

Fração: dada uma grandeza vista como um todo, se a dividirmos em uma, duas, ou mais partes iguais, chamadas alíquotas, uma fração dessa grandeza, ou desse todo, é qualquer número inteiro dessas alíquotas.

$$\frac{a}{b}, \qquad a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0$$

Frações equivalentes:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc \qquad a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ b \neq 0, d \neq 0$$

A equivalência de frações tem as seguintes propriedades:

- Reflexiva: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{b}$
- Simétrica: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b}$
- Transitividade: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ e $\dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{e}{f}$

Fração irredutível:

$\dfrac{a}{b}$ é irredutível se a e b forem primos entre si, isto é, se $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$.

Número racional:

Um número racional é a classe de todas as frações equivalentes a uma dada fração. Dois números racionais são iguais se, e só se, suas classes são iguais como conjuntos. O conjunto dos racionais é representado por $\mathbb{Q}$.

Por exemplo, o número racional $\dfrac{2}{3}$ é a classe $\left\{\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{6}, \dfrac{6}{9}, \cdots\right\}$.

Uma fração da classe de frações de um número racional é dita ser uma **representação fracionária** deste número e usamos a notação $r = \dfrac{a}{b}$ para indicar que $\dfrac{a}{b}$ é uma representação fracionária do número racional r.

Alguns resultados importantes são:

- Todo número racional pode ser representado por uma fração de denominador positivo.
- Todo número racional é representado por uma, e apenas uma, fração irredutível de denominador positivo.

5.2 Operações em $\mathbb{Q}$

No que segue, vamos considerar os números r e s representados por frações de denominador positivo:

$$r = \frac{a}{b} \qquad s = \frac{c}{d} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ b > 0, d > 0$$

- Adição
  $r + s = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{cd}$
- Multiplicação
  $r \cdot s = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$
- Subtração
  $r - s = \dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad - bc}{cd}$
- Divisão
  Se $c \neq 0$: $r \div s = \dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$

As operações acima estão **bem definidas**, isto é, o resultado de cada uma delas não depende das frações escolhidas para representar os racionais dados.

Imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$

Se $n \in \mathbb{Z}$, então $n = \dfrac{n}{1}$ e a soma e a multiplicação em $\mathbb{Q}$ correspondem à soma e à multiplicação em $\mathbb{Z}$:

$$\frac{n}{1}+\frac{m}{1}=\frac{n+m}{1}=n+m$$
$$\frac{n}{1}\cdot\frac{m}{1}=\frac{n\cdot m}{1}=n\cdot m$$

O racional representado pela fração $\frac{a}{b}$, $b>0$ é o quociente entre os inteiros a e b, ou seja, $\frac{a}{b}=\frac{a}{1}\div\frac{b}{1}$ e isso nos leva à representação usual do conjunto dos racionais:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}|a,b\in\mathbb{Z},\ b>0\right\}$$

Propriedades da adição e da multiplicação em $\mathbb{Q}$

O **racional nulo** é o número racional representado pela fração $\frac{0}{1}$.

A **unidade racional** é o número racional representado pela fração $\frac{1}{1}$.

No que segue, sejam r,s,t números racionais quaisquer.

- Fechamento

  $r+s\in\mathbb{Q}$

  $r\cdot s\in\mathbb{Q}$

- Associatividade

  $(r+s)+t=r+(s+t)$

  $(r\cdot s)\cdot t=r\cdot(s\cdot t)$

- Existência do elemento neutro

  $r+0=r$

  $r\cdot 1=r$

- Existência do inverso

  $\exists r'\in\mathbb{Q}$ tal que $r+r'=0$; $r'=-r$.

  Se $r\neq 0$, $\exists r''\in\mathbb{Q}$ tal que $r\cdot r''=1$; $r''=\frac{1}{r}=r^{-1}$

- Comutatividade

  $r+s=s+r$

  $r\cdot s=s\cdot r$

- Distributividade da multiplicação

  $r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$

Outras propriedades seguem das propriedades listadas, tais como as Leis do Cancelamento:

- $r + t = s + t \Longrightarrow r = s, \;\; \forall t \in \mathbb{Q}$
- $r \cdot t = s \cdot t \Longrightarrow r = s, \;\; \forall t \in \mathbb{Q}, t \neq 0$

5.3 Ordenação dos números racionais

A relação de ordem em $\mathbb{Q}$ é estabelecida a partir das representações fracionárias de denominador positivo. Assim, sejam $r, s \in \mathbb{Q}$ tais que

$$r = \frac{a}{b}, \;\; b > 0 \qquad\qquad s = \frac{c}{d}, \;\; d > 0.$$

Então

$$r < s \Longleftrightarrow ad < bc$$

$$r \leq s \Longleftrightarrow ad \leq bc$$

A relação de ordem independe das representações fracionárias escolhidas, desde que tenham denominador positivo; ela satisfaz as seguintes propriedades:

- $r < s \Longleftrightarrow r + t < s + t, \; \forall t \in \mathbb{Q}$
- $r < s \Longleftrightarrow r \cdot t < s \cdot t, \; \forall t \in \mathbb{Q}, t > 0$
- $r < s \Longleftrightarrow r \cdot t > s \cdot t, \; \forall t \in \mathbb{Q}, t < 0$

5.4 Densidade dos racionais

Até aqui vimos que os racionais se "parecem" bastante com os inteiros, no sentido de que operar com números racionais consiste em operar com números inteiros. A grande diferença entre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ está relacionada ao número de elementos que exitem entre dois inteiros ou dois racionais. Isso envolve a seguinte definição.

Um conjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ é **denso** em $\mathbb{Q}$ se entre dois elementos distintos quaisquer de $\mathbb{Q}$ existirem infinitos elementos de A.

Teorema 5.1
O conjunto dos racionais é ***denso****, ou seja, entre dois números racionais distintos, sempre há infinitos racionais.*

Demonstração:
Sejam $r, s \in \mathbb{Q} \,|\, r < s$

- Tome $m_1 = \dfrac{r+s}{2}$ $\qquad r < m_1 < s$
- Tome $m_2 = \dfrac{r+m_1}{2}$ $\qquad r < m_2 < m_1 < s$
- Tome $m_3 = \dfrac{r+m_2}{2}$ $\qquad r < m_3 < m_2 < m_1 < s$

  e assim sucessivamente.

$\square$

Teorema 5.2
Seja $A \subset \mathbb{Q}$. Se entre dois elementos quaisquer de $\mathbb{Q}$ houver um elemento de A, então A é denso em $\mathbb{Q}$.

Demonstração:
Sejam $r, s \in \mathbb{Q}$ com $r < s$. Então, por hipótese, $\exists a_1 \in A$ tal que $r < a_1 < s$. Mas $a_1 \in A \subset \mathbb{Q}$. Logo, por hipótese, $\exists a_2 \in A$ tal que $r < a_2 < a_1 < s$. Continuando com esse processo, mostramos que entre dois racionais quaisquer existem infinitos elementos de A; logo, A é denso em $\mathbb{Q}$.

$\square$

Note que $\mathbb{Z}$ não é denso em $\mathbb{Q}$. Assim, o fato de um subconjunto A ser infinito, não garante que ele seja denso em $\mathbb{Q}$. Mas qualquer subconjunto finito de $\mathbb{Q}$ não é denso em $\mathbb{Q}$.

5.5 Expansão decimal dos racionais

Uma **fração ordinária** é uma fração da forma $\dfrac{a}{b}$ em que $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b > 0$.

Uma **fração decimal** é toda fração cujo denominador é uma potência positiva de 10.

Uma fração ordinária será equivalente a uma fração decimal se, e somente se, na fatoração do seu denominador aparecerem apenas potências de 2 e/ou 5.

Exemplo 5.1
Encontre a fração decimal equivalente a $\dfrac{3}{20}$

Solução:

Sabemos que tal fração equivalente existe, pois $20 = 2^2 \times 5$

$$\frac{3}{20} = \frac{3}{2^2 \times 5} = \frac{3 \times 5}{2^2 \times 5^2} = \frac{15}{10^2}$$

♦♦

A **expansão decimal** de um número natural, ou inteiro positivo, consiste em escrever este número como a soma de múltiplos de potências de 10. Por exemplo,

$$1324 = 1000 + 300 + 20 + 4 = 1 \times 1o^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10\hat{a} + 4 \times 10^0.$$

Tal expansão é posicional, ou seja, a posição dos algarismos é importante. Diferentes posições levam a decomposições distintas.

$$2413 = 2^3 + 4 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0.$$

A expansão de um número inteiro $k < 0$ será o simétrico da expansão de $-k$.

$$-1324 = -(1000 + 300 + 20 + 4 = 1 \times 1o^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10\hat{a} + 4 \times 10^0).$$

Assim, podemos nos concentrar na expansão de números inteiros positivos. Vamos representar essa expansão por

$$N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$$

indicando que

$$N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0.$$

Vamos estudar, agora, a expansão decimal dos racionais, considerando apenas os racionais positivos.

Todo número racional r pode ser decomposto de maneira única como

$$r = r' + r''$$

em que r' é um inteiro, chamado parte inteira de r, e r'' é um racional tal que $0 \leq r'' < 1$, chamado parte fracionária de r.

Se $r = \dfrac{a}{b}$, a parte inteira r' é o quociente, q, da divisão euclidiana de a por b e $r'' = r - r'$.

Assim, para completar o estudo da expansão decimal de um número racional, temos que estudar a expansão decimal de sua parte fracionária. Essa será feita em termos de décimos, centésimos, milésimos etc., ou seja:

$$r'' = \frac{b_1}{10^1} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \cdots \qquad b_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}.$$

A decomposição de $r = r' + r''$ é dada por

$$r = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0 + \frac{b_1}{10^1} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \cdots$$

e será representada por

$$r = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \cdots .$$

Vamos ver, agora, como obter a expansão decimal de um número racional $r = \dfrac{a}{b}$ para diferentes possibilidades de r.

- r é representado por uma fração decimal

  A obtenção da expansão decimal é imediata, neste caso. Vamos ver dois exemplos.

  ⋆ $r > 1$
  $$\frac{12437}{1000} = 12 + \frac{437}{1000} = 1 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + \frac{4}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{7}{10^3} = 12,437.$$

  ⋆ $r < 1$
  $$\frac{23}{1000} = 0 \times 10^0 + \frac{023}{1000} = 0 + \frac{0}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} = 0,023$$

  Com esses dois exemplos, ilustramos dois resultados importantes.

  1. A parte fracionária de uma fração decimal pode ser decomposta como soma de frações decimais especiais, em que cada uma delas tem como numerador um dos dígitos que expressam a fração decimal original.
  2. Toda fração decimal tem um número finito de dígitos na parte fracionária da sua expansão decimal

  Como consequência, se um número racional é representado por uma fração decimal, sua expansão decimal é da forma

  $$r = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \cdots b_m.$$

- r é representado por fração equivalente a uma fração decimal

  Da equivalência, resulta que um número racional representado por uma fração ordinária equivalente a uma fração decimal também será da forma

  $$r = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \cdots b_m.$$

  Para ilustrar, considere os seguintes exemplos:

  $$\frac{77}{50} = 1 + \frac{27}{50} = 1 + \frac{27}{5^2 \times 2} = 1 + \frac{27 \times 2}{5^2 \times 2^2} = 1 + \frac{54}{100} = 1 \times 10^0 + \frac{5}{10} + \frac{4}{10^2} = 1,54$$

  $$\frac{89}{500} = \frac{89}{5 \times 10^2} = \frac{89}{5^3 \times 2^2} = \frac{89 \times 2}{10^3} = \frac{198}{10^3} = 0 \times 10^0 + \frac{1}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{8}{10^3} = 0,198$$

O **método das divisões** pode ser usado para se obter a expansão decimal de um número racional r representado por uma fração equivalente a uma fração decimal. Seja, então, $r = \dfrac{a}{b}$ o nosso número racional. Como ele é representado por uma fração equivalente a uma fração decimal, sabemos que sua parte fracionária tem um um número finito de dígitos. Para encontrar sua expansão decimal, faremos sucessivas divisões euclidianas. A primeira é a divisão euclidiana de a por b, que determinará a parte inteira de a; em seguida, faremos as divisões euclidianas, por b, de 10 vezes o resto obtido:

(i) $a = q_1 \times b + r_1 \Rightarrow \dfrac{a}{b} = q_1 + \dfrac{r_1}{b} \qquad 0 \leq r_1 < b$

(ii) $10 \times r_1 = q_2 \times b + r_2 \Rightarrow \dfrac{a}{b} = q_1 + \dfrac{\dfrac{q_2 \times b}{10} + \dfrac{r_2}{10}}{b} = q_1 + \dfrac{q_2}{10} + \dfrac{r_2}{10 \times b} \qquad 0 \leq r_2 < b$

(iii) $10 \times r_2 = q_3 \times b + r_3 \Rightarrow \dfrac{a}{b} = q_1 + \dfrac{q_2}{10} + \dfrac{\dfrac{q_3 \times b}{10} + \dfrac{r_3}{10}}{10 \times b} = q_1 + \dfrac{q_2}{10} + \dfrac{q_3}{10^2} + \dfrac{r_3}{10^2 \times b}$
$0 \leq r_3 < b$

Como o número de dígitos da parte fracionária é finito, em algum momento obteremos um resto nulo e esse é o critério de parada.

Exemplo 5.2 Aplicação do método das divisões

Obtenha a expansão decimal de 3837/250 pelo método das divisões.

Solução:

$$3837 = \underline{15} \times 250 + \underbrace{87}_{r_1}$$

$$87 \times 10 = 870 = \underline{3} \times 250 + \underbrace{120}_{r_2}$$

$$120 \times 10 = 1200 = \underline{4} \times 250 + \underbrace{200}_{r_3}$$

$$200 \times 10 = 2000 = \underline{8} \times 250 + \underbrace{0}_{r_4}$$

Logo,

$$\frac{3837}{250} = 15 + \frac{3}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{8}{10^3} = 15,348$$

♦♦

- r é representado por fração não equivalente a uma fração decimal

O método das divisões pode ser aplicado a números racionais representados por frações não equivalentes a uma fração decimal. A diferença fundamental é que nunca obteremos um resto nulo, mas, em algum momento, os restos se repetem, gerando uma expansão decimal infinita periódica.

De fato: em cada etapa i do método das divisões, obtemos um resto r_i tal que $0 \leq r_i < 1$. Mas como a fração que representa o número racional não é equivalente a uma fração decimal, todos esses restos têm que ser maiores que zero. Se algum fosse nulo, a expansão decimal da parte fracionária teria um número finito de dígitos, o que levaria a uma equivalência com uma fração decimal. Assim, o método das divisões gera restos $r_1, r_2, \cdots$ tais que $0 < r_1, r_2, r_3, \cdots < b$. Como esses restos são números inteiros positivos, resulta que

$$0 < r_1, r_2, r_3, \cdots \leq b - 1.$$

Assim, no máximo depois de $b-1$ divisões algum resto se repetirá, ou seja, todo número racional representado por uma fração não equivalente a uma fração decimal tem uma expansão decimal infinita mas periódica, que podemos escrever como

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1, q_1 q_2 \cdots q_i q_{i+1} q_{i+2} \cdots q_j q_{i+1} q_{i+2} \cdots q_j \cdots \\ &= a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1, q_1 q_2 \cdots q_i \overline{q_{i+1} q_{i+2} \cdots q_j} \end{aligned}$$

Tal lista de dígitos recebe o nome de **dízima**. A parte que se repete, abaixo do traço horizontal, é o **período** da dízima.

Os números racionais representados por frações equivalentes a uma fração decimal têm expansão decimal em uma dízima finita. Os demais números racionais podem ter expansão em uma dízima periódica simples

$$r = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1, \overline{q_{i+1} q_{i+2} \cdots q_j}$$

ou em uma dízima periódica composta:

$$r = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1, q_1 q_2 \cdots q_i \overline{q_{i+1} q_{i+2} \cdots q_j}$$

Conclusão: Todo número racional tem como expansão decimal uma dízima periódica, que pode ter período zero.

Exemplo 5.3

Encontre as dízimas que representam os seguintes racionais: $\frac{17}{37}$ e $\frac{1623}{1998}$.

Solução:

Nenhum dos dois racionais dados admite representação por fração equivalente a uma fração decimal, ou seja, ambos serão representados por dízimas periódicas. Ambos são menores que 1; logo, a parte inteira é zero.

$\star$ $\frac{17}{37}$

$$
\begin{aligned}
17 &= \underline{0} \times 37 + 17 \\
170 &= \underline{4} \times 37 + 22 \\
220 &= \underline{5} \times 37 + 35 \\
350 &= \underline{9} \times 37 + 17 \\
170 &= \cdots \\
\frac{17}{37} &= 0,\overline{459}, \qquad \text{uma dízima periódica simples}
\end{aligned}
$$

⋆ $\dfrac{1623}{1998}$

$$
\begin{aligned}
1623 &= \underline{0} \times 1998 + 1623 \\
16230 &= \underline{8} \times 1998 + 246 \\
2460 &= \underline{1} \times 1998 + 462 \\
4620 &= \underline{2} \times 1998 + 624 \\
6240 &= \underline{3} \times 1998 + 246 \\
2460 &= \cdots \\
\frac{1623}{1998} &= 0,8\overline{123}, \qquad \text{una dízima periódica composta}
\end{aligned}
$$

♦♦

É importante observar os seguintes fatos:

⋆ O período da dízima fica determinado com a primeira coincidência do resto das divisões, e não com a repetição de um algarismo da dízima.

⋆ O tamanho do período, isto é, o número de dígitos do período de uma dízima que representa a/b é, no máximo, $b-1$. É importante notar que as calculadoras nem sempre têm capacidade de exibir com precisão uma dízima periódica. Por exemplo, se usarmos o Excel para calcular 1/19, obteremos 0,0526315789473684000, dando a impressão de termos uma dízima finita, ou melhor, uma fração equivalente a uma fração decimal. No entanto, o cálculo manual mostra que

$$\frac{1}{19} = 0,\overline{052631578947368421}$$

O tamanho do período aqui é o máximo, 18, e na dízima aparecem dígitos repetidos, mas o processo só termina quando o *resto* se repete.

Um resultado importante sobre o método das divisões é que ele não gera dízimas cujo período é formado apenas de 9's. Dízimas deste tipo serão chamadas dízimas de período 9-repetido. Alguns exemplos são: $0,\overline{9}$; $2,314\overline{9}$.

5.6 Conversão de dízimas em frações ordinárias

Vamos considerar agora apenas dízimas geradas pelo método das divisões, ou seja, dízimas cujo período não é 9-repetido. (As dízimas com período 9-repetido serão estudadas posteriormente, na terceira parte da disciplina.) O objetivo é obter a geratriz de tal dízima, ou seja, o número racional cuja expansão decimal é a dízima em questão.

Vamos apresentar os resultados apenas para a parte decimal da dízima, pois obtida geratriz da parte decimal, basta somar a parte inteira.

- Dízima finita

$$0,b_1b_2\cdots b_n = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_n}{10^n} = \frac{b_1 \times 10^{n-1} + b_2 \times 10^{n-2} + \cdots + b_n}{10^n}$$

Exemplo 5.4
Obtenha a geratriz da dízima finita $2,345$

Solução:

$$2,345 = 2+\frac{3}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{3}{10^3} = 2+\frac{3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 5}{10^3} = \frac{2000+300+40+5}{1000} = \frac{2345}{1000} = \frac{469}{200}$$

♦♦

- Dízimas periódicas simples e composta

Os resultados fundamentais são:

1. Toda dízima $0,\overline{c_1c_2\cdots c_p}$, em que o período não é 9-repetido, é a expansão decimal obtida pelo método das divisões de um único número racional r, com $0 < r < 1$ dado por
$$r = \frac{c_1c_2\cdots c_n}{\underbrace{99\cdots 9}_{p}} = \frac{c_1c_2\cdots c_n}{10^p - 1}$$
2. Toda dízima $0,b_1b_2\cdots b_n\overline{c_1c_2\cdots c_p}$, em que o período não é 9-repetido, é a expansão decimal obtida pelo método das divisões de um único número racional r, com $0 < r < 1$ dado por
$$r = \frac{b_1b_2\cdots b_n}{10^n} + \frac{c_1c_2\cdots c_p}{\underbrace{99\cdots 9}_{p}\underbrace{0\cdots 0}_{n}} = \frac{b_1b_2\cdots b_nc_1c_2\cdots c_p - b_1b_2\cdots b_n}{\underbrace{99\cdots 9}_{p}\underbrace{0\cdots 0}_{n}}$$

Exemplo 5.5
Obtenha a geratriz da dízima $0,\overline{4567}$.

Solução:

$$0,4567 = \frac{4567}{9999}.$$

Como 4567 é primo, não podemos fazer qualquer simplificação. ♦♦

Exemplo 5.6
Obtenha a geratriz da dízima $0,45\overline{387}$.

Solução:

$$0,45\overline{387} = \frac{45387-45}{99900} = \frac{45342}{99900} = \frac{7557}{16650} = \frac{2519}{5550}$$

♦♦

5.7 Algumas insuficiências dos números racionais

Vimos que todo racional tem como representação decimal uma dízima periódica. E as dízimas não periódicas, como $0,101001000100001\cdots$? Que números elas representam? Na primeira parte da disciplina, vimos também que $\sqrt{2}$ não é racional. Pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que $\sqrt{2}$ é o comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário. Vemos, assim, que os racionais apresentam insuficiências algébricas e geométricas. Ou seja, tem que haver algo além dos racionais, e esse será o objeto de estudo do próximo capítulo.

5.8 Exercícios propostos

1. Seja r um número racional representado por $15/35$. Mostre que ele também tem uma representação da forma a/b, em que $\text{mdc}(a, b) = 18$.

2. Se $\dfrac{a}{b}$ é uma fração irredutível com $a \neq 0, b \neq 0$, prove que a soma $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ também é irredutível.

3. Prove que se a e b são primos entre si, então cada um dos pares a^2, b; a, b^2 e a^2, b^2 também o é.

4. Usando o exercício anterior, prove que, se $\dfrac{a}{b}$ é uma fração irredutível, então $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ também é irredutível.

5. Dê o valor de um número racional entre $2/5$ e $2/3$.

6. Apresente um número racional que seja maior que $3/4$ e menor que r, sabendo apenas que $3/4 < r$.

7. Dadas as seguintes decomposições em fatores primos de dois números a e b, determine o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de a e b:

   $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^4$ $\qquad$ $b = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^3$

8. Escreva $0,34545454\ldots$ como duas dízimas diferentes e obtenha, a partir de cada uma delas, a respectiva fração geratriz na forma irredutível. O que você observa?

9. Use o método da divisão para obter a expansão decimal dos seguintes racionais:

   (a) $\dfrac{9}{13}$

   (b) $\dfrac{11}{7}$

   (c) $\dfrac{179}{55}$

10. Obtenha a fração geratriz de cada um das dízimas a seguir, expressando-a como fração irredutível.

    (a) $3,2\overline{54}$

    (b) $0,457777\ldots$

    (c) $54,\overline{678}$

Capítulo 6

Conjunto dos Números Reais

6.1 Definições e propriedades básicas

O conjunto dos **números reais** é o conjunto de todas as listas

$$m, a_1 a_2 a_3 \cdots \qquad m \in \mathbb{Z} \text{ e } a_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}\ \forall i$$

Tal conjunto será denotado por $\mathbb{R}$.

Pelo que já vimos dos números naturais, inteiros e racionais, concluímos que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

O conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é chamado conjunto dos **números irracionais** e é representado por todas as listas de dígitos não periódicas.

Recordemos a seguinte definição. Um **eixo cartesiano** é uma reta na qual foram escolhidos dois pontos O e U. O ponto O é chamado origem e o ponto U, chamado ponto unitário, tem dupla finalidade: determinar uma unidade de medida para os segmentos da reta do eixo e a orientação para o eixo. O sentido positivo do eixo é aquele que vai de O para U, enquanto o sentido negativo é o que vai de U para O.

A cada ponto Q de um eixo cartesiano (r, O, U) associamos um número real $x(Q)$ (ou simplesmente x), chamado **coordenada cartesiana** de Q, da seguinte forma:

(i) se $Q = O$, então $x(Q) = 0$;

(ii) se Q é um ponto positivo do eixo, então $x(Q) = +|OQ|$, em que $|OQ|$ representa o comprimento do segmento OQ;

(iii) se Q é um ponto negativo do eixo, então $x(Q) = -|OQ'|$, em que Q' denota o simétrico de Q em relação à origem O.

Teorema Fundamental da Geometria Analítica

A correspondência que associa a cada ponto de um eixo cartesiano (r, O, U) *a sua coordenada cartesiana é uma correspondência biunívoca entre a reta* r *e o conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais.*

6.2 Módulo de um número real

Seja $x \in \mathbb{R}$. O **módulo**, ou **valor absoluto** de x, é definido como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

Da definição de módulo de um número real podemos ver que

$$|x| = \max\{-x, x\} \Rightarrow \begin{cases} |x| \geq x \\ |x| \geq -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq |x| \\ x \geq -|x| \end{cases} \Rightarrow -|x| \leq x \leq |x| \tag{6.2}$$

Na Figura 6.1 temos o gráfico da função $f(x) = |x|$, onde podemos ver claramente a propriedade básica $x \geq 0$, decorrente da própria definição de módulo. Será muito importante também a análise de desigualdades envolvendo módulo; todas elas decorrem do seguinte resultado:

$$|x| \leq k \Longleftrightarrow -k \leq x \leq k \tag{6.3}$$

Na Figura 6.2, os valores de $y = f(x) = |x|$ que são menores ou iguais a k estão representados pelo segmento vertical mais escuro. Note que esses valores de y correspondem aos valores de x no intervalo $[-k, k]$.

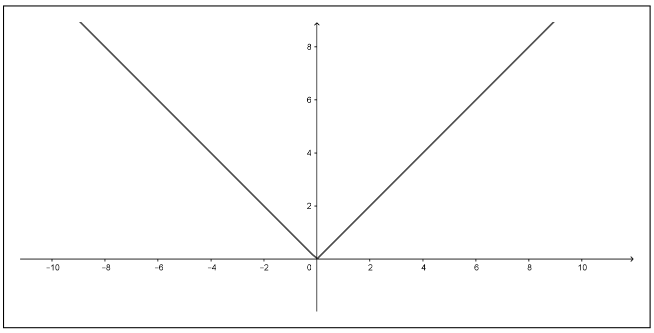


Figura 6.1 – $f(x) = |x|$

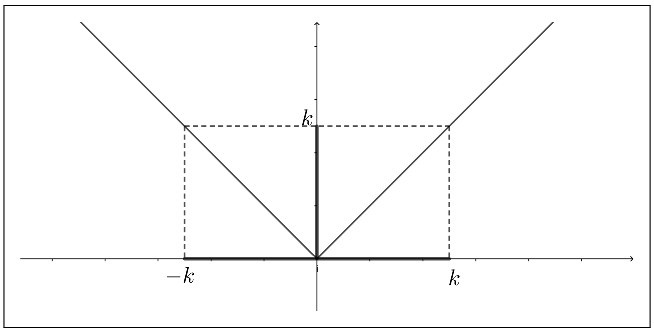


Figura 6.2 – $|x| \leq k$

Exemplo 6.1
Determine os valores de x tais que $|x-a|<\epsilon$, sendo a um número real qualquer e ϵ um número real positivo.

Solução:
Por (6.2), temos que

$$|x-a|<\epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < x-a < \epsilon \Leftrightarrow a-\epsilon < x < a+\epsilon.$$

♦♦

Teorema 6.1 Propriedades do módulo
Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Então

(Mód.1) $|x+y| \leq |x|+|y|$ *(desigualdade triangular)*

(Mód.2) $|xy| = |x||y|$

(Mód.3) $|x|-|y| \leq \big|\,|x|-|y|\,\big| \leq |x-y|$

(Mód.4) $|x-z| \leq |x-y|+|y-z|$

Demonstração:

(Mód.1) Por (6.2), temos que

$$\left\{\begin{array}{l} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{array}\right. \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{somando}} -(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y| \underbrace{\Longrightarrow}_{(6.2)} |x+y| \leq |x|+|y|$$

(Mód.2) $|xy|^2 = (xy)^2 = x^2y^2 \Longrightarrow |xy| = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|$

(Mód.3) Por (6.2) sabemos que $|x|-|y| \leq \big|\,|x|-|y|$. Assim, falta provar que $\big|\,|x|-|y|\,\big| \leq |x-y|$.

$$\left\{\begin{array}{l} |x| = |x-y+y| \leq |x-y|+|y| \\ |y| = |y-x+x| \leq |y-x|+|x| \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{l} |x-y| \geq |x|-|y| \\ |y-x| \geq |y|-|x| \end{array}$$

Multiplicando a segunda desigualdade por (-1) e lembrando que $|k| = |-k|$, obtemos

$$\left\{\begin{array}{l} |x-y| \geq |x|-|y| \\ -|x-y| \leq |x|-|y| \end{array}\right. \Longrightarrow -|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y| \underbrace{\Longrightarrow}_{(6.2)} \big|\,|x|-|y|\,\big| \leq |x-y|.$$

(Mód.4) Pela desigualdade triangular, temos que $|x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y|+|y-z|$.

□

Ordenação dos números reais

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Dizemos que x é menor que y (escreve-se $x < y$) se, e somente se,

(i) ou ambos têm sinal $+$ e satisfazem $|x| < |y|$

(ii) ou ambos têm sinal $-$ e satisfazem $|y| < |x|$

(iii) ou x é negativo e y é positivo.

6.3 Operações em $\mathbb{R}$

Vamos assumir conhecidas as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$, sem entrar nos detalhes da formalização.

Propriedades da adição e da multiplicação em $\mathbb{R}$

No que segue, sejam a, b, c números reais quaisquer.

- Fechamento

  $a + b \in \mathbb{R}$

  $a \cdot b \in \mathbb{R}$

- Associatividade

  $(a + b) + c = a + (b + b)$

  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

- Existência do elemento neutro

  $a + 0 = a$

  $a \cdot 1 = a$

- Existência do inverso

  $\exists a' \in \mathbb{R}$ tal que $a + a' = 0$; $a' = -a$.

  Se $a \neq 0$, $\exists a'' \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a'' = 1$; $a'' = a^{-1}$

- Comutatividade

  $a + b = b + a$

  $a \cdot b = b \cdot a$

- Distributividade da multiplicação

  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

Assim como no caso dos números inteiros, prova-se que o simétrico e o recíproco são únicos. Da existência e unicidade do simétrico, definimos a **subtração** de dois números reais como

$$x - y = x + (-y)$$

e da existência e unicidade do recíproco, definimos o quociente de um real x qualquer por um real $y \neq 0$ como

$$\frac{x}{y} = x \div y = x \cdot y^{-1}.$$

Daí segue que, se $x \neq 0$, $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

Outras propriedades seguem das propriedades acima. Algumas delas são:

- $0a = 0$
- $(-a)b = -(ab)$
- $(-a)(-b) = ab$
- $a + b = a\, \forall a \Rightarrow b = 0$ (unicidade do zero)
- $ab = a\, \forall a \Rightarrow b = 1$ (unicidade da unidade)
- $a + c = b + c \Longrightarrow a = b$ (lei do cancelamento da adição)
- $c \neq 0, a \cdot c = b \cdot c \Longrightarrow a = b$ (lei do cancelamento da multiplicação)
- $a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ (integridade da multiplicação)

6.4 Supremo e ínfimo[1]

Definição 6.1 Conjuntos limitados
Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$.

*(a) X é **limitado superiormente** se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Neste caso, $X \subset (-\infty, b]$ e b é uma **cota superior** de X.*

*(b) X é **limitado inferiormente** se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq a$ para todo $x \in X$. Neste caso, $X \subset [a, \infty)$ e a é uma **cota inferior** de X.*

(c) Se X é limitado superior e inferiormente, dizemos que X é limitado e, neste caso, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $X \subset [a, b]$.

Teorema 6.2
Em $\mathbb{R}$, as seguintes afirmativas são equivalentes:

(i) O conjunto dos números naturais não é limitado superiormente.

(ii) (Propriedade arquimediana dos reais) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $an > b$.

(iii) Dado qualquer $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.

Demonstração:

- (i) $\Rightarrow$ (ii)

  Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, $a > 0$. Como, por hipótese, $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{b}{a}$ e, portanto, $an > b$.

- (ii) $\Rightarrow$ (iii)

  Tomando $a > 0$ e $b = 1$, por hipótese existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $an > b = 1 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{n} < a$.

- (iii) $\Rightarrow$ (i)

  Seja $b > 0$ um número real positivo qualquer. Então, $\frac{1}{b} > 0$ e, por hipótese, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{1}{b}$, ou seja, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > b$. Logo, nenhum elemento de $\mathbb{R}$ é cota superior de $\mathbb{N}$.

$\square$

[1] Baseado em Gonçalves e Gonçalves (2012)

Definição 6.2 Supremo
Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in \mathbb{R}$ é dito supremo de X se valem as seguintes propriedades:

(Sup1) *Para qualquer $x \in X$, $x \leq b$, ou seja, b é cota superior de X.*

(Sup2) *Se $c \in \mathbb{R}$ e $x \leq c \, \forall x \in X$, então $b \leq c$.*

Vemos, assim, que o supremo de X é a menor das cotas superiores de X. Usaremos a seguinte notação: $b = \sup X$.

Definição 6.3 Ínfimo
Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado inferiormente. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ é dito ínfimo de X se valem as seguintes propriedades:

(Inf1) *Para qualquer $x \in X$, $x \geq a$, ou seja, a é cota inferior de X.*

(Inf2) *Se $c \in \mathbb{R}$ e $c \leq x \, \forall x \in X$, então $c \leq a$.*

Vemos, assim, que o ínfimo de X é a maior das cotas inferiores de X. Usaremos a seguinte notação: $a = \inf X$.

O teorema a seguir fornece uma outra caracterização do supremo e do ínfimo de um conjunto.

Teorema 6.3
Sejam X, Y subconjuntos de $\mathbb{R}$.

1.

$$b = \sup X \iff \begin{cases} \forall x \in X, x \leq b \\ \forall \epsilon > 0, \exists x \in X \text{ tal que } b - \epsilon < x \leq b. \end{cases}$$

2.

$$a = \inf Y \iff \begin{cases} \forall y \in Y, a \leq y \\ \forall \epsilon > 0, \exists y \in Y \text{ tal que } a \leq y < a + \epsilon. \end{cases}$$

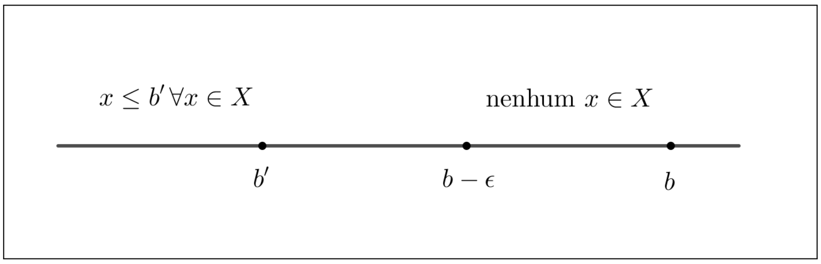
Demonstração:

1. • $\Longrightarrow$

Como $b = \sup X$, temos que $x \leq b \, \forall x \in X$. Suponhamos, por absurdo, que não exista $x \in X$ tal que $b - \epsilon < x \leq b$. Isso significa que $\forall x \in X$, $x \leq b - \epsilon$, ou seja, $b - \epsilon$ é uma cota superior de X, menor que o supremo, o que é absurdo.

- $\Longleftarrow$

  Suponhamos, por absurdo, que b não seja o supremo de X. Então, existe $b' \in \mathbb{R}$ tal que $b' < b$ e $x \leq b' \, \forall x \in X$. Veja a figura a seguir. Tome $\epsilon = \dfrac{b - b'}{2}$. Então $b - \epsilon = \dfrac{b + b'}{2} > b'$ e não existe $x \in X$ tal que $b - \epsilon < X \leq b$, o que contraria a hipótese.



2. A demonstração para o ínfimo é análoga.

$\square$

O supremo e o ínfimo de um conjunto X podem, ou não, pertencer a X, mas sempre que um conjunto tem um elemento máximo (mínimo), então esse elemento é o supremo (ínfimo).

Exemplo 6.2
Encontre o supremo e o ínfimo do conjunto $X = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots \right\}$.

Solução:
Como $\dfrac{1}{n} \leq 1 \, \forall n \in \mathbb{N}$, 1 é o máximo e, portanto, o supremo de X.

Por outro lado, temos que 0 é cota inferior de X e pelo item (iii) do Teorema 6.2, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{n_0} < 0 + \epsilon$. Pelo Teorema 6.3 resulta que $0 = \inf X$.

♦♦

É possível mostrar que existem conjuntos limitados de racionais cujo supremo ou ínfimo não pertence a $\mathbb{Q}$. Um exemplo clássico são os conjuntos $X = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$ e $Y = \{y \in \mathbb{Q} \,|\, y > 0 \text{ e } y^2 > 2\}$ são tais que $\sup X = \inf Y = \sqrt{2}$ e como já visto, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Vemos, assim, que existem lacunas em $\mathbb{Q}$. O conjunto dos reais é o conjunto que contém $\mathbb{Q}$ e completa suas lacunas.

Axioma do supremo. Em $\mathbb{R}$, todo subconjunto não vazio e limitado superiormente possui supremo.

O Axioma do Supremo é equivalente à propriedade do ínfimo: Em $\mathbb{R}$, todo subconjunto não vazio e limitado inferiormente possui ínfimo.

6.5 Densidade em $\mathbb{R}$

No Capítulo 5, provamos que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{Q}$. Vamos ver o que acontece nos reais.

Diz-se que $z \in \mathbb{R}$ é um **intermediário** dos reais $x < y$ se $x < z < y$.

Um conjunto de números reais A é denso em $\mathbb{R}$ se, e somente se, entre dois números reais quaisquer existir pelo menos um intermediário que esteja em A.

Pode-se provar que tanto $\mathbb{Q}$ quanto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$, ou seja, entre dois números reais quaisquer, há pelo menos um número racional e pelo menos um número irracional.

6.6 Propriedade do Contínuo

Um **intervalo fechado** de extremos $x, y \in \mathbb{R}$ com $x \leq y$ é o conjunto

$$[x, y] = \{z \in \mathbb{R} \,|\, x \leq z \leq y\}$$

Uma sequência infinita de intervalos fechados $[x_n, y_n]$, $n \in \mathbb{N}$, é dita **encaixante** se, e somente se,

$$\cdots \subseteq [x_n, y_n] \subseteq \cdots \subseteq [x_2, y_2] \subseteq [x_1, y_1] \iff \begin{cases} x_n \leq x_{n+1} \\ \text{e} \\ y_n \geq y_{n+1} \end{cases} \quad \forall n.$$

Uma sequência infinita de intervalos fechados $[x_n, y_n]$, $n \in \mathbb{N}$, é dita **evanescente** se

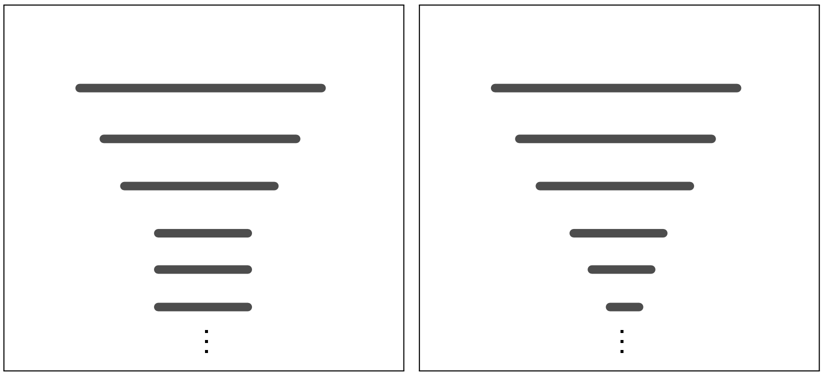
(i) for encaixante e

(ii) para qualquer intervalo $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ existir um intervalo $[x_n, y_n]$ na sequência cujo comprimento $|y_n - x_n| \leq |b - a|$.

Nas Figuras 6.3a e 6.3b ilustra-se uma sequência encaixante e uma sequência evanescente, respectivamente.

Teorema: Propriedade do Contínuo

Para cada sequência evanescente de intervalos $[x_n, y_n]$*, existe exatamente um* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $x \in [x_n, y_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$.



(a) Encaixantes **(b)** Evanescentes

Figura 6.3 – Sequências de intervalos fechados em $\mathbb{R}$

Este teorema pode ser interpretado informalmente como *não há "saltos" no conjunto dos reais* (ou *a reta real não tem "buracos"*).

Pode-se provar que o conjunto dos racionais não tem a Propriedade do Contínuo; assim, "quem" garante tal propriedade em $\mathbb{R}$ é o conjunto dos irracionais.

6.7 Conjuntos enumeráveis[2]

Quando contamos o número de elementos de um conjunto A, estamos, na verdade, estabelecendo uma bijeção entre A e algum subconjunto de $\mathbb{N}$. O que vamos fazer, agora, é trabalhar com conjuntos infinitos. Será que sempre vamos poder "contar" o número de elementos de tais conjuntos?

Vamos apresentar algumas definições que nos permitirão responder a essa questão.

Se existir uma função bijetora entre dois conjuntos A e B, dizemos que os conjuntos têm a **mesma cardinalidade**, o que será representado aqui por $A \sim B$.

A relação $A \sim B$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $A \sim A$

(ii) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

(iii) $A \sim B$ e $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

Um conjunto A é **finito** se $A \sim F_n$ em que $F_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. O conjunto vazio é considerado um conjunto finito.

Um conjunto A é **enumerável** se $A \sim \mathbb{N}$.

[2]Baseado em Monteiro (2016)

Um conjunto A é **não enumerável** se ele não for finito nem enumerável.

Exemplo 6.3
$\mathbb{N}$ é enumerável.

Solução:
A bijeção é imediata: $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. ♦♦

Exemplo 6.4
$\mathbb{Z}$ é enumerável.

Solução:
Organize os inteiros da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \end{array}$$

e defina a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ -\dfrac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Essa é uma função claramente injetora. A imagem dos naturais pares é $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ e a imagem dos naturais ímpares é $\mathbb{Z}^*_- = \{\cdots, -3, -2, -1, 0\}$, ou seja, a imagem é $\mathbb{Z}$. ♦♦

Teorema 6.4
Todo subconjunto infinito B de um conjunto enumerável A é também enumerável.

Demonstração:
Por hipótese existe uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to A$. Então, $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = a_n \in A$ e como f é bijetora, os a_i's são distintos.

Vamos definir recursivamente a função $g : \mathbb{N} \longrightarrow B$ da seguinte forma:

$g(1) = a_{n_1}$ em que n_1 é o menor natural tal que $a_{n_1} \in B$

$g(2) = a_{n_2}$ em que n_2 é o segundo menor natural tal que $a_{n_2} \in B$

$\vdots$

Como B é infinito, esse processo pode continuar indefinidamente e associamos a cada elemento de $\mathbb{N}$ um elemento de B. Essa função é injetora pois os a_i's são distintos. Além disso, ela também é sobrejetora pois todo elemento de B é imagem de algum $n \in \mathbb{N}$ e isso completa a prova.

□

Corolário 6.1
Nenhum conjunto não enumerável pode ser subconjunto de um conjunto enumerável.

Demonstração:
Suponhamos, por absurdo, que um conjunto B não enumerável seja subconjunto de A, um conjunto enumerável. Como B é não enumerável, segue que B é infinito. Assim, pelo teorema anterior, B teria que ser enumerável, um absurso, pois contraria a hipótese.

□

Na demonstração do Teorema 6.4 utilizamos uma função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow A \\ n &\longmapsto a_n \end{aligned}$$

Tais funções são chamadas **sequências**. Da definição de conjunto enumerável, resulta que, se A é enumerável, então seus elementos podem ser organizados em uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ com todos os a_i's distintos entre si.

Teorema 6.5
Seja $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ uma sequência de conjuntos enumeráveis e seja $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Então U é enumerável.

Demonstração:
Podemos organizar os elementos dos E_i's em uma lista infinita, já que cada E_i é enumerável. Obtemos, assim, a seguinte matriz, em que cada linha i contém os elementos de E_i:

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} & \cdots \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e_{m1} & e_{m2} & \cdots & e_{mm} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Para mostrar que U é enumerável, teríamos que escrever todos os seus elementos em uma lista sem repetições. Mas isso não é possível, pois não sabemos quais são repetidos. Para contornar esse problema, vamos colocar os elementos da matriz em uma sequência, que pode ter repetições:

$$s : e_{11}, \; e_{12}, e_{21}, \; e_{13}, e_{22} e_{31}, \; e_{14}, e_{23}, e_{32}, e_{41}, \; \cdots$$

Essa sequência tem a seguinte regra de formação: começamos com e_{11}; depois colocamos os elementos cuja soma dos índices dá 3, depois os elementos cuja soma dos índices dá 4 e assim por diante.

Como conseguimos escrever todos os elementos da matriz em forma de sequência, existe uma função de $\mathbb{N}$ no conjunto dos elementos de s, que associa os números $1, 2, 3, \cdots$ aos elementos $e_{11},\ e_{12}, e_{21},\ e_{13}, e_{22}e_{31},\ e_{14}, e_{23}, e_{32}, e_{41},\ \cdots$. A primeira linha da matriz (E_1) está em U e é enumerável, e portanto infinita. Assim, os elementos da sequência s formam um conjunto enumerável. Como U é um subconjunto desse conjunto resulta que U é enumerável, pelo Teorema 6.4.

□

Corolário 6.2
A união finita de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Demonstração:
Seja $E_1, E_2, \cdots, E_n$ uma coleção finita de conjuntos enumeráveis. Então, $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ em que $E_i = E_1, \forall i > n$. Pelo Teorema 6.5, a união infinita é enumerável, e, portanto, a união finita também o é.

□

Teorema 6.6
Sejam A e B conjuntos enumeráveis. Então o produto cartesiano $A \times B$ é enumerável.

Demonstração:
Sabemos que

$$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Para cada $a \in A$, seja $B_a = \{(a, b) \,|\, b \in B\}$. Como B é enumerável, seus elementos podem ser organizados em uma sequência $(b_1, b_2, b_3, \cdots)$. Assim, os elementos de B_a podem ser organizados na sequência $((a, b_1), (a, b_2), (a, b_3), \cdots)$, o que mostra que B_a é enumerável.

Mas $A \times B = \bigcup_{a \in A} B_a$. Pelo Teorema 6.5, resulta que $A \times B$ é enumerável.

□

Teorema 6.7
O conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais é enumerável.

Demonstração:
Podemos escrever

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}\ a, b \in \mathbb{Z}, b > 0 \right\}.$$

Denotando $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus 0$, podemos definir a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (a, b) &\longmapsto \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Como $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}^*$ são enumeráveis, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ também é enumerável, pelo Teorema 6.6. A imagem de um conjunto enumerável ou é finita, ou é enumerável. Assim, a imagem de f, que é o conjunto dos racionais, ou é finita, ou é enumerável. Mas a imagem de f contém todos os inteiros, pois $f(n, 1) = \frac{n}{1} = n,\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Logo, a imagem de f – $\mathbb{Q}$ – não é finita e tem que ser enumerável, o que prova que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

□

Teorema 6.8
O intervalo $[0,1]$ *não é enumerável.*

Demonstração:
Suponhamos, por absurdo, que $[0,1]$ seja enumerável. Então, todos os seus elementos podem ser organizados como uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$. Seja

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, b_{11}b_{12}b_{13}\cdots \\ a_2 &= 0, b_{21}b_{22}b_{23}\cdots \\ a_3 &= 0, b_{31}b_{32}b_{33}\cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Considere, agora, o seguinte número real

$$c = 0, c_1c_2c_3\cdots \qquad c_1 \neq a_{11}, c_2 \neq a_{22}, c_3 \neq a_{33}, \cdots .$$

Então, $c \in [0,1]$ e $c \neq a_1, c \neq a_2, c \neq a_3, \cdots$. Ou seja, c não é elemento da sequência que representaria todos os elementos do intervalo $[0,1]$. Resulta, então, que não existe tal sequência, ou seja, $[0,1]$ não é enumerável.

$\square$

Corolário 6.3
$\mathbb{R}$ *é não enumerável.*

Demonstração:
Como $[0,1] \subset \mathbb{R}$ e é não enumerável, pelo Corolário 6.1, resulta que $\mathbb{R}$ não pode ser enumerável.

$\square$

Como $\mathbb{R}$, um conjunto não enumerável, é a união de $\mathbb{Q}$, que é enumerável, com os irracionais, concluímos que os irracionais são não enumeráveis.

6.8 Exercícios propostos

1. Seja $A = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots\right\}$. Prove que $\inf A = 0$ e $\sup A = 1$.

2. Prove que o conjunto dos inteiros ímpares é enumerável, estabelecendo uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e este conjunto.

3. Considere os seguintes subconjuntos dos reais:

$$
\begin{aligned}
A &= [-5, 4) = \{x \in \mathbb{R}; -5 \leq x < 4\} \\
B &= (2, 6) = \{x \in \mathbb{R}; 2 < x < 6\} \\
C &= (-\infty, 1) = \{x \in \mathbb{R}; x < 1\} \\
D &= [-2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -2\}
\end{aligned}
$$

Determine os seguintes conjuntos:

(a) $A \cup B$ e $A \cap B$

(b) $A \cup C$ e $A \cap C$

(c) $A \cup D$ e $A \cap D$

(d) $B \cup C$ e $B \cap C$

(e) $B \cup D$ e $B \cap D$

(f) $C \cup D$ e $C \cap D$

Parte III

Análise Combinatória

Capítulo 7

Permutações e combinações simples de objetos distintos

No estudo da Análise Combinatória, iremos trabalhar com conjuntos finitos e estudaremos diversas técnicas de contagem do número de elementos desses conjuntos. Dado um conjunto qualquer A, representaremos por $\#A$ o número de elementos de A.

7.1 Princípio Fundamental da Adição

Sejam A e B conjuntos disjuntos em $\mathcal{U}$. Vimos anteriormente que

$$A \cap B = \varnothing \Longrightarrow \#(A \cup B) = \#A + \#B \tag{7.1}$$

A definição de conjuntos disjuntos se generaliza para mais de dois conjuntos. Neste caso, devemos analisar a interseção de dois conjuntos de cada vez. Mais precisamente, dada uma coleção de conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_k$ em $\mathcal{U}$, dizemos que eles são disjuntos dois a dois se $A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i \neq j$. Veja a **Figura 7.1**.

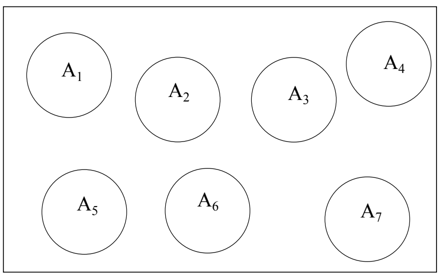


Figura 7.1 – Conjuntos disjuntos dois a dois

Neste caso, a cardinalidade da união é dada pelo *princípio fundamental da adição*.

Princípio Fundamental da Adição

Consideremos uma coleção de conjuntos disjuntos dois a dois, tais que $\#A_i = n_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. O princípio fundamental da adição estabelece que

$$A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i \neq j \Longrightarrow \# \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right) = \sum_{i=1}^{k} \#A_i = n_1 + \cdots + n_k \tag{7.2}$$

A seguir apresentamos alguns resultados, que são consequências diretas do princípio fundamental da adição.

- Como $A \cup A^c = \Omega$ e $A \cap A^c = \varnothing$, resulta que

$$\#\Omega = \#A + \#A^c \Longrightarrow \#A^c = \#\Omega - \#A \tag{7.3}$$

- Sabemos também que $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ e $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \varnothing$; resulta, então, que

$$\#A = \#(A \setminus B) + \#(A \cap B) \Longrightarrow \#(A \setminus B) = \#A - \#(A \cap B) \tag{7.4}$$

  Analogamente,

$$\#(B \setminus A) = \#B - \#(A \cap B) \tag{7.5}$$

- Consideremos o caso geral em que A e B são conjuntos quaisquer. Podemos escrever

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$$

  Como A e $B \setminus A$ são disjuntos, resulta que

$$\#(A \cup B) = \#A + \#(B \setminus A)$$

  Usando o resultado (7.5), concluímos que

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B) \tag{7.6}$$

Exemplo 7.1 Cardinalidade da união de 3 eventos finitos
Obtenha uma expressão para $\#(A \cup B \cup C)$, onde A, B, C são conjuntos quaisquer com número finito de elementos.

Solução:

$$\begin{aligned}
\#(A \cup B \cup C) &= \#[(A \cup B) \cup C] \\
&= \#(A \cup B) + \#C - \#[(A \cup B) \cap C)] \\
&= \#A + \#B - \#(A \cap B) + \#C - \#[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\
&= \#A + \#B - \#(A \cap B) + \#C - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap C \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap C \cap B \cap C) \quad (7.7)$$

♦♦

7.2 Princípio Fundamental da Multiplicação

Para ilustrar o segundo princípio fundamental da contagem, considere o experimento que consiste no sorteio aleatório de um homem e uma mulher de um grupo de pessoas formado por três homens (h_1, h_2, h_3) e cinco mulheres (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5). Quantos casais podem ser formados com essas pessoas?

A seguir temos a relação de todos os casais que podem ser formados:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} h_1m_1, h_1m_2, h_1m_3, h_1m_4, h_1m_5, \\ h_2m_1, h_2m_2, h_2m_3, h_2m_4, h_2m_5, \\ h_3m_1, h_3m_2, h_3m_3, h_3m_4, h_3m_5, \end{array} \right\}$$

Mas se estamos interessados apenas no número de casais, devemos notar que há cinco casais nos quais o homem é h_1, cinco nos quais o homem é h_2 e outros cinco nos quais o homem é h_3, perfazendo um total de $3 \times 5 = 15$ casais. Esse exemplo ilustra o *princípio fundamental da multiplicação*.

Princípio Fundamental da Multiplicação

Se temos k decisões $d_1, d_2, \ldots, d_k$ que podem ser tomadas de $n_1, n_2, \ldots, n_k$ maneiras respectivamente, então o número de maneiras de tomar as decisões d_1 e d_2 e $\cdots$ e d_k é $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$.

Note que o princípio da multiplicação permite obter o número de casais sem ter que fazer essa enumeração enfadonha! Imagine se fossem 100 homens e 200 mulheres!

Exemplo 7.2 Números naturais de três algarismos distintos
Quantos números naturais de três algarismos distintos existem?

Solução:

Para o primeiro algarismo (milhar), existem nove possibilidades, já que o zero não pode ocupar a primeira posição. Para a segunda posição, escolhida a primeira, sobram nove algarismos (agora já podemos considerar o zero) e para a terceira, escolhidos os dois primeiros, sobram oito algarismos. Logo, existem $9 \times 9 \times 8 = 648$ números. (Já pensou o trabalho que seria listar todos eles?) ♦♦

Exemplo 7.3 Portas de um prédio

Um prédio possui oito portas. De quantas maneiras posso entrar e sair desse prédio, se não quero usar na saída a mesma porta que usei na entrada?

Solução:

Para a entrada, posso escolher qualquer uma das oito portas. Escolhida a porta de entrada, sobram sete portas para a saída. Logo, existem $8 \times 7 = 56$ maneiras de entrar e sair por portas diferentes. ♦♦

Exemplo 7.4 Números pares de três algarismos distintos

Quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Solução:

Para que o número seja par, ele tem que terminar com 2, 4 ou 6. Seja, então, P o evento de interesse Vamos denotar por A_2 o evento "número par que termina com 2" e de maneira análoga, definimos os eventos A_4 e A_6. Resulta que A_2, A_4 e A_6 são mutuamente exclusivos dois a dois e $P = A_2 \cup A_4 \cup A_6$. Pelo princípio da adição, resulta que $n(P) = n(A_2) + n(A_4) + n(A_6)$.

Para calcular $n(A_2)$, note que o último algarismo é 2 e sobram duas posições para serem preenchidas com algarismos distintos escolhidos entre 1, 3, 4, 5, 6. Para a primeira posição, temos cinco possibilidades; escolhida a primeira posição, sobram quatro para a segunda posição. Pelo principio fundamental da multiplicação existem $5 \times 4 = 20$ números pares com três algarismos distintos terminando com 2, ou seja, $n(A_2) = 20$. Analogamente, $n(A_4) = 20$ e $n(A_6) = 20$, o que implica que $n(P) = 20 + 20 = 20 = 60$. ♦♦

7.3 Permutações

Consideremos quatro objetos distintos a_1, a_2, a_3, a_4. De quantas maneiras podemos ordená-los? Vamos listar todas as possibilidades.

$$\begin{array}{cccc}
a_1a_2a_3a_4 & a_1a_2a_4a_3 & a_1a_3a_2a_4 & a_1a_3a_4a_2 \\
a_1a_4a_2a_3 & a_1a_4a_3a_2 & a_2a_1a_3a_4 & a_2a_1a_4a_3 \\
a_2a_3a_1a_4 & a_2a_3a_4a_1 & a_2a_4a_1a_3 & a_2a_4a_3a_1 \\
a_3a_1a_2a_4 & a_3a_1a_4a_2 & a_3a_2a_1a_4 & a_3a_2a_4a_1 \\
a_3a_4a_1a_2 & a_3a_4a_2a_1 & a_4a_1a_2a_3 & a_4a_1a_3a_2 \\
a_4a_2a_1a_3 & a_4a_2a_3a_1 & a_4a_3a_1a_2 & a_4a_3a_2a_1
\end{array}$$

Cada uma dessas ordenações é chamada uma *permutação simples*. Podemos ver que o número de tais permutações é bem grande. Note que, para apenas quatro objetos, temos 24 permutações. O cálculo do número de permutações é uma consequência direta do princípio da multiplicação.

Consideremos, então, n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_{n.}$ Para a primeira posição, temos n possibilidades. Para a segunda, escolhida a primeira, sobram $n-1$ objetos. Para a terceira, escolhidas a primeira e a segunda posições, sobram $n-2$ objetos. Continuando, para a última posição, escolhidas as $n-1$ anteriores, sobra apenas 1 objeto.

Pelo princípio da multiplicação, o número total de permutações, que denotaremos por P_n é $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$, e esse número, por definição, é o fatorial de n. Temos, assim, o seguinte resultado.

Permutações simples

Dados n objetos distintos, o número de **permutações simples** de tais objetos é dado por

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n! \tag{7.8}$$

Exemplo 7.5 Filas

Quantas filas diferentes podemos formar com cinco crianças?

Solução:

Essa é exatamente a definição de permutação. Logo, o número de filas é $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. ♦♦

Exemplo 7.6 Livros numa estante

Temos cinco livros de Estatística, três livros de Matemática Financeira e quatro livros de Contabilidade. De quantas maneiras podemos organizar esses livros em uma prateleira? Qual seria a sua resposta se os livros do mesmo assunto tivessem que ficar juntos?

Solução:

Ao todo, há 12 livros; logo, se não é necessário agrupar por assunto, existem $12! = 479.001.600$ maneiras de organizar os livros.

Se os livros do mesmo assunto têm que ficar juntos, devemos observar que, primeiro, temos que contar as maneiras como podemos organizar os assuntos. Como são três assuntos, há $3! = 6$ maneiras de organizar os assuntos. Para os livros de Estatística, há $5! = 120$ maneiras de organizá-los; para os livros de Matemática Financeira, $3! = 6$ maneiras, e para os livros de Contabilidade, $4! = 24$ maneiras.

Pelo princípio fundamental da multiplicação, o número total de maneiras de organizar os 12 livros de modo que os livros do mesmo assunto fiquem juntos é $6 \times 6 \times 120 \times 24 = 103.680$ maneiras. Note que é razoável que esse número seja menor, pois estamos impondo condições restritivas na organização. ♦♦

Exemplo 7.7 Assentos num banco

Cinco moças e cinco rapazes têm que se sentar em cinco bancos de dois lugares, de modo que em cada banco fique uma moça e um rapaz. De quantas maneiras podemos fazer isso?

Solução:

Comecemos com as meninas. A primeira menina pode escolher qualquer dos 10 lugares. Logo, ela tem 10 possibilidades. Já a segunda menina só tem 8 possibilidades, porque ela não pode sentar junto com a primeira. Analogamente, a terceira menina tem 6 possibilidades, a quarta tem 4 e a quinta tem 2 possibilidades.

Definidas as posições das meninas, temos cinco rapazes para sentar em cinco lugares, o que pode ser feito de $5!$ maneiras. Logo, o número total de possibilidades, pelo princípio fundamental da multiplicação, é $10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 5! = 3.840 \times 120 = 460.800$. ♦♦

Exemplo 7.8 Anagramas[1] de TEORIA

Considere a palavra TEORIA.

1. Quantos anagramas podemos formar?
2. Quantos anagramas começam com a letra T?
3. Quantos anagramas começam com a letra T e terminam com A?
4. Quantos anagramas têm todas as vogais juntas?

Solução:

Note que o conceito de anagrama é o mesmo de permutação.

1. Como há seis letras diferentes, o número de anagramas é $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

[1] Anagrama: Palavra ou frase formada pela transposição das letras de outra palavra ou frase. "E dizem que a Iracema do romance de Alencar é o anagrama de América" (João Ribeiro, *Curiosidades verbais*, p. 76).

2. Fixada a letra T na primeira posição, as outras cinco podem ser organizadas de $5! = 120$ maneiras diferentes.

3. Fixadas a primeira e a última letras, as outras quatro podem ser organizadas de $4! = 24$ maneiras.

4. Temos quatro vogais. Esse bloco pode ser organizado de $4! = 24$ maneiras. Para juntar esse bloco com as duas consoantes, há $3! = 6$ maneiras diferentes. Logo, o número total é $24 \times 6 = 144$.

♦♦

7.4 Arranjos

Na definição de permutação, consideramos ordenações de *todos* os objetos. Mas é possível que queiramos ordenar apenas k dos n objetos, onde $k \leq n$. Nesse caso, temos a definição de *arranjo simples*.

Suponhamos, por exemplo, que quatro pessoas serão sorteadas dentre dez. Quantas filas podemos formar com as quatro pessoas sorteadas?

Como no caso das permutações, para a primeira posição da fila temos disponíveis as 10 pessoas. Para a segunda, temos 9; para a terceira, temos 8, e para a quarta e última posição, temos 7. Logo, o número total de filas com as quatro pessoas sorteadas é $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5.040$.

Note que, para a quarta posição, já escolhemos as três anteriores; assim, sobram apenas $(10 - 3) = [10 - (4 - 1)]$. Uma outra observação interessante é a seguinte:

$$
\begin{aligned}
10 \times 9 \times 8 \times 7 &= \frac{(10 \times 9 \times 8 \times 7) \times (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} \\
&= \frac{(10 \times 9 \times 8 \times 7) \times 6!}{6!} \\
&= \frac{10!}{6!} = \frac{10!}{(10-4)!}
\end{aligned}
$$

Vamos ver, agora, o caso geral. Para calcular o número de arranjos de k dentre n objetos distintos, devemos notar que, para a primeira posição, existem n possibilidades. Para a segunda, $n - 1$ possibilidades. Para a k-ésima e última posição, já foram escolhidos $k - 1$ objetos; portanto, sobram $n-(k-1)$, ou seja, para a k-ésima posição, há $n-(k-1) = n-k+1$ possibilidades.

Logo, o número total de arranjos de k elementos, tomados dentre n objetos distintos é $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$. Vamos denotar por A_n^k esse número.

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$$

Vamos usar o mesmo artifício para obter uma expressão mais compacta essa fórmula.

$$\begin{aligned}
A_n^k &= n \times (n-1) \times \cdots \times [n-(k-1)] \\
&= n \times (n-1) \times \cdots \times [n-(k-1)] \times \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \\
&= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \times (n-k) \times (n-k-1) \times \cdots \times 2 \times 1}{(n-k)!} = \\
&= \frac{n!}{(n-k)!}
\end{aligned}$$

Arranjos simples

Dados n objetos distintos, o número de **arranjos simples** de k objetos dentre n, denotado por A_n^k, é

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{7.9}$$

É importante notar que, sendo a definição de arranjo uma generalização de permutação (note que uma permutação é um arranjo em que $k = n$), a ordem dos elementos é relevante, ou seja, $a_1a_2a_3$ é diferente de $a_3a_1a_2$.

Exemplo 7.9 Campeonato de futebol

Em um campeonato de futebol, concorrem 20 times. Quantas possibilidades existem para os três primeiros lugares?

Solução:

A resposta é A_{20}^3, pois a ordem faz diferença nesse caso. Note que

$$A_{20}^3 = \frac{20!}{17!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{17!} = 20 \times 19 \times 18 = 6.840$$

♦♦

Exemplo 7.10 Comissões

De um grupo de 15 pessoas deve ser extraída uma comissão formada por um presidente, um vice-presidente e um secretário. Quantas comissões é possível formar?

Solução:

A ordem aqui importa, já que os cargos não são equivalentes. Assim, a solução é

$$A_{15}^{3} = \frac{15!}{12!} = 12 \times 11 \times 10 = 1320$$

♦♦

Exemplo 7.11 Segredo de cofre

O segredo de um cofre é formado por uma sequência de três dígitos escolhidos entre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Suponha que uma pessoa saiba que o segredo é formado por três algarismos distintos. Qual o número máximo de tentativas que ela terá de fazer para abrir o cofre?

Solução:

Nos segredos de cofre, a ordem importa. Como os algarismos são distintos, a resposta é $A_{10}^{3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ ♦♦

7.5 Combinações simples

Vamos considerar agora, a situação análoga a um arranjo, mas onde a ordem não importa, ou seja, $a_1a_2a_3$ é igual a $a_3a_1a_2$.

A título de ilustração, consideremos a situação na qual temos cinco objetos distintos dos quais vamos selecionar três. Como visto, o número de arranjos é $\frac{5!}{2!} = 60$. Vamos listá-los.

Objetos envolvidos									
(1,2,3)	(1,2,4)	(1,2,5)	(1,3,4)	(1,3,5)	(1,4,5)	(2,3,4)	(2,3,5)	(2,4,5)	(3,4,5)
$a_1a_2a_3$	$a_1a_2a_4$	$a_1a_2a_5$	$a_1a_3a_4$	$a_1a_3a_5$	$a_1a_4a_5$	$a_2a_3a_4$	$a_2a_3a_5$	$a_2a_4a_5$	$a_3a_4a_5$
$a_1a_3a_2$	$a_1a_4a_2$	$a_1a_5a_2$	$a_1a_4a_3$	$a_1a_5a_3$	$a_1a_5a_4$	$a_2a_4a_3$	$a_2a_5a_3$	$a_2a_5a_4$	$a_3a_5a_4$
$a_2a_1a_3$	$a_2a_1a_4$	$a_2a_1a_5$	$a_3a_1a_4$	$a_3a_1a_5$	$a_4a_1a_5$	$a_3a_2a_4$	$a_3a_2a_5$	$a_4a_2a_5$	$a_4a_3a_5$
$a_2a_3a_1$	$a_2a_4a_1$	$a_2a_5a_1$	$a_3a_4a_1$	$a_3a_5a_1$	$a_4a_5a_1$	$a_3a_4a_2$	$a_3a_5a_2$	$a_4a_5a_2$	$a_4a_5a_3$
$a_3a_1a_2$	$a_4a_1a_2$	$a_5a_1a_2$	$a_4a_1a_3$	$a_5a_1a_3$	$a_5a_1a_4$	$a_4a_2a_3$	$a_5a_2a_3$	$a_5a_2a_4$	$a_5a_3a_4$
$a_3a_2a_1$	$a_4a_2a_1$	$a_5a_2a_1$	$a_4a_3a_1$	$a_5a_3a_1$	$a_5a_4a_1$	$a_4a_3a_2$	$a_5a_3a_2$	$a_5a_4a_2$	$a_5a_4a_3$

Esta listagem está organizada de modo que, em cada coluna, os objetos envolvidos são os mesmos. Note o seguinte: como a ordem não importa, os elementos de cada coluna são iguais, ou seja, só precisamos de um deles. Mas em cada coluna temos as permutações dos três objetos envolvidos. Logo, o número de elementos em cada coluna neste exemplo é $3! = 6$. Como só precisamos de um de cada 3!, o número total é

$$\frac{60}{3!} = \frac{5!}{2!3!}.$$

Ilustramos com esse exemplo o conceito e o cálculo do número de combinações simples de n elementos distintos tomados k a k. Dado um conjunto de n elementos distintos, a *combinação dos n elementos tomados k a k* nos dá o número de subconjuntos com k elementos (note que, em um conjunto, a ordem dos elementos não importa).

Combinações simples

Dados n objetos distintos, o número de **combinações simples** de k elementos tomados dentre os n é

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \tag{7.10}$$

O número $\binom{n}{k}$ é chamado número ou coeficiente binomial, ou ainda, número combinatório.

Note a diferença: no conceito de arranjo, estamos lidando com *sequências* de k elementos, enquanto no conceito de combinação, estamos lidando com *subconjuntos*. Nas sequências, a ordem dos elementos é relevante, mas não nos subconjuntos.

Exemplo 7.12 Comissão

De um grupo de oito homens e cinco mulheres devem ser escolhidos três homens e três mulheres para formar uma comissão. Quantas comissões podem ser formadas se João e Maria, que pertencem ao grupo original, não aceitam participar em conjunto da comissão?

Solução:

O número total de comissões é $\binom{8}{3} \times \binom{5}{3} = 560,$. O número de comissões em que Maria e João estão juntos é dado por

$$\binom{7}{2} \times \binom{4}{2} = \frac{7!}{2!5!} \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{7 \times 6}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} = 126$$

Logo, o número de comissões em que João e Maria não estão juntos é $560 - 126 = 434$. ♦♦

Exemplo 7.13 Cartas de um baralho

De quantas maneiras podemos retirar três cartas de um baralho normal de 52 cartas de modo que

1. todas as três sejam do naipe de espadas?
2. todas as três sejam do mesmo naipe?
3. todas as três sejam de naipes diferentes?.

Solução:

1. Existem 13 cartas de espadas. Seja n o número de mãos de 3 cartas, todas de espadas. Então,
$$n = \binom{13}{3} = \frac{13!}{3!10!} = \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2} = 286$$

2. O mesmo cálculo feito no item anterior vale para os 4 naipes. Seja m o número de mãos de 3 cartas, todas de um mesmo naipe. Então,
$$m = 286 + 286 + 286 + 286 = 286 \times 4 = 1144$$
Note que podemos somar porque os conjuntos de mãos de 3 cartas de cada um dos naipes são disjuntos.

3. Seja p o número de mãos de 3 cartas, todas de naipes diferentes. Para a primeira carta, temos 52 possibilidades – qualquer carta serve. Para a segunda carta, temos que excluir as cartas do naipe da primeira; logo, sobram 39. Para a terceira, temos que excluir as cartas dos dois naipes anteriores; logo, sobram 26. Pelo princípio da multiplicação, resulta que
$$p = 52 \times 39 \times 26 = 52.728.$$
, e Note que "três cartas de naipes diferentes" e "três cartas do mesmo naipe" não são complementares, pois, por exemplo, a sequência CCE pertence ao complementar de "três cartas do mesmo naipe", mas não pertence a "três cartas de naipes diferentes".

♦♦

Exemplo 7.14 Mega-sena

No jogo da Mega-Sena da Caixa Econômica Federal, o apostador deve escolher no mínimo seis e no máximo 15 números diferentes entre 1 e 60. Um jogo simples consiste na escolha de 6 números e os preços das apostas se baseiam no número de jogos simples em cada cartão. Qual é o número total de jogos simples distintos? Num cartão com 15 números marcados, quantos são os jogos simples? Se cada jogo simples custa R$1,50, qual o preço de um cartão com 15 números marcados?

Solução:

Note que, na Mega-Sena, a ordem não importa; logo, o número total de jogos simples é
$$\begin{aligned}\binom{60}{6} &= \frac{60!}{6!54!} \\ &= \frac{60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55 \times 54!}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 54!} \\ &= 50.063.860\end{aligned}$$

Isso significa que a sua chance de acertar a sena é $\dfrac{1}{50.063.860} = 0,000000019974.$

Num cartão com 15 números marcados, o número de jogos simples é

$$\binom{15}{6} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9!}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 9!} = 5005$$

e, assim, o preço desse cartão é $1,50 \times 5005 = 7507,5$. ♦♦

Exemplo 7.15 Time de futebol
Para a seleção brasileira foram convocados 2 goleiros, 6 zagueiros, 7 meios-de-campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios-de-campo, e 2 atacantes?

Solução:
$\binom{2}{1} \times \binom{6}{4} \times \binom{7}{4} \times \binom{4}{2} = 6.300$ ♦♦

Exemplo 7.16 Torneios
Em um torneio no qual cada participante enfrenta todos os demais, são jogadas 780 partidas. Quantos são os participantes?

Solução:
Cada jogador tem $n-1$ oponentes. Logo, existem $n \times (n-1)$ maneiras de selecionar dois participantes. Como a ordem dos dois selecionados não importa, o número total de partidas é $\dfrac{n \times (n-1)}{2}$. Logo,

$$\frac{n \times (n-1)}{2} = 780 \Rightarrow n^2 - n - 1.560 = 0 \Rightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 6.240}}{2} = \frac{1 \pm 79}{2}$$

As raízes de tal equação são $n = 40$ e $n = -39$. Como n tem que ser positivo, a solução é $n = 40$ partidas. ♦♦

7.6 Exercícios propostos

1. Quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6, 7, 8, 9?

2. Quantos inteiros entre 1000 e 9999 têm dígitos distintos e

   (a) são pares?

   (b) consistem apenas de dígitos ímpares?

3. De quantas maneiras podemos escolher 3 números naturais distintos de 1 a 30, de modo que a soma dos números escolhidos seja par?

4. Determine o valor de n se

   (a) $A_n^2 = 72$

   (b) $A_n^4 = 42A_n^2$

   (c) $4A_n^2 = A_{2n}^3$

5. Numa promoção beneficente, 22 pessoas estão disponíveis para exercer diversas atividades. Se há necessidade de 6 pessoas na cozinha, 4 pessoas no balcão de a tendimento, 4 pessoas para os caixas, 6 pessoas para vender cartelas de bingo e 2 pessoas responsáveis pela animação, de quantas maneiras é possível fazer a escalação?

6. Suponha que, no problema anterior, cada pessoa execute uma tarefa diferente no seu próprio grupo, com exceção das pessoas que vendem cartelas de bingo. De quantas maneiras diferentes a escalação pode ser feita?

7. Considere as letras da palavra PERMUTA. Quantos anagramas de 4 letras podem ser formados, se

   (a) não há qualquer restrição sobre as letras do anagrama?

   (b) o anagrama começa e termina por vogal?

   (c) a letra R aparece?

   (d) a letra T aparece e o anagrama termina por vogal?

   (e) a letra T aparece ou o anagrama termina por vogal?

8. Quantos números formados por 3 algarismos distintos escolhidos dentre 2, 4, 6, 5, 9 contêm o 2 ou não contêm o 6?

9. Quantos anagramas da palavra PASTEL começam e terminam com consoante?

10. Temos 15 livros, dos quais 4 são de Estatística. De quantas maneiras podemos coloca-los numa prateleira, de modo que os livros de Estatística fiquem sempre juntos?

11. Mostre que $\dfrac{(n+2)! + (n+1)(n-1)!}{(n+1)(n-1)!}$ é um quadrado perfeito.

12. Um grupo é formado por 20 pessoas, das quais 5 são Físicos. Quantas comissões de 10 pessoas podem ser formadas de modo que

    (a) nenhum membro seja Físico?

    (b) todos os Físicos participem da comissão?

    (c) haja exatamente um Físico na comissão?

    (d) pelo menos um Físico participe da comissão?

13. De quantas maneiras 12 estudantes podem ser divididos e colocados em 3 salas, sendo 4 na primeira sala, 5 na segunda e 3 na terceira?

14. Em uma urna há 15 bolas numeradas de 1 a 15. Três bolas são retiradas da urna sem reposição, anotando-se a sequência dos números das bolas. Em quantas dessas sequências

    (a) o menor número é 7 ?

    (b) o maior número é 7 ?

15. Quantas coleções não vazias de letras podem ser formadas com n A's, n B's, n C's e n D's?

16. Quantos números distintos podem ser formados pelo produto de dois ou mais números do multiconjunto[2] $3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7$?

17. Um coro possui 10 membros. De quantas maneiras se pode selecionar 3 grupos distintos de 6 membros cada, por ocasião de 3 eventos distintos?

18. De quantas maneiras 18 objetos distintos podem ser divididos entre 5 pessoas de modo que

    (a) 4 pessoas fiquem com 4 objetos cada e uma fique com 2 objetos?

    (b) 3 pessoas recebam 4 objetos cada e as outras duas recebam 3 objetos cada?

19. De um grupo de n pessoas, k ($k \leq n$) serão escolhidas para um comitê, das quais uma será o presidente do comitê. Neste contexto, interprete cada uma das expressões:

    (a)
    $$\binom{n}{k} \cdot k$$

    (b)
    $$\binom{n}{k-1} \cdot (n-k+1)$$

    (c)
    $$n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

    Conclua e demonstre que
    $$\binom{n}{k} \cdot k = \binom{n}{k-1} \cdot (n-k+1) = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

20. Quantos são os divisores inteiros e positivos 360? Quantos deles são pares? Quantos deles são ímpares? Quantos são quadrados perfeitos?

[2] denominação utilizada para conjuntos que consideram relevante, em sua composição, o número de cópias de cada elemento

Capítulo 8

Triângulo de Pascal e Binômio de Newton

8.1 Triângulo de Pascal e Binômio de Newton

O triângulo de Pascal é um quadro em formato de um triângulo (que consideraremos retângulo para facilitar a exibição), formado pelos números binomiais dispostos da seguinte forma: na hipotenusa, todos os elementos são iguais a 1, bem como no cateto vertical:

Linha							
0	1						
1	1	1					
2	1		1				
3	1			1			
4	1				1		
5	1					1	
6	1						1
$\vdots$	$\vdots$						

Cada elemento no interior do triângulo é obtido como a soma do elemento imediatamente acima e do primeiro elemento acima à esquerda; o processo recursivo de construção se faz linha a linha, iniciando-se na segunda linha, conforme ilustrado a seguir:

Linha							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1			1			
4	1				1		
5	1					1	
6	1						1
$\vdots$	$\vdots$						

Linha							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3		1			
4	1				1		
5	1					1	
6	1						1
⋮	⋮						

Linha							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1				1		
5	1					1	
6	1						1
⋮	⋮						

Linha							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4			1		
5	1					1	
6	1						1
⋮	⋮						

Linha							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6		1		
5	1					1	
6	1						1
⋮	⋮						

Linha							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1					1	
6	1						1
⋮	⋮						

Continuando com esse procedimento, obtém-se o triângulo de Pascal a seguir (note que esse triângulo tem infinitas linhas e infinitas colunas...)

Linha							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
⋮	⋮						

Os números que aparecem em cada linha do triângulo são os *números binomiais*, definidos no capítulo anterior. Numerando as linhas e colunas do triângulo a partir de zero, o elemento da linha n e coluna k é $\binom{n}{k}$. Então, em cada linha n, os elementos vão desde $\binom{n}{0}$ até $\binom{n}{n}$.

	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	1								$\binom{0}{0}$							
1	1	1							$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
2	1	2	1						$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
3	1	3	3	1					$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
4	1	4	6	4	1				$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			
5	1	5	10	10	5	1			$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		
6	1	6	15	20	15	6	1		$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$	
$\vdots$																

Existem vários resultados sobre os números combinatórios e várias propriedades associadas às linhas e colunas do triângulo de Pascal. A propriedade utilizada na construção do triângulo é a propriedade já vista dos números binomiais, chamada Relação de Stifel.

Teorema 8.1 Relação de Stifel
A soma de dois elementos consecutivos de uma mesma linha é igual ao elemento situado abaixo da última parcela, ou seja

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \tag{8.1}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} = \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k)\,(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)\,k!\,(n-k-1)!} = \\
&= \frac{n!\,(k+1) + n!\,(n-k)}{[(k+1)\,k!][(n-k)\,(n-k-1)!]} = \frac{n!\,(k+1+n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!} = \\
&= \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

□

Considere a n-ésima linha do triângulo de Pascal e seja $k < n$. Então, $\binom{n}{k}$ é o elemento que está na linha n avançado de k colunas em relação ao início da linha; já $\binom{n}{n-k}$ é o elemento que está na linha n atrasado de k colunas em relação ao final da linha. Números combinatórios como $\binom{n}{k}$ e $\binom{n}{n-k}$ são chamados *combinações complementares*.

Teorema 8.2 Relação das Combinações Complementares
Em uma mesma linha do triângulo de Pascal, elementos equidistantes dos extremos são

iguais, ou seja:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{8.2}$$

Demonstração:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,[n-(n-k)]!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

□

Teorema 8.3 Teorema das Linhas
A soma dos elementos da n-ésima linha é igual a 2^n, ou seja:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n \tag{8.3}$$

Em termos de somatório:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$$

Demonstração:
Como visto, o número combinatório $\binom{n}{k}$ dá o número de subconjuntos de tamanho k de um conjunto de tamanho n. Assim, na expressão (8.3), cada número combinatório dá o número de subconjuntos de determinado tamanho e a soma deles dá o número total de subconjuntos de um conjunto de tamanho n. Mas para formar subconjuntos de tal conjunto podemos usar o seguinte artifício: cada elemento pode ser marcado com um $+$ para indicar que pertence ao subconjunto, ou com um $-$, para indicar que não pertence ao subconjunto. O número total de formas de fazer isso é $2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ e isso prova que o número total de subconjuntos de um conjunto de tamanho n é 2^n e isso completa a prova.

□

Teorema 8.4 Teorema das colunas
A soma dos elementos de uma coluna do triângulo de Pascal, começando da primeira linha, é igual ao elemento que está avançado uma linha e uma coluna em relação ao último elemento da soma, ou seja:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{k+n}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$$

Em termos de somatório:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{k+j}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$$

Demonstração:
Vamos aplicar a relação de Stifel aos elementos da coluna $k+1$, a partir da primeira linha desta coluna:

$$\begin{aligned}
\binom{k+1}{k+1} &= \binom{k}{k} \\
\binom{k+2}{k+1} &= \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} \\
\binom{k+3}{k+1} &= \binom{k+2}{k} + \binom{k+2}{k+1} \\
\binom{k+4}{k+1} &= \binom{k+3}{k} + \binom{k+3}{k+1} \\
&\vdots \\
\binom{k+n-1}{k+1} &= \binom{k+n-2}{k} + \binom{k+n-2}{k+1} \\
\binom{k+n}{k+1} &= \binom{k+n-1}{k} + \binom{k+n-1}{k+1} \\
\binom{k+n+1}{k+1} &= \binom{k+n}{k} + \binom{k+n}{k+1}
\end{aligned}$$

Somando essas igualdades termo a termo, podemos ver que há parcelas iguais em lados opostos, que podem ser simplificadas. Todos os termos do lado esquerdo, com exceção do último, cancelam com termos do lado direito e o que sobra é:

$$\binom{k+n+1}{k+1} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \binom{k+3}{k} + \cdots + \binom{k+n-2}{k} + \binom{k+n-1}{k} + \binom{k+n}{k}$$

ou seja

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{k+j}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$$

o que completa a prova.

$\square$

Teorema 8.5 Binômio de Newton
Dados quaisquer números reais x e a e um inteiro qualquer n, então

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k x^{n-k} \tag{8.4}$$

Demonstração:
Vamos provar este resultado usando o método da indução.

- O resultado é válido para $n=1$. De fato:

$$\begin{aligned}
(x+a)^1 &= x+a \\
\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k x^{n-k} &= \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} a = x + a
\end{aligned}$$

- Suponhamos que o resultado seja válido para n qualquer e vamos provar que é válido para $n+1$. Mais precisamente, temos as seguintes hipótese de indução e tese:

$$\begin{aligned} \textbf{H.I.}: &\quad (x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k x^{n-k} \\ \textbf{Tese}: &\quad (x+a)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k x^{n+1-k} \end{aligned}$$

Usando propriedades de potência e a hipótese de indução, podemos escrever:

$$\begin{aligned} (x+a)^{n+1} &= (x+a)(x+a)^n \\ &= (x+a)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k x^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} x^{n-k} \end{aligned}$$

Vamos separar o primeiro termo ($k=0$) do primeiro somatório e o último termo ($k=n$) do segundo somatório:

$$\begin{aligned} (x+a)^{n+1} &= \left[\binom{n}{0} a^0 x^{n-0+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k x^{n-k+1}\right] + \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} x^{n-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} x^{n-n}\right] \\ &= \left[\binom{n}{0} a^0 x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k x^{n-k+1}\right] + \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} x^{n-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} x^{0}\right] \end{aligned}$$

Note que ambos os somatórios têm n parcelas cada um. Vamos fazer uma mudança de variável no segundo somatório, de modo que a potência de a passe a ser j em vez de $k+1$. Mais precisamente, vamos definir

$$k+1 = j \Rightarrow \begin{cases} k = j-1 \\ k = 0 \Rightarrow j = 1 \\ k = n-1 \Rightarrow j = n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x+a)^{n+1} &= \left[\binom{n}{0} a^0 x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k x^{n-k+1}\right] + \left[\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^{j} x^{n-j+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} x^{0}\right] \\ &= \left[\binom{n}{0} a^0 x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k x^{n-k+1}\right] + \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{k} x^{n-k+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} x^{0}\right] \end{aligned}$$

Aqui, apenas trocamos o índice j por k. Note que as potências de a e x são as mesmas em ambos os somatórios. Logo, podemos colocar em evidência num único somatório:

$$(x+a)^{n+1} = \binom{n}{0}a^0x^{n+1} + \left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]a^kx^{n-k+1}\right\} + \binom{n}{n}a^{n+1}x^0$$

Note, agora, os números combinatórios que aparecem entre colchetes: estamos somando 2 números combinatórios consecutivos da linha n. Pela relação de Stifel, sabemos que

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Sabemos, também, que

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$$
$$\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$$

Substituindo esses resultados, obtemos que

$$\begin{aligned}(x+a)^{n+1} &= \binom{n+1}{0}a^0x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^kx^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}x^0 \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kx^{n-k+1}\end{aligned}$$

o que completa a prova.

□

Na expansão do Binômio de Newton, podemos escrever

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} + \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}x^na^0 = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{n+1}$$

ou seja,

$$T_{i+1} = \binom{n}{i}x^ia^{n-i} \quad i = 0, \ldots, n.$$

Exemplo 8.1
Calcule o quinto termo da expansão de $(2+3x)^9$.

Solução:
$i+1=5 \Rightarrow i=4$ e

$$T_5 = \binom{9}{4}2^4(3x)^{9-4} = 126\cdot 16\cdot 243\cdot x^5 = 489888x^5$$

♦♦

8.1.1 Aplicações

1. Note que, fazendo $x = 1$ e $a = 1$ na equação (8.4), obtemos que

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

o que nos dá uma outra prova do teorema das linhas.

2. Note que, fazendo $x = 1$ e $a = -1$ na equação (8.4), obtemos que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

3. Fórmula de Euler:

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r} \tag{8.5}$$

Essa fórmula pode ser considerada verdadeira para quaisquer valores de m, n, r desde que adotemos a convenção de que $\binom{n}{r} = 0$ para $r > n$.

Para demonstrar esse resultado usando argumentos combinatórios, suponha um conjunto com $n+m$ elementos, de modo que m desses elementos estão em uma categoria I e os n elementos restantes estão em outra categoria II.

Vamos expandir o termo do lado esquerdo:

$$\binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{r-2} + \cdots + \binom{m}{r}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{r}$$

O termo do lado direito da expressão nos dá o número de subconjuntos deste conjunto com r elementos. O primeiro termo da soma do lado esquerdo nos dá o número de subconjuntos com nenhum elemento da categoria I e r elementos da categoria II; o segundo termo nos dá o número de subconjuntos com exatamente um elemento da categoria I e $r-1$ elementos da categoria II; o terceiro termo nos dá o número de subconjuntos com exatamente dois elementos da categoria I e $r-2$ elementos da categoria II e, sucessivamente, o último termo nos dá o número de subconjuntos com exatamente r elementos da categoria I e nenhum elemento da categoria II. Somando esses termos, obtemos o número total de subconjuntos com r elementos, que é $\binom{m+n}{r}$.

4. Vamos mostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

De fato:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!}$$

Como $k \neq 0$, podemos dividir ambos os termos por k, o que resulta

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $k - 1 = j$, podemos escrever (note os índices do somatório!):

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!} = n\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} = n\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n2^{n-1}$$

usando o resultado (8.3).

5. Vamos mostrar que

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$

De fato: fazendo $k - 1 = j$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} &= \sum_{j=1}^{n-1}(j+1)j\binom{n}{j+1} = \sum_{j=1}^{n-1}(j+1)j\frac{n!}{(j+1)!(n-j-1)!} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1}(j+1)j\frac{n!}{(j+1)j!!(n-j-1)!} = \sum_{j=1}^{n-1} j\frac{n!}{j(j-1)!(n-j-1)!} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(j-1)!(n-j-1)!}
\end{aligned}$$

Fazendo $j - 1 = i$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(j-1)!(n-j-1)!} = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{n!}{i!(n-i-2)!} \\
&= \sum_{i=0}^{n-2} \frac{n(n-1)(n-2)!}{i!(n-2-i)!} = n(n-1)\sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} = n(n-1)2^{n-2}
\end{aligned}$$

Mais uma vez, usamos o teorema das linhas.

6. Se n é par, então

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n}$$

De fato: o desenvolvimento do binômio de Newton nos dá que

$$\begin{aligned}
(x+a)^n &= \binom{n}{0}a^0x^n + \binom{n}{1}a^1x^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} \\
&+ \cdots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}x^1 + \binom{n}{n}a^nx^0 \\
&\equiv T_0 + T_1 + T_2 + \cdots + T_{n-1} + T_n
\end{aligned}$$

em que

$$T_k = \binom{n}{k} a^k x^{n-k}$$

Analogamente, se n é par

$$\begin{aligned}
(x-a)^n &= \binom{n}{0}(-a)^0 x^n + \binom{n}{1}(-a)^1 x^{n-1} + \binom{n}{2}(-a)^2 x^{n-2} \\
&+ \cdots + \binom{n}{n-1}(-a)^{n-1} x^1 + \binom{n}{n}(-a)^n x^0 \\
&\equiv T_0 - T_1 + T_2 + \cdots - T_{n-1} + T_n
\end{aligned}$$

Então,

$$(x+a)^n + (x-a)^n = 2(T_0 + T_2 + \cdots + T_{n-2} + T_n)$$

e

$$(x+a)^n - (x-a)^n = 2(T_1 + T_3 + \cdots + T_{n-3} + T_{n-1})$$

Fazendo $x = a = 1$, resulta que

$$\begin{aligned}
2^n &= 2(T_0 + T_2 + \cdots + T_{n-2} + T_n) = 2\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n}\right] \\
2^n &= 2(T_1 + T_3 + \cdots + T_{n-3} + T_{n-1}) = 2\left[\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1}\right]
\end{aligned}$$

Logo, se n é par

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} = 2^{n-1}$$

7. Números de Fibonacci e o triângulo de Pascal

A sequência $\{F_n\}$ de Fibonacci é definida recursivamente como

$$\begin{aligned}
F_1 &= 1 \\
F_2 &= 1 \\
F_n &= F_{n-2} + F_{n-1}
\end{aligned}$$

Os números da sequência de Fibonacci F_n podem ser obtidos como a soma dos elementos da $n-$ésima “diagonal inversa” do triângulo de Pascal. Veja a Figura 8.1.

$$\begin{aligned}
F_n &= \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots \binom{n-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} && n \text{ par} \\
F_n &= \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots \binom{n-\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}} && n \text{ ímpar}
\end{aligned}$$

Cada número na sequência de Fibonacci é a soma dos dois números anteriores, isto é:

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

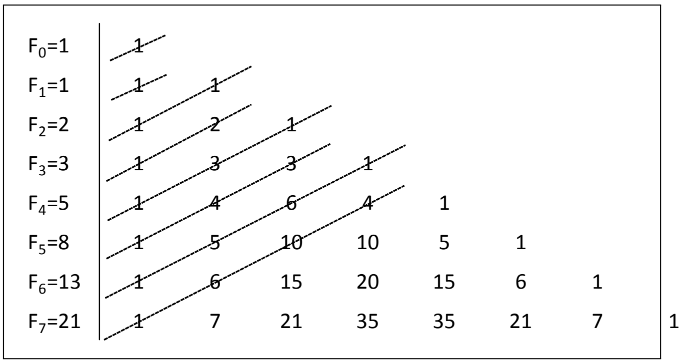


Figura 8.1 – Números de Fibonacci no Triângulo de Pascal

De fato: sem perda de generalidade, vamos supor n par (logo, $n+1$ é ímpar e $n+2$ é par.)

$$
\begin{aligned}
F_n + F_{n+1} &= \left[\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots \binom{n-\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\frac{n}{2}-1} + \binom{n-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\right] + \\
&\quad \left[\binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + \cdots + \binom{n+1-\frac{n+1-1}{2}}{\frac{n+1-1}{2}}\right] \\
&= \left[\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots \binom{n+1-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-1} + \binom{n-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\right] + \\
&\quad \left[\binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + \cdots + \binom{n+1-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\right] \\
&= \binom{n+1}{0} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right] + \left[\binom{n-2}{2} + \binom{n-2}{3}\right] + \cdots \\
&\quad \left[\binom{n+1-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-1} + \binom{n+1-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\right] + \binom{n-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \\
&= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{3} + \cdots + \binom{n+2-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} + \binom{n-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}
\end{aligned}
$$

Note os seguintes fatos:

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n+2}{0}$$

$$n \text{ par} \implies n = 2 \times \frac{n}{2} \implies \binom{n-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} = \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} = \binom{n+2-\frac{n+2}{2}}{\frac{n+2}{2}} = \binom{n+2-\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\frac{n}{2}+1}$$

Resulta, então, que

$$F_n+F_{n+1} = \binom{n+2}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n-1}{3}+\cdots+\binom{n+2-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}+\binom{n+2-\frac{n+2}{2}}{\frac{n+2}{2}} = F_{n+2}$$

8.2 Exercícios propostos

1. Calcule m sabendo que

$$\binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \cdots + \binom{m}{m-1} = 254.$$

2. Prove que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

3. Desenvolva as seguintes potências:
   (a) $\left(\dfrac{x^3}{2} + 1\right)^5$
   (b) $(2y + 3x)^4$
   (c) $\left(2a - \dfrac{3}{b}\right)^3$

4. Calcule o sexto termo de cada uma das seguintes expansões:
   (a) $\left(1 - \dfrac{2}{b}\right)^{15}$
   (b) $\left(2x + \dfrac{1}{x}\right)^9$
   (c) $\left(3x^2 - \dfrac{2}{x^3}\right)^{10}$

5. Calcule o termo independente de x nas seguintes potências:
   (a) $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^6$
   (b) $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^9$
   (c) $\left(x^3 + \dfrac{1}{x^3}\right)^8 \left(x^3 - \dfrac{1}{x^3}\right)^8$

6. Determine o coeficiente do termo em x^2 no desenvolvimento de $\left(x^3 + \dfrac{1}{x^2}\right)^9$.

7. Prove o seguinte resultado, usando o Teorema das Colunas: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k^2 + 2) = \frac{n(n+1)(n^2+n+4)}{4}$.

8. Obtenha o valor da soma $S = 1 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 + \cdots (2n-1) \cdot n^2$.

Capítulo 9

Aplicações

9.1 Permutações circulares

Consideremos agora a situação em que queremos colocar n objetos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo. Exemplos dessa situação: roda de ciranda, pessoas sentadas em torno de uma mesa redonda. O ponto relevante aqui é que consideramos equivalentes disposições que coincidem por rotação. Veja a Figura 9.1: rodando no sentido horário de tal forma que A ocupe o lugar de B, B ocupe o lugar de C, etc, temos a mesma disposição. Nesse exemplo, temos 5 disposições equivalentes: considerando a posição (1), por rotação, nela podem estar A, B, C , D ou E. Logo, das 5! disposições (permutações), 5 são equivalentes. Logo, o número de rodas nesse caso é $\frac{5!}{5} = 4!$

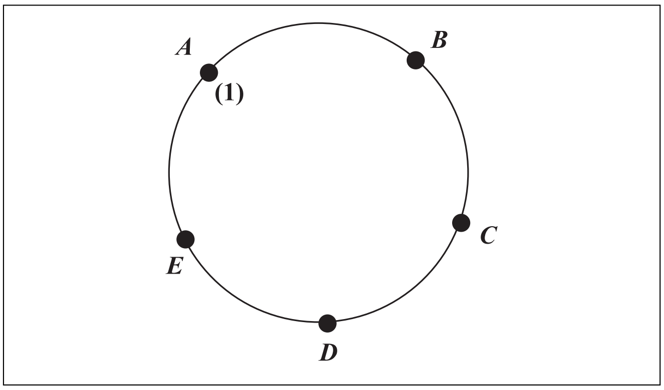


Figura 9.1 – Permutações circulares

Definição 9.1 Permutações circulares de objetos distintos
O número de permutações circulares de n objetos distintos é dado por

$$PC_n = (n-1)! \tag{9.1}$$

9.2 Soluções inteiras de equações lineares com coeficientes unitários

Vamos considerar uma equação da forma

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$$

Nosso objetivo é contar o número de soluções inteiras de tal equação. Mas para que haja um número finito de soluções, temos que restringir ainda mais, ou seja, não basta que as soluções sejam inteiras – é necessário que sejam inteiras positivas, por exemplo. Veremos depois o caso de soluções inteiras não negativas.

Vamos considerar o seguinte exemplo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13 \tag{9.2}$$

Vamos escrever 13 como a soma de 13 1s:

$$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 13 \tag{9.3}$$

Como as 5 soluções devem ser inteiras e positivas, elas podem ser escritas como soma de 1s. Assim, determinar essas soluções equivale a separar esses 13 1s em cinco grupos. Isso pode ser feito colocando 4 barras divisórias na soma acima. Algumas possibilidades são:

$$\begin{array}{l}
1+1 \mid +1+1+1 \mid +1+1 \mid +1+1+1+1 \mid +1+1 = 13 \\
1 \mid +1 \mid +1 \mid +1 \mid +1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 13 \\
1+1+1+1 \mid +1+1+1 \mid +1+1+1 \mid +1+1 \mid +1 = 13
\end{array}$$

Essas escolhas equivalem às seguintes soluções:

$$\begin{array}{lllll}
x_1 = 2 & x_2 = 3 & x_3 = 2 & x_4 = 4 & x_5 = 2 \\
x_1 = 1 & x_2 = 1 & x_3 = 1 & x_4 = 1 & x_5 = 9 \\
x_1 = 4 & x_2 = 3 & x_3 = 3 & x_4 = 2 & x_5 = 1
\end{array}$$

Note que as barras verticais estão posicionadas antes do sinal $+$. Então, para determinar uma solução inteira positiva, temos que posicionar 4 $(= 5 - 1)$ barras verticais nas 12 $(= 13 - 1)$ posições definidas pelos sinais de $+$. Logo, o número de soluções inteiras positivas é o número de maneiras de escolher 4 sinais de $+$ dentre os 12 disponíveis. Isso pode ser feito de C_{12}^4.

Isso nos permite enunciar o resultado geral.

Soluções de equações em inteiros positivos

O número de soluções da equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = m \qquad m > 0,\ x_i > 0$$

é dado por C_{m-1}^{r-1}.

Vamos considerar, agora, soluções inteiras não-negativas, isto é, vamos permitir que alguma, ou algumas, das incógnitas seja nula.

Continuando com a equação (9.2), vamos considerar a sequência de 13 1s:

$$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \tag{9.4}$$

Temos agora as seguintes semelhanças e diferenças:

- como antes, temos que colocar 4 barras separadoras para determinar os valores das 5 incógnitas;
- como a primeira e a última incógnitas podem ser nulas, podemos ter uma barra no início e/ou uma barra no final;
- como as demais incógnitas podem ser nulas, podemos ter barras "coladas".

Por exemplo, a solução (0,2,4,0,7) corresponde à seguinte decomposição:

$$|\ 1\ 1\ |\ 1\ 1\ 1\ 1\ |\ |\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1$$

Já a solução (0,0,5,8,0) corresponde à seguinte decomposição:

$$|\ |\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ |\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ |$$

Note que nessas decomposições temos 17 elementos: 4 barras verticais e 13 1s. As diferentes soluções inteiras não-negativas correspondem às diferentes maneiras de organizar as 4 (= 5−1) barras verticais nessas 17 (= 13+5−1) posições, ou seja, o número de soluções inteiras não-negativas é C_{17}^{4}.

Podemos enunciar o resultado geral da seguinte forma:

Soluções de equações em inteiros não-negativos

O número de soluções da equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = m \qquad m > 0,\ x_i \geq 0$$

é dado por C_{m+r-1}^{r-1}.

Uma outra forma de analisar o problema de soluções em inteiros não-negativos é explorando a sua relação com soluções inteiras positivas de uma outra equação obtida através de uma mudança de variável. Note o seguinte: se x_i é inteiro não-negativo, isto é, $x_i \geq 0$, se definimos $y_i = x_i + 1$, então y_i é inteiro e $y_i \geq 1$, ou equivalentemente, $y_i > 0$. Note que a condição de y_i ser inteiro é fundamental! Fazendo a mudança de variável $x_i = y_i - 1$, obtemos uma nova equação equivalente:

$$(y_1 - 1) + (y_2 - 1) + \cdots + (y_r - 1) = m \qquad m > 0,\ \ y_i > 0$$

ou ainda

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_r = m + r \qquad m > 0,\ \ y_i > 0$$

cujo número total de soluções é, como visto anteriormente, C_{m+r-1}^{r-1}.

Note que

$$C_{m+r-1}^{r-1} = C_{m+r-1}^{m}$$

pela lei dos complementares.

Exemplo 9.1 Soluções inteiras de equações
Considere a seguinte equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

(a) Determine o número de soluções inteiras positivas.

(b) Determine o número de soluções inteiras não-negativas.

(c) Determine o número de soluções inteiras positivas, em que $x_2 > 4$.

Solução:

(a)

$$C_{12-1}^{3-1} = C_{11}^{2} = \frac{11!}{9!2!} = \frac{11 \times 10 \times 9!}{9!2!} = 55$$

(b)

$$C_{12+3-1}^{3-1} = C_{14}^{2} = \frac{14!}{12!2!} = \frac{14 \times 13 \times 12!}{12!2!} = 91$$

(c) Fazendo as seguintes mudanças de variável:

$$y_1 = x_1 \qquad y_2 = x_2 - 4 \qquad y_3 = x_3$$

a equação dada pode ser escrita com:

$$y_1 + (y_2 + 4) + y_3 = 12 \qquad y_i > 0$$

que é equivalente a

$$y_1 + y_2 + y_3 = 8 \qquad y_i > 0$$

Como a transformação acima é biunívoca, o número de soluções das duas equações é o mesmo:

$$C_{8-1}^{3-1} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

♦♦

9.3 Permutações, arranjos e combinações com repetição

Permutações

Considere a palavra URUGUAI: quantos anagramas podemos formar a partir dela? A novidade nesse exemplo é que há 3 letras U's, que não podem ser diferenciadas. Para lidar com essa situação, começamos "fingindo" que as 3 letras U's são diferentes; então, temos 7 letras e o número total de permutações é 7!. Por sua vez, as 3 letras U's podem ser arrumadas de 3! maneiras, mas como elas são iguais, todas essas 3! permutações são idênticas. Veja alguns exemplos a seguir, onde colocamos um subscrito para diferenciar as letras U's:

$$\begin{array}{lll}
U_1RU_2GU_3AI & U_1RU_2GU_3IA & AIU_1RU_2GU_3 \\
U_1RU_3GU_2AI & U_1RU_3GU_2IA & AIU_1RU_3GU_2 \\
U_2RU_1GU_3AI & U_2RU_1GU_3IA & AIU_2RU_1GU_3 \\
U_2RU_3GU_1AI & U_2RU_3GU_1IA & AIU_2RU_3GU_1 \\
U_3RU_1GU_2AI & U_3RU_1GU_2IA & AIU_3RU_1GU_2 \\
U_3RU_2GU_1AI & U_3RU_2GU_1IA & AIU_3RU_2GU_1
\end{array}$$

Em cada coluna, temos permutações idênticas. O número de elementos em cada coluna corresponde ao número de permutações das 3 letras U's. Então, cada coluna tem 3! permutações idênticas, ou seja, de cada 3! permutações, precisamos de apenas 1. Assim, para corrigir essa múltipla contagem, temos que dividir o total de 7! por 3!

Esse exemplo ilustra a seguinte situação geral.

Definição 9.2 Permutações com repetição ou de objetos nem todos distintos
São dados n objetos, dos quais n_1 são iguais entre si, n_2 são iguais entre si e distintos dos demais, ..., n_k são iguais entre si e distintos de todos os restantes. Então, $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ e o número de permutações desses objetos é dado por

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} \qquad n = \sum_{i=1}^{k} n_i \tag{9.5}$$

Exemplo 9.2 Lançamento de um dado
Um dado é jogado 20 vezes. De quantas maneiras podemos obter 6 1s, 5 2s, 2 3s, 2 4s, 3 5s e 2 6s?

Solução:
Temos uma sequência com 20 números, dos quais 6 são iguais a 1, 5 são iguais a 2, dois são iguais a 3, dois são iguais a 4, 3 são iguais a 5 e dois são iguais a 6. Como não podemos distinguir entre os números de cada bloco, a resposta é

$$\frac{20!}{6!5!2!2!3!2!}$$

♦♦

Exemplo 9.3 Sucessos e fracassos em repetições de um experimento de Bernoulli
Considere um experimento com apenas dois resultados possíveis. Por conveniência, chamamos esses resultados de sucesso e fracasso. Esses experimentos são chamados de *experimentos de Bernoulli*. Se repetirmos esse experimento 5 vezes, de quantas maneiras podemos obter 2 sucessos? Generalize o resultado para n tentativas e um número k de sucessos, $k = 0, 1, \cdots n$.

Solução:
Em 5 tentativas, se ocorrem 2 sucessos, ocorrem também 3 fracassos. O número de maneiras de obtermos 2 sucessor e 3 fracassos é

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!}$$

Vamos usar índices para identificar os sucessos e fracassos. Então as seguintes sequências de resultados correspondem a maneiras diferentes de obtermos 2 sucessos:

$$S_1F_1S_2F_2F_3$$
$$F_1S_1S_2F_2F_2$$

Mas as sequências abaixo são iguais, pois não podemos diferenciar os sucessos ou fracassos:

$$S_1F_1S_2F_2F_3$$
$$S_2F_2S_1F_2F_3$$
$$S_2F_2S_1F_1F_3$$

Por isso divide-se o total por $2! \times 3!$.

O resultado geral é o seguinte: se temos n repetições de um experimento de Bernoulli, o número de maneiras de se obter k sucessos e, portanto, $n-k$ fracassos é

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{9.6}$$

♦♦

Exemplo 9.4
De quantas maneiras podemos alocar 13 pessoas em 3 quartos, de modo que no primeiro quarto fiquem 5 pessoas, no segundo quarto fiquem 2 pessoas e no terceiro quarto fiquem 6 pessoas?

Solução:
Podemos escolher as 5 pessoas do primeiro quarto de $\binom{13}{5}$ maneiras. Escolhidas essas 5 pessoas, há $\binom{8}{2}$ maneiras de escolher as pessoas do segundo quarto. Finalmente, há $\binom{6}{6}$ maneiras de escolher as pessoas no terceiro quarto. Pelo Princípio Fundamental da Multiplicação, o número total de alocações é

$$\binom{13}{5}\binom{8}{2}\binom{6}{6} = \frac{13!}{5!8!}\frac{8!}{2!6!}\frac{6!}{6!0!} = \frac{13!}{5!2!6!}$$

Note a semelhança entre este e os dois exemplos anteriores: os quatro quartos correspondem às faces dos dados ou aos sucessos e fracassos do experimento de Bernoulli.

♦♦

Arranjos

Consideremos n objetos distintos, dos quais vamos escolher p objetos, *distintos ou não*, isto é, com reposição, de maneira ordenada, ou seja, a ordem das extrações é relevante. Para a primeira seleção há n possibilidades. Para a segunda também há n possibilidades, pois pode haver repetições. O mesmo vale para todas as seleções até a $p-$ésima. Logo, o número total de maneiras de extrairmos com reposição e ordenadamente p objetos dentre n é

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{p \text{ vezes}} = n^p$$

Exemplo 9.5 Placas de carros

Em um país, as placas de carros são formadas por 3 letras retiradas de um alfabeto de 26 caracteres, seguidas de 4 dígitos escolhidos dentre $\{0, 1, \cdots, 9\}$. Qual o número total de placas que podem ser geradas?

Solução:

As 3 letras podem ser escolhidas de 26^3 maneiras; os dígitos podem ser escolhidos de 10^4 maneiras. Pelo Princípio Fundamental da Multiplicação, o número total de placas é $26^3 \times 10^4 = 175.760.000$. ♦♦

Exemplo 9.6

De quantas maneiras podemos alocar 13 pessoas em 4 quartos, sabendo que é possível que haja quartos vazios?

Solução:

Cada uma das pessoas tem 4 quartos disponíveis. Logo, o número total de maneiras é $4^13 = 67.108.864$. ♦♦

Combinações

Consideremos n objetos distintos, dos quais vamos escolher p objetos,*distintos ou não*, sem levar em conta a ordem das escolhas. De quantas maneiras podemos fazer isso?

Para entender bem essa situação, considere o seguinte exemplo: numa sorveteria, há 7 sabores de sorvete dietético. Se eu quero comprar 4 bolas de sorvete dietético, de quantas maneiras posso escolher? A resposta *não* é C_7^4 – esse é o número de maneiras de escolher 4 bolas de sabores diferentes! Mas eu posso comprar 4 bolas do mesmo sabor, por exemplo.

Vamos denotar por x_i, $i = 1, \ldots, 7$, o número de bolas compradas do sabor i. Então, temos que ter x_i inteiro não-negativo satisfazendo a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4, \qquad x_i \geq 0$$

O número de soluções dessa equação nos dá o número total de maneiras de escolher as 4 bolas de sorvete. Esse número é $CR_7^4 = C_{7+4-1}^{7-1} = C_10^6 = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2} = 210$, conforme visto na Seção 9.2.

Vamos generalizar esse exemplo. O contexto é o seguinte: temos n tipos distintos de objetos, dos quais vamos escolher p, *distintos ou não*.

Vamos denotar por x_i o número de objetos escolhidos do tipo i, $i = 1, 2, \cdots, n$. Temos que ter x_i inteiro não-negativo satisfazendo a equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p, \qquad x_i \geq 0$$

O número de soluções dessa equação nos dá o número de combinações com repetição (ou *combinações completas*) de n objetos distintos tomados p a p e esse número é

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^{p-1} = C_{n+p-1}^{n} \tag{9.7}$$

Exemplo 9.7

Quinze médicos ginecologistas devem ser distribuídos por 4 postos de saúde, de modo que haja pelo menos um ginecologista em cada posto. De quantas maneiras podemos fazer a distribuição?

Solução:

Seja x_i o número de médicos no posto i. Temos que ter

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, \quad x_i > 0.$$

Note que aqui os postos equivalem aos sabores dos sorvetes e os 15 médicos – todos ginecologistas e, portanto, indistinguíveis entre si – às bolas compradas. A solução dessa equação, conforme visto na Seção 9.2, é $C_{14}^3 = \dfrac{14 \times 13 \times 12}{3 \times 2} = 364.$ ♦♦

Exemplo 9.8

Suponha que no exemplo anterior, o posto 1 tenha que ter pelo menos 3 ginecologistas, o posto 4, pelo menos 2 e todos os postos têm que ter ginecologistas. De quantas maneiras podemos fazer a distribuição?

Solução:

Agora temos que ter

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, \quad x_1 \geq 3,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0,\ x_4 \geq 2.$$

Fazendo mudança de variável, temos que

$$x_1 \geq 3 \Rightarrow x_1 - 3 \geq 0 \Rightarrow x_1 - 2 \geq 1 \therefore y_1 = x_1 - 2,\ y_1 > 0$$
$$x_4 \geq 2 \Rightarrow x_4 - 2 \geq 0 \Rightarrow x_4 - 1 \geq 1 \therefore y_4 = x_4 - 1,\ y_4 > 0$$

A equação original é equivalente a

$$y_1 + 2 + x_2 + x_3 + y_4 + 1 = 15 \Longleftrightarrow y_1 + x_2 + x_3 + y_4 = 12, \quad y_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0,\ y_4 > 0$$

e o número de soluções é $C_{11}^3 = \dfrac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2} = 165.$ ♦♦

9.4 Aplicações em amostragem

Considere uma população formada por N objetos distintos. Dessa população vamos extrair uma amostra de tamanho n. Quantas são as amostras possíveis? A resposta a essa pergunta depende de dois fatores. O primeiro fator diz respeito à relevância da ordem de retirada dos elementos, ou seja, a amostra ABC é diferente da amostra BCA? O segundo fator diz respeito ao método de seleção. As extrações serão feitas com ou sem reposição, ou um mesmo elemento pode ser sorteado mais de uma vez?

9.4.1 Amostras ordenadas

Vamos considerar inicialmente que as amostras sejam ordenadas. Se a amostragem é feita com reposição, então para a primeira extração temos os N elementos disponíveis, assim como para todas as outras extrações. Logo, pelo Princípio Fundamental da Multiplicação, o **número total de amostras ordenadas com reposição** é

$$\underbrace{N \times N \times \cdots \times N}_{n \text{ vezes}} = N^n.$$

Entenda que nessa contagem estão sendo contabilizadas como diferentes as amostras ABBA e AABB. Além disso, como a amostragem é com reposição, podemos ter amostras de tamanho maior que N.

Se a amostragem é sem reposição, para a primeira extração temos N elementos disponíveis; para a segunda, $N-1$ elementos; para a terceira, $N-3$. Continuando, para a última extração teremos $N-(n-1) = N-n+1$ elementos. Pelo Princípio Fundamental da Multiplicação, o **número total de amostras ordenadas sem reposição** é

$$N \times (N-1) \times (N-2) \times \cdots \times (N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!} = A_N^n.$$

Como antes, as amostras ABBA e AABB estão sendo contabilizadas como diferentes, mas agora temos que ter $n \leq N$.

9.4.2 Amostras não ordenadas

Vamos considerar, agora, o caso de amostras não ordenadas, que é mais comum na prática estatística. Se a amostragem é sem reposição, os elementos da amostra são distintos e podemos pensar na amostra como um subconjunto de n elementos. Assim, como já visto, o **número total de amostras não ordenadas sem reposição** é dado por

$$C_N^n = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

E se a amostragem fosse com reposição? Embora não seja usual fazermos amostragem com reposição (um mesmo elemento não traz informação nova para a amostra), o seu estudo se justifica pelo fato de que propriedades estatísticas são mais facilmente estabelecidas e podem servir como aproximações para casos de amostragem sem reposição.

Suponhamos, então, que vamos extrair n elementos com reposição de uma população de N elementos sem levar em conta a ordem das extrações. Seja x_i o número de ocorrências do elemento i na amostra para $i = 1, 2, \cdots, N$. Então temos que ter

$$x_1 +_2 + \cdots + x_N = n \quad x_i \geq 0,$$

ou seja, o número de amostras não ordenadas com reposição é o número de soluções da equação acima. Como visto na seção anterior, concluímos que o número de amostras não ordenadas com reposição é

$$CR_N^n = C_{N+n-1}^n = \binom{N+n-1}{n}.$$

9.5 Exercícios propostos

1. Num concurso para preenchimento de uma vaga, apresentam-se 3 candidatos. A comissão julgadora é formada por 5 membros, cada um dos quais deve escolher exatamente um candidato. De quantas maneiras os votos desses examinadores podem ser dados?

2. As letras em código MORSE são formadas por sequências de traços e pontos, sendo permitidas repetições. Quantas letras podem ser formadas usando

   (a) exatamente três símbolos?

   (b) no máximo oito símbolos?

3. As placas de automóveis em determinada cidade constam de 2 letras e 4 algarismos. Quantas placas podem ser formadas com as letras P, Q, R e os algarismos 0, 1, 7 e 8?

4. De quantas maneiras 10 livros distintos podem ser colocados em 5 caixas idênticas, contendo dois livros cada caixa?

5. De quantas maneiras as letras da palavra SERRILHOU podem ser permutadas, mantendo-se as vogais em sua ordem natural e não permitindo que duas letras R fiquem juntas?

6. Considerando que haja 14 tipos de objeto e 2 objetos de cada tipo, encontre o número total de seleções nas quais pelo menos um objeto é selecionado.

7. De quantas maneiras 27 livros distintos podem ser distribuídos entre as pessoas A, B e C, de modo que que A e C, juntas, fiquem com o dobro de livros de B e ninguém fique com todos os livros?

8. De quantas maneiras podemos distribuir 18 livros iguais em 3 caixas diferentes, sem qualquer restrição?

9. Em quantas soluções inteiras positivas da equação $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 18$ exatamente 2 variáveis são iguais a 1?

10. De quantas maneiras 8 meninos e 8 meninas podem formar uma roda na qual

    (a) pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

(b) todas as meninas fiquem juntas?

11. Calcule o número de rodas que podem ser formadas com 7 crianças de modo que 2 crianças específicas não fiquem juntas na roda.

12. Calcule o número de rodas que podem ser formadas com 5 meninos e 5 meninas de modo que crianças do mesmo sexo não fiquem juntas.

13. Considere n casais que devem ser colocados em uma roda.

    (a) Quantas são as rodas possíveis em que cada marido fica ao lado da sua esposa?

    (b) Quantas são as rodas possíveis em que cada marido fica ao lado da sua esposa e que pessoas do mesmo sexo não ficam juntas?

14. Considere um grupo de n crianças. Quantas rodas podemos formar em que p dessas crianças ($p < n$) ficam sempre juntas?

15. Um grupo de 5 mulheres e 6 homens deve ser colocado em uma roda em que todas as mulheres ficam juntas. De quantas maneiras podemos formar essa roda?

16. (a) Quantos números de 7 dígitos podem ser formados com os algarismos $1, 3, 6, 6, 6, 8, 8$?

    (b) Quantos deles são maiores que 6.000.000

17. Quantos números de 5 algarismos podem ser formados com os algarismos $1, 1, 1, 1, 2, 3$?

18. De quantas maneiras podemos colocar 7 pessoas em 3 quartos distintos de modo que no quarto 1 fiquem 3 pessoas, no quarto 2 fiquem 2 pessoas e no quarto 3 fiquem 3 pessoas?

19. De quantos modos 8 pessoas podem ocupar 2 salas distintas, devendo cada sala conter pelo menos 3 pessoas?

20. Dispondo de 4 tintas de cores diferentes, de quantas maneiras podemos pintar 5 objetos idênticos?

21. Quantas soluções inteiras há para a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20 \qquad \text{com } x_i \geq 3\,\forall i$$

22. Determine o valor de p que satisfaz cada uma das igualdades:

    (a) $\binom{14}{3p} = \binom{14}{p+6}$

    (b) $\binom{10}{p-3} = \binom{10}{p+3}$

    (c) $\binom{12}{p+3} = \binom{12}{p-1}$

Parte IV

Sequências e Séries

Capítulo 10

Sequências

10.1 Definições básicas

De maneira informal, uma **sequência** é uma sucessão infinita de números, chamados termos da sequência, e esses termos têm uma ordem bem definida. Tal conceito apareceu no capítulo anterior, quando estudamos os conjuntos enumeráveis; lá vimos que um conjunto enumerável pode ser representado por uma sequência de valores. Aqui vamos nos concentrar nas sequências de valores reais.

Definição 10.1 Sequência
Uma sequência de valores reais é uma função real cujo domínio é o conjunto dos naturais:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a_n \end{aligned}$$

Podemos representar a função $f(n) = a_n$ de várias maneiras:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$
$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$
$$(a_n)$$

A listagem dos primeiros termos de uma sequência pode ser enganosa, como ilustrado no Exemplo 10.1. Embora uma sequência possa ser qualquer sucessão infinita de valores reais, iremos considerar apenas aquelas em que seja possível definir claramente o termo geral a_n da sequência, conforme ilustrado no Exemplo 10.2.

Exemplo 10.1

Vamos listar os cinco primeiros termos da sequência $f(n) = \dfrac{1}{3}\left(3 - 5n + 6n^2 - n^3\right)$.

Solução:

$$\begin{aligned}
f(1) &= \frac{3 - 5\cdot 1 + 6\cdot 1^2 - 1^3}{3} = 1\\
f(2) &= \frac{3 - 5\cdot 2 + 6\cdot 2^2 - 2^3}{3} = 3\\
f(3) &= \frac{3 - 5\cdot 3 + 6\cdot 3^2 - 3^3}{3} = 5\\
f(4) &= \frac{3 - 5\cdot 4 + 6\cdot 4^2 - 4^3}{3} = 5\\
f(5) &= \frac{3 - 5\cdot 5 + 6\cdot 5^2 - 5^3}{3} = 1
\end{aligned}$$

Se tentássemos construir a regra do termo geral a partir apenas dos 3 primeiros termos, poderíamos induzir equivocadamente que a sequência seria dos números ímpares. ♦♦

Exemplo 10.2

Para cada uma das sequências a seguir, determine o termo geral e use a notação com chaves para representar a sequência.

(a) $1, 3, 5, 7, \ldots$

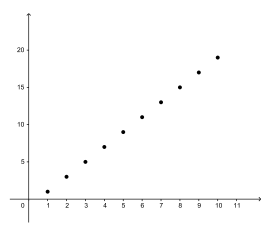
(b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

(c) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots$

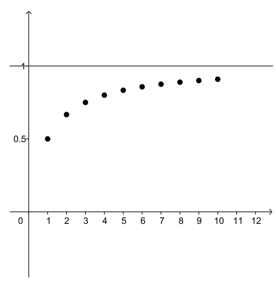
(d) $\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \ldots$

Solução:

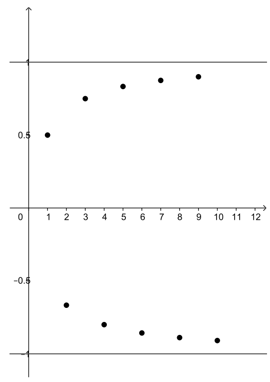
(a) $a_n = 2n - 1$ $\qquad \{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$



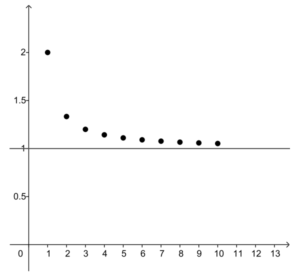
(b) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$



(c) $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$



(d) $a_n = \dfrac{2n}{2n-1}$ $\qquad \left\{\dfrac{2n}{2n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$



♦♦

Definição 10.2 Sequências limitadas
Uma sequência (a_n) é

- ***limitada*** *se existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq a_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$;*
- ***limitada superiormente*** *se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$;*
- ***limitada inferiormente*** *se existem $a \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Definição 10.3 Sequências monótonas
Uma sequência (a_n) é

- ***estritamente crescente*** *se $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$;*
- ***crescente*** *se $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$;*
- ***estritamente decrescente*** *se $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \cdots$;*
- ***crescente*** *se $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$;*

As sequências crescentes ou decrescentes são chamadas sequências ***monótonas****, enquanto as sequências estritamente crescentes ou decrescentes são chamadas sequências* ***estritamente monótonas****.*

Para estudar a monotonicidade de uma sequência, podemos estudar a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer. Temos, então, o seguinte:

- se $a_{n+1} - a_n > 0\ \forall n$, então a sequência é estritamente crescente;
- se $a_{n+1} - a_n \geq 0\ \forall n$, então a sequência é crescente;
- se $a_{n+1} - a_n < 0\ \forall n$, então a sequência é estritamente decrescente;
- se $a_{n+1} - a_n \leq 0\ \forall n$, então a sequência é decrescente.

Se todos os termos da sequência são positivos, isto é, se $a_n > 0\ \forall n$, então

- se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, $\forall n$, então a sequência é estritamente crescente;
- se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1\ \forall n$, então a sequência é crescente;
- se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1\ \forall n$, então a sequência é estritamente decrescente;
- se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1\ \forall n$, então a sequência é decrescente.

Exemplo 10.3
Vamos analisar as sequências do Exemplo 10.2.

Solução:
A primeira sequência é estritamente crescente, limitada inferiormente mas ilimitada superiormente. A segunda sequência é limitada: é fácil ver que $0 < a_n < 1$ e podemos analisar a diferença de dois termos consecutivos para ver que

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Logo, a sequência é estritamente crescente, fato visível no seu gráfico. A terceira sequência é limitada: $-1 < a_n < 1$, mas não é monótona, já que, para n ímpar, $a_n > a_{n+1}$ e para n par, $a_n < a_{n+1}$. Para a quarta sequência, podemos ver que $1 < a_n \leq 2$ e a diferença de dois termos consecutivos é

$$\frac{2(n+1)}{2(n+1)-1} - \frac{2n}{2n-1} = \frac{2n+2}{2n+1} - \frac{2n}{2n-1} = \frac{-2}{(2n-1)(2n+1)} < 0$$

ou seja, a sequência é estritamente decrescente. ♦♦

10.2 Limites de sequências

Nos gráficos das sequências apresentadas no Exemplo 10.2, podemos ver diferentes comportamentos quando $n \to +\infty$. Na letra (a), há um crescimento ilimitado, ou seja,

$a_n \to \infty$. Nas letras (b) e (d), há indícios de que a_n se aproxima de 1 e já na letra (c), os termos de ordem ímpar se aproximam de 1, enquanto os termos de ordem par se aproximam de -1.

Vamos estudar, agora, o limite de sequências, ou seja, o comportamento das sequências quando $n \to \infty$.

Definição 10.4 Limite de uma sequência
*Uma sequência (a_n) **converge** para o limite L se, dado $\epsilon > 0$ qualquer, existir um inteiro n_ϵ tal que $|a_n - L| < \epsilon$ para $n \geq n_\epsilon$ e, nesse caso, escrevemos*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

*Se a sequência não converge para um limite finito, dizemos que a sequência **diverge**.*

Note que a definição exige a proximidade de a_n e L para n suficientemente grande, ou seja, pode haver algum comportamento errático entre os termos iniciais. O que importa é que, para n suficientemente grande, $|a_n - L| < \epsilon$. Veja a Figura 10.1.

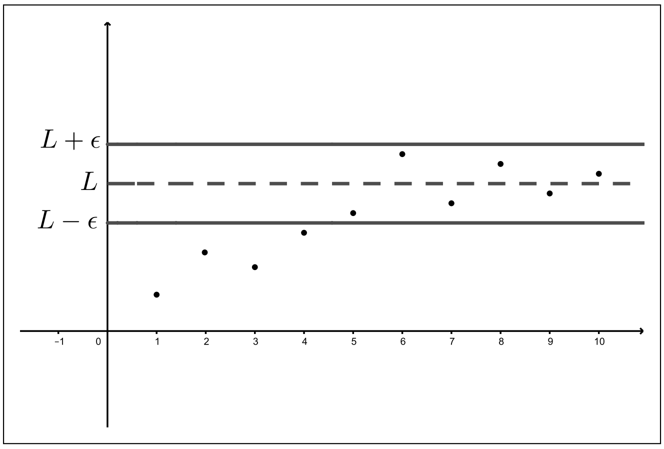


Figura 10.1 – Pontos dentro de ϵ unidades de L para n grande

Teorema 10.1 Unicidade do limite
*Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, então **não** existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$.*

Demonstração:
Seja $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \neq L$ e tome $\epsilon = \dfrac{|M-L|}{2}$. Então $\epsilon > 0$ e os intervalos $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ e $(M-\epsilon, M+\epsilon)$ são disjuntos. Veja a Figura 10.2.

Como $a_n \to L$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n > n_0$, $|a_n - L| < \epsilon$, ou seja, $\forall n > n_0$, $a_n \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$ e, portanto, $\forall n > n_0$, $a_n \notin (M-\epsilon, M+\epsilon)$, o que significa que $a_n \nrightarrow M$.

$\square$

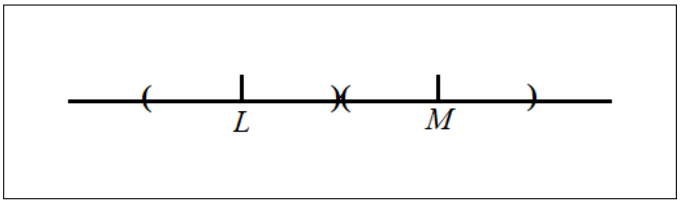


Figura 10.2 – Intervalos disjuntos $(M - \epsilon, M + \epsilon)$ e $(L - \epsilon, L + \epsilon)$

Exemplo 10.4
Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Solução:
Seja $\epsilon > 0$.

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Assim basta tomar $n_\epsilon = \dfrac{1}{\epsilon}$ e a existência de tal n_ϵ está garantida pela Propriedade Arquimediana dos reais.

♦♦

Exemplo 10.5
Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n} = 0$.

Solução:
Seja $\epsilon > 0$.

$$\left|(-1)^n \frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Assim como no exemplo anterior, basta tomar $n_\epsilon = \dfrac{1}{\epsilon}$, cuja existência está garantida pela Propriedade Arquimediana dos reais.

Na Figura 10.3 ilustra-se o processo de convergência. Para $\epsilon = 0,9$ (linhas tracejadas externas) os valores da sequência encontram-se dentro do intervalo $(-0,9, 0,9)$ a partir de $n = 2$. Reduzindo o valor de ϵ para 0,2 tal proximidade só se dá a partir $n = 6$. Quanto menor o valor de ϵ, maior será o valor de n_ϵ ou seja, temos que "caminhar" mais na sequência se queremos diminuir a distância da sequência ao limite.

♦♦

Exemplo 10.6
Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Solução:
Seja $\epsilon > 0$. Note que $\dfrac{n}{n+1} < 1 < 1 + \epsilon$ para todo n. Então, temos que ter

$$-\epsilon < \frac{n}{n+1} - 1 \Rightarrow -\epsilon < \frac{-1}{n+1} \Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon} - 1$$

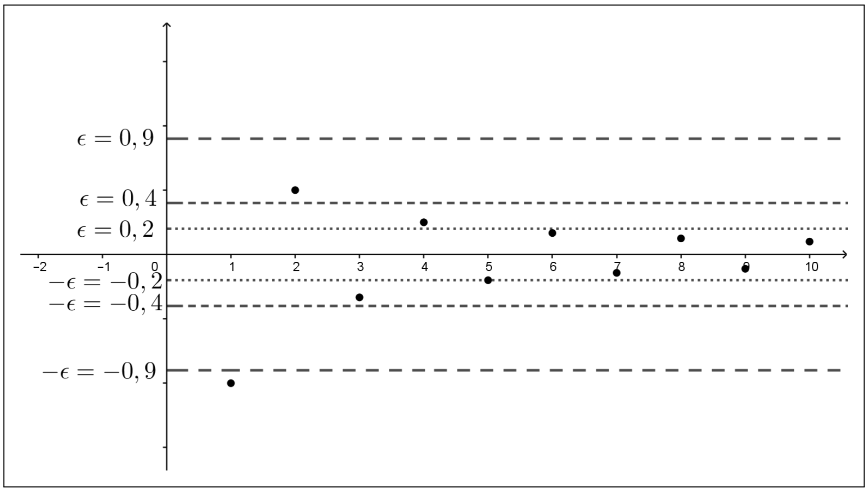


Figura 10.3 – Convergência da sequência $\left((-1)^n \dfrac{1}{n}\right)$

.

Na Figura 10.4 ilustra-se o processo de convergência. Para $\epsilon = 0,9$ (linhas tracejadas externas) os valores da sequência encontram-se dentro da do intervalo $(-0,9, 0,9)$ a partir de $n = 2$. reduzindo o valor de ϵ para 0,2 tal proximidade só se dá a partir $n = 5$. Quanto menor o valor de ϵ, maior será o valor de n_ϵ ou seja, temos que "caminhar" mais na sequência se queremos diminuir a distância da sequência ao limite.

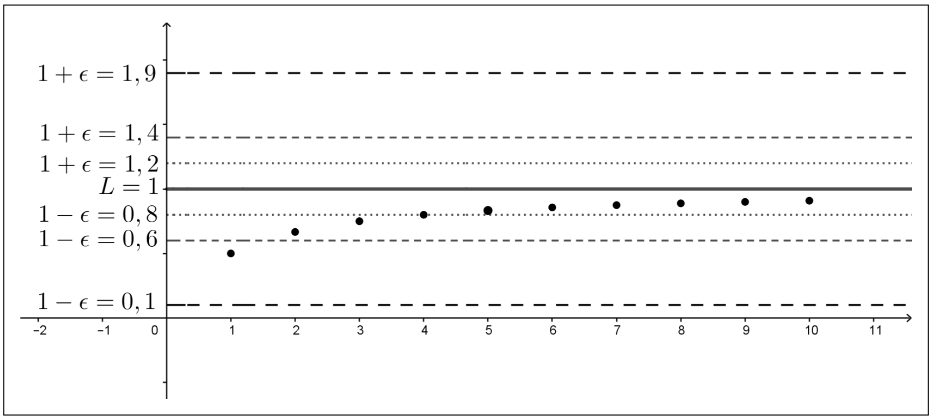


Figura 10.4 – Convergência da sequência $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

♦♦

Uma observação importante, que permite que técnicas algébricas utilizadas no cálculo de limites de funções sejam também aplicadas para sequências, é a seguinte: se o termo geral de uma sequência for $f(n)$, substituindo n por x, em que x pode variar no intervalo $[1, \infty)$, então os termos da sequência podem ser vistos como "valores amostrais" de $f(x)$. Assim, se $f(x) \to L$ quando $x \to \infty$, então $f(n) \to L$ quando $n \to \infty$, conforme demonstraremos a seguir.

Teorema 10.2

Seja uma função $f : [1, \infty] \to \mathbb{R}$ *tal que* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$. *Então, se definimos a sequência*

$a_n = f(n)$, tem-se que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Demonstração:
Como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, dado $\epsilon > 0$, existe $A \in \mathbb{R}$ tal que $x > A \to |f(x) - L| < \epsilon$.

Pela Propriedade Arquimediana, com $x = 1$ e $y = A$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > A$. Assim, se $n > n_0$, $|f(n) - L| < \epsilon$, ou seja, $n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$.

$\square$

É importante notar que a recíproca não é verdadeira, ou seja, a convergência da sequência não garante a convergência da função.

10.3 Algumas propriedades dos limites de sequências

As propriedades usuais de limite de funções continuam valendo para sequências.

Teorema 10.3
Sejam (a_n) e (b_n) tais que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$ e seja c uma constante. Então,

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} c\, a_n = c\, L_1$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L_1 + L_2$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = L_1 - L_2$;

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = L_1 \cdot L_2$;

(f) Se $b_n \neq 0\, \forall n \in \mathbb{N}$ e $L_2 \neq 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{L_1}{L_2}$.

Demonstração:

(a) Dado $\epsilon > 0$, $|c - c| = 0 < \epsilon\, \forall n$, o que prova o resultado.

(b) Seja $\epsilon > 0$. Temos que $|ca_n - cL_1| = |c||a_n - L_1|$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$, dado $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{|c|}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L_1| < \epsilon'\ \forall n > n_0$. Logo, $\forall n > n_0$

$$|ca_n - cL_1| = |c||a_n - L_1| < |c|\epsilon' = |c|\frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon$$

(c) Seja $\epsilon > 0$. Usando a desigualdade triangular, temos que

$$|(a_n + b_n) - (L_1 + L_2)| = |(a_n - L_1) + (b_n - L_2)| < |a_n - L_1| + |b_n - L_2| \qquad (10.1)$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$, dado $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{2}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L_1| < \epsilon' \ \forall n > n_1$. Analogamente, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - L_2| < \epsilon' \ \forall n > n_2$.

Fazendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, resulta que

$$|(a_n + b_n) - (L_1 + L_2)| < |a_n - L_1| + |b_n - L_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n > n_0$$

o que completa a prova.

(d) Usando os itens anteriores, temos que

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}[a_n + (-1)b_n] = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty}(-1)b_n = L_1 + (-1)L_2 = L_1 - L_2.$$

(e) Vamos provar inicialmente o seguinte resultado:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 \text{ e } \lim_{n\to\infty} a_n = L_1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n c_n = 0 \tag{10.2}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$, dado $\epsilon = 1$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L_1| < 1 \ \forall n > n_1$. Logo, $\forall n > n_1$

$$|a_n| = |a_n - L_1 + L_1| < |a_n - L_1| + |L_1| < 1 + |L_1| \Longrightarrow |a_n c_n| < (1 + |L_1|)|c_n|$$

Por outro lado, como $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, dado $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{1 + |L_1|}$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|c_n - 0| < \epsilon'$ para todo $n > n_2$.

Fazendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ resulta que $\forall n > n_0$

$$|a_n c_n| < (1 + |L_1|)|c_n| < (1 + |L_1|)\frac{\epsilon}{(1 + |L_1|)} = \epsilon$$

o que prova (10.2).

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n - L_1 L_2) = \lim_{n\to\infty}(a_n b_n - a_n L_2 + a_n L_2 - L_1 L_2) = \lim_{n\to\infty} a_n(b_n - L_2) + \lim_{n\to\infty} L_2(a_n - L_1) \tag{10.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L_2 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(b_n - L_2) = 0 \underbrace{\Longrightarrow}_{(10.2)} \lim_{n\to\infty} a_n(b_n - L_2) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L_1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - L_1) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} L_2(a_n - L_1) = 0.$$

Logo, substituindo em (10.3) obtemos

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n - L_1 L_2) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = L_1 L_2.$$

(f) Vamos provar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{L_2}$ se $b_n \neq 0$ e $L_2 \neq 0$.

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{L_2}\right| = \left|\frac{L_2 - b_n}{b_n L_2}\right| = \left|\frac{b_n - L_2}{b_n L_2}\right| \tag{10.4}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$, dado $\epsilon = \dfrac{|L_2|}{2}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_1$

$$|b_n - L_2| < \frac{|L_2|}{2}$$

$$|L_2| = |L_2 - b_n + b_n| < |L_2 - b_n| + |b_n| < \frac{|L_2|}{2} + |b_n| \Rightarrow |b_n| > \frac{|L_2|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|L_2|}$$

Substituindo em (10.4), resulta que $\forall n > n_1$

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{L_2}\right| < \frac{2}{|L_2|^2}|b_n - L_2|$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_2$

$$|b_n - L_2| < \frac{|L_2|^2}{2} \cdot \epsilon$$

Fazendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, resulta que $\forall n > n_0$

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{L_2}\right| < \frac{2}{|L_2|^2}|b_n - L_2| < \frac{2}{|L_2|^2}\frac{|L_2|^2}{2} \cdot \epsilon = \epsilon$$

e isso prova que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{L_2}$ se $b_n \neq 0$ e $L_2 \neq 0$.

Usando resultados anteriores, temos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{L_1}{L_2}$$

□

Corolário 10.1

(a) *Se (a_n) converge e (b_n) diverge, então*

(i) *$(a_n + b_n)$ diverge;*

(ii) *$(a_n - b_n)$ diverge;*

(iii) *$(a_n \cdot b_n)$ diverge se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.*

(b) *Se $c \neq 0$ e (b_n) diverge, então $(c\, b_n)$ diverge.*

Demonstração:

(a) Seja $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(i) Suponhamos, por absurdo, que $(a_n + b_n)$ convirja para M. Segue do Teorema 10.3 que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} [(a_n + b_n) - a_n] = M - L,$$

o que é absurdo, pois contraria a hipótese de (b_n) ser divergente.

(ii) Suponhamos, por absurdo, que $(a_n - b_n)$ convirja para M. Segue do Teorema 10.3 que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} [a_n - (a_n - b_n)] = L - M,$$

o que é absurdo, pois contraria a hipótese de (b_n) ser divergente.

(iii) Seja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \neq 0$. Suponhamos, por absurdo, que $(a_n \cdot b_n)$ convirja para M. Segue do Teorema 10.3 que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n \cdot b_n}{a_n} = \frac{M}{L},$$

o que é absurdo, pois contraria a hipótese de (b_n) ser divergente.

(b) Suponhamos, por absurdo, que $(c\, b_n)$ convirja para M. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |c\, b_n - M| < |c|\epsilon \underbrace{\Longrightarrow}_{c\neq 0} |c| \left| b_n - \frac{M}{c} \right| < |c|\epsilon \Rightarrow \left| b_n - \frac{M}{c} \right| < \epsilon$$

ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{M}{c}$, o que é absurdo, pois contraria a hipótese de (b_n) ser divergente.

□

Vamos ver agora alguns resultados que nos permitirão determinar se uma sequência é convergente, mesmo que não saibamos o valor exato do limite.

Teorema 10.4

Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, então toda subsequência de (a_n) também converge para L.

Demonstração:

Seja $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \cdots$ uma subsequência de (a_n).

Como $a_n \to L$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \epsilon \quad \forall n > n_0$.

Como $(n_1, n_2, n_3, \cdots)$ formam uma subsequência infinita de inteiros, existe um n_{i_0} tal que $n_{i_0} > n_0$. Logo, $\forall\, n_i > n_{i_0}$, $|a_{n_i} - L| < \epsilon$, ou seja, $\lim\limits_{i\to\infty} a_{n_i} = L$.

□

Corolário 10.2

Seja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência convergente para o limite L. Então $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ também converge para L.

□

O corolário acima diz que podemos desprezar os primeiros termos (número finito) sem que o limite da sequência se altere. O resultado do Teorema 10.4 é ainda mais forte: se desprezarmos um número infinito, mas de tal forma que ainda sobrem infinitos termos na sequência, então o limite não se altera.

Há duas aplicações interessantes dos Teoremas 10.1 e 10.4:

(i) Para mostrar que uma sequência (a_n) não converge, basta exibir duas subsequências que convirjam para limites distintos. Um exemplo clássico é a sequência alternada $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$: a subsequência $\{a_{2n}\}$ converge para 1, enquanto a subsequência $\{a_{2n-1}\}$ converge para -1.

(ii) Se sabemos que a sequência (a_n) converge, para achar seu limite, basta determinar o limite de uma das suas subsequências.

Como os termos pares e ímpares de uma sequência juntos são a sequência completa, é válido o seguinte resultado.

Teorema 10.5
Uma sequência converge para um limite L se, e somente se, as subsequências formadas pelos termos de ordem par e de ordem ímpar convergirem para o mesmo limite L.

Demonstração:
Note que qualquer outra subsequência será formada por termos de ordem par ou ímpar.

□

O teorema seguinte estabelece que toda sequência convergente é limitada e, portanto, qualquer sequência ilimitada é divergente.

Teorema 10.6
Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração:
Seja (a_n) uma sequência com limite L. Então, para qualquer $\epsilon > 0$, por exemplo, $\epsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$, $|a_n - L| < 1$, ou equivalentemente, $L - 1 < a_n < L + 1$.

Seja $A = \{a_{n_1}, a_{n_2} \cdots, a_{n_0}, L-1, L+1\}$. Então A é um conjunto finito que, portanto, tem um valor mínimo e um valor máximo. Seja $m = \min A$ e $M = \max A$. Logo, se $n \leq n_0$, $m < a_n < M$. Se $n > n_0$, $m < L - 1 < a_n, L + 1 < M$. Ou seja, $m < a_n < M \;\forall n$, o que significa que a sequência é limitada.

□

Note que a recíproca não é verdadeira, ou seja, nem toda sequência limitada é convergente e podemos, novamente, tomar a sequência alternada $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ como exemplo.

Mas o teorema a seguir estabelece condições para que uma sequência limitada seja convergente.

Teorema 10.7
Toda sequência limitada e monótona é convergente.

Demonstração:
Seja (a_n) uma sequência monótona e limitada. Então, (a_n) ou é crescente ou é decrescente.

- Seja (a_n) crescente: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$.

  Como (a_n) é limitada, ela possui um supremo. Seja $a = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Vamos provar que $a_n \to a$. De fato: dado $\epsilon > 0$, temos que $a - \epsilon < a$. Como $a = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$, $a_n \leq a \, \forall n$ e existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < a_{n_0} < a$. Logo, para todo $n \geq n_0$, $a - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n < a$, ou seja, $n \geq n_0 \Longrightarrow a - \epsilon < a_n < a < a + \epsilon$. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq n_0$, $|a_n - a| < \epsilon$, o que prova que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

- Seja (a_n) decrescente: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$.

  Como (a_n) é limitada, ela possui um ínfimo. Seja $a = \inf\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Vamos provar que $a_n \to a$. De fato: dado $\epsilon > 0$, temos que $a < a+\epsilon$. Como $a = \inf\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$, $a_n \geq a \, \forall n$ e existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a < a_{n_0} < a + \epsilon$. Logo, para todo $n \geq n_0$, $a \leq a_n \leq a_{n_0} < a + \epsilon$, o que é equivalente a $a - \epsilon < a \leq a_n \leq a_{n_0} < a + \epsilon$. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq n_0$, $|a_n - a| < \epsilon$, o que prova que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

□

Teorema 10.8 Permanência do sinal
Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L > 0$*, então existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n > n_0$*,* $a_n > 0$*. Se* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L < 0$*, então existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n > n_0$*,* $a_n < 0$*.*

Demonstração:
Seja $\epsilon = \dfrac{L}{2}$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$, $|a_n - L| < \epsilon$, ou seja, $-\dfrac{L}{2} < a_n - L < \dfrac{L}{2}$. Assim, $\forall\, n > n_0$, $a_n > \dfrac{L}{2} > 0$.

A demonstração para o caso em que $L < 0$ é análoga.

□

Corolário 10.3
Se (a_n) *e* (b_n) *são sequências convergentes tais que* $a_n \leq b_n \, \forall\, n \in \mathbb{N}$*, então* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$*.*

Demonstração:
Suponhamos, por absurdo, que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Então, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n > 0$ e resulta, pelo Teorema 10.3, que $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) > 0$.

Logo, pelo Teorema 10.8, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall\, n > n_0$, $a_n - b_n > 0$ ou equivalentemente, $a_n > b_n$, o que é um absurdo, pois, por hipótese, $a_n \leq b_n \, \forall n$.

□

É interessante observar que, mesmo que $a_n < b_n \ \forall\, n$, ainda assim só podemos garantir que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, conforme ilustrado no seguinte exemplo.

Exemplo 10.7

Considere as sequências (a_n) e (b_n) tais que $a_n = 0$ e $b_n = \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que $a_n < b_n$, mas $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

♦♦

Teorema 10.9 Teorema do Confronto ou Teorema do Sanduiche

Sejam (a_n), (b_n) e (c_n) sequências tais que $a_n \le c_n \le b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$, então $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$.

Demonstração:

Dado $\epsilon > 0$, existem naturais n_1 e n_2 tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$$

$$n > n_2 \Rightarrow |b_n - L| < \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < b_n < L + \epsilon$$

$$n_0 = \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow \forall n > n_0, \quad L - \epsilon < a_n \le c_n \le b_n < L + \epsilon \Rightarrow |c_n - L| < \epsilon.$$

□

Corolário 10.4

Sejam (a_n) e (b_n) sequências tais que $0 \le a_n \le b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

□

Corolário 10.5

Sejam (a_n), (b_n) e (c_n) sequências tais que $a_n \le c_n \le b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, então $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$.

□

Teorema 10.10

Se $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstração:

Dependendo do sinal de a_n, ou $a_n = |a_n|$ ou $a_n = -|a_n|$. Em ambos os casos, temos

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n|.$$

Como o limite de ambos os termos externos é 0, pelo Teorema do Confronto resulta que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

□

Exemplo 10.8
Estude a convergência da sequência $\{a^n\}_{n=1}^{+\infty}$, em que a é um número real qualquer.

Solução:
Vamos considerar as diferentes possibilidades para o valor de a.

- Caso 1: $a = 0$ ou $a = 1$

  Em ambos os casos temos uma sequência constante que é, portanto, convergente.

- Caso 2: $a < 0 < 1$

  Note que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1$; logo, a sequência é decrescente. Sendo decrescente, ela é limitada superiormente pelo seu primeiro termo, que é $a^1 = a$. Como $a > 0$, resulta que $a_n = a^n > 0$. Assim, (a_n) é monótona e limitada e, portanto, convergente. Das propriedades da função exponencial, sabemos que, se $0 < a < 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

- Caso 3: $-1 < a < 0$

  Nesse caso, temos uma sequência alternada $a_n = (-1)^n \cdot (-a)^n$ e pelo item anterior, sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} (-a)^n = 0$. Do Teorema 10.10, segue que $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

- Caso 4: $a = -1$

  Como antes, temos uma sequência alternada que não converge, pois as subsequências dos termos de ordem para e de ordem ímpar convergem para limites diferentes.

- $a > 1$

  Note que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a > 1$; logo, a sequência é crescente. Sendo crescente, ela é limitada inferiormente pelo seu primeiro termo, que é $a^1 = a$. Suponhamos que a sequência seja limitada superiormente, ou seja, suponhamos que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $a^n < c\,\forall n \in \mathbb{N}$. Isso significa que $n < \log_a c\,\forall n \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo, pois sabemos que $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente. Logo, não existe tal c, ou seja, a sequência é ilimitada e, portanto, não converge.

- Caso 6: $a < -1$

  Temos uma sequência alternada e, portanto, não monótona. Para os termos de ordem par, temos $a_{2n} = a^{2n} = (a^2)^n$. Pelo Caso 5, essa subsequência é ilimitada superiormente e, portanto, (a_n) também é ilimitada e não convergente. Para os termos de ordem ímpar, temos

$$a_{2n+1} = a^{2n+1} = a \cdot \underbrace{a}_{<0} \cdot a^{2n}$$

$$a^{2n+3} - a^{2n+1} = \underbrace{a^{2n+1}}_{<0} \cdot \underbrace{(a^2 - 1)}_{>0} < 0$$

  Logo, a subsequência dos termos de ordem ímpar é decrescente e ilimitada inferiormente, e, portanto, (a_n) também é ilimitada e não convergente.

Resumindo:

- $|a| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.
- $a = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$.
- $a = -1 \Rightarrow$ sequência alternada não convergente .
- $a > 1 \Rightarrow$ sequência crescente e ilimitada superiormente, não convergente
- $a < -1 \Rightarrow$ sequência alternada, limitada inferiormente e superiormente, não convergente.

♦♦

10.4 Limites infinitos

A primeira sequência do Exemplo 10.1 cresce indefinidamente. Isso nos leva a estudar os casos de sequências com limites infinitos.

Definição 10.5 Limites infinitos de sequências
Seja (a_n) uma sequência real.

- *Dizemos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ se, para todo número real $M > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n > n_0,\ a_n > M$.*
- *Dizemos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ se, para todo número real $M > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n > n_0,\ a_n < -M$.*

O teorema a seguir estabelece resultados de operações com limites infinitos.

Teorema 10.11

1. *Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ e (b_n) é limitada inferiormente, então $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$.*
2. *Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ e (b_n) é limitada inferiormente por um número positivo, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = +\infty$.*
3. *Seja (a_n) uma sequência de termos positivos. Então, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$.*
4. *Sejam (a_n) e (b_n) sequências de termos positivos.*
   (a) *Se existe $a > 0$ tal que $a_n > a\, \forall\, n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$.*

(b) Se (a_n) é limitada e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

Demonstração:

1. Seja $M > 0$. Como (b_n) é limitada inferiormente, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $b_n \geq a \, \forall \, n \in \mathbb{N}$. Seja $M' = M - a$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall \, n > n_0$, $a_n > M' = M - a$. Assim,

$$n > n_0 \Rightarrow \begin{cases} a_n > M - a \\ b_n > a \end{cases} \implies \quad a_n + b_n > M$$

ou seja, dado $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies a_n + b_n > M$, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$.

2. Seja $M > 0$. Por hipótese, $b_n \geq a > 0 \, \forall \, n \in \mathbb{N}$. Seja $M' = \dfrac{M}{a}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall \, n > n_0$, $a_n > M'$. Assim,

$$n > n_0 \Rightarrow \begin{cases} a_n > \dfrac{M}{a} > 0 \\ b_n > a > 0 \end{cases} \implies \quad a_n \cdot b_n > M$$

ou seja, dado $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies a_n \cdot b_n > M$, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = +\infty$.

3. (i) Hip.: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ Tese: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$

De fato: Seja $M > 0$ e tome $\epsilon = \dfrac{1}{M}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall \, n > n_0$, $|a_n - 0| = a_n < \epsilon$. Logo,

$$n > n_0 \implies a_n < \epsilon \implies \frac{1}{a_n} > \frac{1}{\epsilon} = M$$

o que completa a prova.

(ii) Hip.: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$ Tese: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

De fato: Seja $\epsilon > 0$ e tome $M = \dfrac{1}{\epsilon}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = +\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall \, n > n_0$, $\dfrac{1}{a_n} > M$. Logo,

$$n > n_0 \implies \frac{1}{a_n} > \frac{1}{\epsilon} \implies a_n = |a_n - 0| < \epsilon$$

o que completa a prova.

4. (a) Seja $M > 0$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, dado $\epsilon = \dfrac{a}{M}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - 0| = b_n < \epsilon$. Assim,

$$n > n_0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < a < a_n \\ 0 < b_n < \epsilon \end{cases} \implies \quad b_n \cdot c < a_n \cdot \epsilon \implies \frac{a_n}{b_n} > \frac{c}{\epsilon} = M$$

Logo, dado $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Longrightarrow \dfrac{a_n}{b_n} > M$, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$.

(b) Por hipótese, $a < a_n < b$ e como $a_n > 0\,\forall n$, resulta que $a, b > 0$.

Seja $\epsilon > 0$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, dado $M = \dfrac{b}{\epsilon}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n > n_0$, $b_n > M$. Logo,

$$n > n_0 \Rightarrow \begin{cases} b > a_n \\ b_n > M \end{cases} \Longrightarrow \quad b \cdot b_n < a_n \cdot M \Longrightarrow b \cdot b_n < a_n \cdot \frac{b}{\epsilon} \Longrightarrow \frac{a_n}{b_n} < \epsilon.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{a_n}{b_n} = \left|\dfrac{a_n}{b_n} - 0\right| < \epsilon$, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

□

A seguir, apresentamos, sem demonstração, um teorema sobre limites de razão de funções, que toma a forma 0/0 ou ∞/∞.

Teorema 10.12 Regra de l'Hôpital

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções diferenciáveis em todo x no intervalo (a, b), exceto possivelmente em $x = c$. Se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq c$ e se $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tem uma das formas indeterminadas 0/0 ou ∞/∞, então

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ tenha um limite ou tenda a infinito quando $x \to c$.

□

Recordando o Teorema 10.2, para usarmos a regra de l'Hôpital no estudo de limite de sequências, é necessário que as funções definidoras do numerador e do denominador da sequência satisfaçam as condições do Teorema 10.12 no intervalo $[1, +\infty)$.

Exemplo 10.9

Determine o limite da sequência $\left\{\dfrac{n}{e^n}\right\}_{n=}^{+\infty}$.

Solução:

Podemos ver que o termo a_n tem a forma ∞/∞. Poroutro lado, as funções $f(x) = x$ e $g(x) = e^x$ são diferenciáveis em todo $\mathbb{R}$. Aplicando l'Hôpital, obtemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{e^n} = 0$ ♦♦

10.5 Exercícios propostos (Anton et al. (2014))

1. Ache o termo geral de cada uma das sequências a seguir, começando com $n = 1$:

(a) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots$

(b) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \cdots$

(c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \cdots$

(d) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}, \frac{9}{\sqrt[4]{\pi}}, \frac{16}{\sqrt[5]{\pi}}, \cdots$

2. Para cada uma das sequências a seguir, ache duas fórmulas para o termo geral: uma começando com $n = 1$ e outra começando com $n = 0$.

(a) $1, -r, r^2, -r^3, \cdots$

(b) $r, -r^2, r^4, -r^4, \cdots$

3. Para cada uma das sequências a seguir, escreva os cinco primeiros termos, determine se ela converge e, em caso afirmativo, ache o limite.

(a) $\left\{\frac{n}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(b) $\left\{\frac{n^2}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(c) $\{2\}_{n=1}^{\infty}$

(d) $\left\{\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$

(e) $\left\{\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$

(f) $\{1 + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$

(g) $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(h) $\left\{(-1)^n \frac{2n^3}{n^3+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(i) $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(j) $\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(k) $\left\{\frac{\pi^n}{4^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(l) $\{n^2 e^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$

(m) $\left\{\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

(n) $\left\{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

4. Para cada uma das sequências a seguir, ache o termo geral começando com $n = 1$, determine se a sequência converge e, em caso afirmativo, ache o limite.

(a) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \cdots$

(b) $0, \frac{1}{2^2}, \frac{2}{3^2}, \frac{3}{4^2}, \frac{4}{5^2}, \cdots$

(c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \cdots$

(d) $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \cdots$

(e) $\left(1 - \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right), \cdots$

(f) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \cdots$

(g) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right), \left(\sqrt{3}-\sqrt{4}\right), \left(\sqrt{4}-\sqrt{5}\right), \cdots$ (h) $\frac{1}{3^5}, -\frac{1}{3^6}, \frac{1}{3^7}, -\frac{1}{3^8}, \ldots$

5. Use a diferença entre termos consecutivos para mostrar que as sequências abaixo são estritamente crescentes ou estritamente decrescentes.

(a) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(b) $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(c) $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(d) $\left\{\frac{n}{4n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(e) $\{n-2^n\}_{n=1}^{\infty}$

(f) $\{n-n^2\}_{n=1}^{\infty}$

6. Use a razão entre termos consecutivos para mostrar que as sequências abaixo são estritamente crescentes ou estritamente decrescentes.

(a) $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(b) $\left\{\frac{2^n}{1+2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(c) $\{ne^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$

(d) $\left\{\frac{10^n}{(2n)!}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(e) $\left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(f) $\left\{\frac{5^n}{2^{(}n^2)}\right\}_{n=1}^{\infty}$

7. Use diferenciação para mostrar que as sequências abaixo são estritamente crescentes ou estritamente decrescentes.

(a) $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(b) $\left\{3-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(c) $\left\{\frac{1}{n+\ln n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(d) $\{ne^{-2n}\}_{n=1}^{\infty}$

(e) $\left\{\frac{ln(n+2)}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(f) $\{n3-4n^2\}_{n=1}^{\infty}$

8. Use qualquer método para mostrar que as sequências abaixo são estritamente crescentes ou estritamente decrescentes.

(a) $\{2n^2-7n\}_{n=1}^{\infty}$

(b) $\left\{3-\frac{n}{n^2+10}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(c) $\left\{\frac{n!}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(d) $\{n^5e^{2n}\}_{n=1}^{\infty}$

9. O objetivo deste exercício é provar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Como o caso $x = 0$ é óbvio, vamos supor $x \neq 0$.

(a) Seja $a_n = \dfrac{|x|^n}{n!}$. Mostre que $a_{n+1} = \dfrac{|x|}{n+1} a_n$.

(b) Mostre que a sequência (a_n) é estritamente decrescente a partir de certo termo.

(c) Mostre que a sequência (a_n) é convergente.

(d) Use os resultados das partes (a) e (c) para mostrar que $a_n \to 0$ quando $n \to \infty$.

(e) Obtenha o resultado desejado a partir do resultado da parte (d).

Capítulo 11

Séries

11.1 Definições básicas

Vamos estudar neste capítulo somas com número infinito de termos, que recebem o nome de séries ou séries infinitas.

Definição 11.1 Série

*Uma **série** é uma soma infinita que pode ser escrita como*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

*Os números $a_1, a_2, a_3, \cdots$ são chamados de **termos** da série.*

O problema central no estudo de séries é determinar se tal somatório infinito existe. Como não podemos somar infinitos termos, o cálculo dessa soma será feito através de um processo limite de somas finitas em que o número de termos aumenta, ou seja, tende a infinito. Considere o seguinte:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a + 2 + a_3 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

O número s_n é chamado de $n-$**ésima soma parcial da série** e a sequência $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ é a **sequência das somas parciais**. À medida que n cresce, mais e mais termos são incorporados à soma parcial, ou seja, mais e mais a soma parcial se aproxima da soma infinita. Isso nos leva à seguinte definição.

Definição 11.2 Convergência de uma série
*Seja $\{s_n\}$ a sequência das somas parciais da série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$. Se a sequência $\{s_n\}$ convergir para um limite S, dizemos que a **série converge** para S, que é a **soma** da série, o que se denota por*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

*Se a sequência das somas parciais divergir, dizemos que a **série diverge**. Uma série divergente não tem soma.*

Exemplo 11.1
Escreva o número decimal $0,4444\cdots$ como uma série e analise a convergência de tal série.

Solução:
Sabemos que

$$0,444\cdots = \frac{4}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{10^k}$$

e sabemos também que ele é a representação decimal do número racional $\frac{4}{9}$. Assim, é razoável pensarmos que a série acima converge para $\frac{4}{9}$. Vamos ver como mostrar esse fato, que é verdadeiro.

A $n-$ésima soma parcial é

$$s_n = \frac{4}{10} + \frac{4}{10^2} + \cdots + \frac{4}{10^{n-1}} + \frac{4}{10^n}$$

e, portanto,

$$\frac{1}{10} s_n = \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \cdots + \frac{4}{10^n} + \frac{4}{10^{n+1}}$$

Logo

$$\begin{aligned} s_n - \frac{1}{10} s_n &= \frac{4}{10} - \frac{4}{10^{n+1}} \Rightarrow \\ \frac{9}{10} s_n &= \frac{4}{10}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \Rightarrow \\ s_n &= \frac{4}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$, resulta que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{4}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{10^k} = \frac{4}{9} = 0,444\cdots$$

♦♦

Exemplo 11.2 Série harmônica

Vamos estudar a convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, chamada de série harmônica.

Solução:

Como os termos da série são positivos, a sequência das somas parciais é uma sequência estritamente crescente.

$$s_1 = 1 \qquad s_2 = 1 + \frac{1}{2} \qquad s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \qquad s_4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \qquad \cdots$$

Vamos mostrar que a sequência das somas parciais não é limitada e, portanto, não pode ser convergente, pelo Teorema 10.6. De fato: vamos considerar a subsequência $\{s_{2^n}\}$

$$s_{2^1} = s_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$$

$$s_{2^2} = s_4 = s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > s_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = s_2 + \frac{1}{2} > \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$s_{2^3} = s_8 = s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > +s_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = s_4 + \frac{1}{2} > \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}$$

$$s_{2^4} = s_{16} = s_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > s_8 + \frac{8}{16} = s_8 + \frac{1}{2} > \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\vdots$$

$$s_{2^n} > \frac{n+1}{2}$$

Então, se M é um número real qualquer, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow s_{2^n} > M$. Basta tomar $n_0 = 2M - 1$. Como a sequência das somas parciais possui uma subsequência ilimitada, ela é também ilimitada e, portanto, não converge, o que prova que a série harmônica é divergente. ♦♦

Exemplo 11.3

Analise a convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{(k+3)(k+4)}$ e determine sua soma, caso existir.

Solução:

Nesse tipo de série é conveniente usar o métodos das frações parciais para escrever a soma parcial em forma fechada.

$$\frac{3}{(k+3)(k+4)} = \frac{A}{k+3} + \frac{B}{k+4} \Leftrightarrow \frac{3}{(k+3)(k+4)} = \frac{Ak + 4A + Bk + 3B}{(k+3)(k+4)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{(k+3)(k+4)} = \frac{(A+B)k + (4A+3B)}{(k+3)(k+4)} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 4A + 3B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -3 \end{cases}$$

Dessa forma o termo geral da série é $a_k = \frac{3}{k+3} - \frac{3}{k+4}$ e a $n-$ésima soma parcial é

$$s_n = \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{6}\right) + \left(\frac{3}{6} - \frac{3}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{3}{n+2} - \frac{3}{n+3}\right) + \left(\frac{3}{n+3} - \frac{3}{n+4}\right)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{n+4} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{3}{4}$$

Logo, a série converge e sua soma é 3/4.

♦♦

11.2 A série geométrica

A série geométrica de razão r e termo inicial $a \neq 0$ tem a seguinte forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \tag{11.1}$$

Note que o valor inicial do índice k aqui foi definido como 0. Cada termo da série é obtido multiplicando-se o termo anterior pela constante r, ou seja, a razão entre dois termos consecutivos é constante, igual a r.

Para estudar a convergência da série geométrica, considere sua $n-$ésima soma parcial

$$s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n.$$

Vamos analisar o comportamento da sequência das somas parciais analisando os possíveis valores de r.

- $r = 1$

  $$s_n = a + a + \cdots + a = (n+1)a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$$

  dependendo do sinal de a. A série geométrica tem limite infinito, ou seja, não converge.

- $r = -1$

  Nesse caso, a sequência das somas parciais é $a, 0, a, 0, a, 0, \cdots$, que diverge por ter duas subsequências com limites diferentes, implicando na divergência da respectiva série geométrica.

- $|r| \neq 1$

  Temos que

  $$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^n + ar^{n+1}$$

  e, portanto,

  $$s_n - rs_n = a - ar^{n+1} \underbrace{\Rightarrow}_{r\neq 1} s_n = \frac{a - ar^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{ar^{n+1}}{1-r}$$

  Do Exemplo 10.8 concluímos que r^{n+1} converge, e converge para 0, apenas se $|r| < 1$ e, nesse caso,

  $$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r} \qquad \text{se } |r| < 1 \tag{11.2}$$

Provamos, assim, o seguinte teorema.

Teorema 11.1 Série geométrica
Uma série geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + /cdots \qquad a \neq 0$$

converge se $|r| < 1$ *e nesse caso,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}.$$

A série diverge se $|r| \geq 1$*.*

□

Exemplo 11.4
Analise a convergência da seguinte série e determine seu limite, se existir.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3^k}$$

Solução:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

e essa é uma série geométrica com termo geral $a = 2$ e razão $r = \dfrac{1}{3}$. Como $|r| < 1$, temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = 3$$

♦♦

Exemplo 11.5
Obtenha o número racional representado pela dízima periódica $0,5434343\ldots$.

Solução:

$$\begin{aligned}
0,5434343\ldots &= 0,5 + 0,043 + 0,00043 + 0,0000043 + 0,000000043 + \cdots \\
&= 0,5 + \frac{43}{1000} + \frac{43}{100.000} + \frac{43}{10.000.000} + \frac{43}{1.000.000.000} + \cdots \\
&= 0,5 + \frac{43}{1000}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10.000} + \frac{1}{1.000.000} + \cdots\right) \\
&= 0,5 + \frac{43}{1000}\left[1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \cdots\right] \\
&= \frac{5}{10} + \frac{43}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}} \\
&= \frac{5}{10} + \frac{43}{1000}\cdot\frac{100}{99} \\
&= \frac{5}{10} + \frac{43}{990} \\
&= \frac{495+43}{990} \\
&= \frac{538}{990} \\
&= \frac{543-5}{990}
\end{aligned}$$

Lembre-se do estudo das dízimas periódicas no Capítulo 5. ♦♦

11.3 A série p

Seja $p > 0$ um número real qualquer. A série p é definida por

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots \tag{11.3}$$

Vamos analisar a convergência da série p considerando os possíveis valores de p.

- $p = 1$

  Nesse caso, a série p é a série harmônica, que é divergente, conforme demonstrado no Exemplo 11.2.

- $0 < p < 1$

  Coo $k \in \mathbb{N}$, isto é, $k \geq 1$ e $0 < p < 1$, resulta que $k^p \leq k \Rightarrow \frac{1}{k^p} \geq \frac{1}{k}$.

  Seja $t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ a $n-$ésima soma parcial da série harmônica e seja $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$ a $n-$ésima soma parcial da série p. Temos, então, que $t_n \leq s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim n \to \infty t_n = \infty$. Pelo Corolário 10.5 do Teorema do Sanduíche, concluímos que $\lim n \to \infty s_n = \infty$ e, portanto, a série p diverge se $0 < p < 1$.

- $p > 1$

  Como os termos da série p são positivos, a sequência das somas parciais (s_n) é crescente. Vamos mostrar que (s_n) é limitada superiormente.

  Seja $M = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$. Como $p > 1$, segue que $0 < \dfrac{1}{2^{p-1}} < 1$; logo, M é a soma de uma série geométrica de razão $r = \dfrac{1}{2^{p-1}}$ e $|r| < 1$. Assim, M é um número finito, isto é, $M \in \mathbb{R}$.

  Seja $n \in \mathbb{N}$ qualquer. Então, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n < 2^m - 1$. Como (s_n) é crescente, resulta que $s_n < s_{2^m-1}$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} < \sum_{k=1}^{2^m-1} \frac{1}{k^p} \\
&= 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right)}_{2^1 \text{ termos}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right)}_{2^2 \text{ termos}} + \cdots + \underbrace{\left[\frac{1}{(2^{m-1})^p} + \frac{1}{(2^{m-1}+1)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^{m-1}+2^{m-1}-1)^p}\right]}_{2^{m-1} \text{ termos}} \\
&< 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right)}_{2^1 \text{ termos}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right)}_{2^2 \text{ termos}} + \cdots + \underbrace{\left[\frac{1}{(2^{m-1})^p} + \frac{1}{(2^{m-1})^p} + \cdots + \frac{1}{(2^{m-1})^p}\right]}_{2^{m-1} \text{ termos}} \\
&= 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{2^2}{(2^2)^p} + \cdots + \frac{2^{m-1}}{(2^{m-1})^p} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^2)^{p-1}} + \cdots + \frac{1}{(2^{m-1})^{p-1}} \\
&= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{p-1})^{m-1}} = \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k < M
\end{aligned}
$$

Provamos, assim, que a sequência das somas parciais (s_n) é crescente e limitada superiormente. Pelo Teorema 10.7, concluímos que (s_n) é convergente, assim como a série p de $p > 1$. Provamos, assim, o seguinte teorema

Teorema 11.2 Convergência da série p
A série p, $p > 0$, definida por

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$

converge se $p > 1$ e diverge se $0 < p \leq 1$.

□

11.4 Algumas propriedades das séries

Muitas das propriedades das séries convergentes seguem de resultados análogos das sequências convergentes.

Teorema 11.3
Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *é uma série convergente, então* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Demonstração:
Vamos definir as seguintes sequências:

- $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$: sequência das somas parciais dos n primeiros termos da série; por hipótese (s_n) converge.
$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$
- $\{t_n\}_{n=2}^{\infty}$: sequência das somas parciais dos $n-1$ primeiros termos da série

Temos que

$$\begin{aligned}
t_2 &= a_1 = s_1 \\
t_3 &= a_1 + a_2 = s_2 \\
&\vdots \\
t_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = s_{n-1}
\end{aligned}$$

Logo, a partir de um certo n, (t_n) é subsequência de (s_n). Como (s_n) é convergente, resulta que (t_n) é convergente e ambas têm o mesmo limite. Logo, pelo Teorema 10.3, resulta que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(s_n - t_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

□

Note que a recíproca do teorema é falsa, ou seja, o fato de $a_k \to 0$ não garante que a série convirja. A série harmônica vista no Exemplo 11.2 é um exemplo clássico.

Teorema 11.4 Propriedades algébricas das séries

(a) Sejam $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *séries convergentes. Então*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

(b) Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge e* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *diverge, então* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ *diverge.*

(c) *Se c é uma constante não nula, então ambas as séries* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty}(c\,a_k)$ *ou divergem ou convergem. No caso de convergência,*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(c\,a_k) = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Demonstração:
A demonstração segue da aplicação do Teorema 10.3 e do Corolário 10.1 às sequências das somas parciais das séries envolvidas e deve ser feita como exercício.

□

É importante notar que a soma de duas séries divergentes não resulta, necessariamente, em uma série divergente. Considere, por exemplo, as séries $\sum_{k=1}^{\infty} n$ e $\sum_{k=1}^{\infty}(-n)$ ou então, as séries $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ e $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}$. Em ambos exemplos temos duas séries divergentes, cuja soma é convergente, pois as somas parciais são todas iguais a zero.

Teorema 11.5
Sejam $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *duas séries tais que* $b_k = a_k$ *para todo* $k \geq m$, $m \in \mathbb{N}$. *Então, ou ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem, ou seja,* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge se, e somente se,* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge.*

Demonstração:
Seja s_n a $n-$ésima soma parcial de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e seja t_n a $n-$ésima soma parcial de $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Para $n > m$, temos que

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \\ t_n &= b_1 + \cdots + b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n = b_1 + \cdots + b_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Logo,

$$n > m \Longrightarrow s_n - t_n = (a_1 + \cdots + a_m) - (b_1 + \cdots + b_m) = c \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(s_n - t_n) = c$$

Suponhamos que (s_n) convirja para $L_1 \in \mathbb{R}$, isto é, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = L_1$. Então,

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty}[s_n - (s_n - t_n)] \underbrace{=}_{\text{Teo.10.3}} L_1 - c \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k = L_1 - c$$

Provamos, então, que se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, então $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge e, pela contrapositiva, se $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, então $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

Suponhamos, agora, que (s_n) seja divergente. Como $\lim_{n\to\infty}(t_n - s_n) = -c$, temos que

$$t_n = s_n + (t_n - s_n) \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{Cor.10.1}} t_n \text{ diverge.}$$

Provamos, então, que se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge, então $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge e, pela contrapositiva, se $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, então $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, o que completa a prova.

□

Teorema 11.6 Remoção dos primeiros termos

Seja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *uma série qualquer e seja* $m \in \mathbb{N}$*. Então,* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge se, e somente se,* $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ *converge.*

Demonstração:

Para $n > m$ temos que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

Como o primeiro somatório do lado direito do sinal de $=$ não depende de n, resulta que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ existe se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=m+1}^{n} a_k$ existe, ou seja, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge se, e somente se, $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ converge.

Note que, no caso de convergência, a soma da série fica alterada pela remoção dos m primeiros termos, isto é,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = L_1 \Longrightarrow \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k = L_1 - \sum_{k=1}^{m} a_k$$

□

Exemplo 11.6

Estude a convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty} ar^k$ em que $|r| < 1$. Caso ela seja convergente, calcule seu limite.

Solução:
Note que a série dada corresponde à série geométrica vista na Seção 11.2 com o primeiro termo removido. Como $|r| < 1$, sabemos que a série geométrica converge e, portanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^k = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k - ar^0 = \frac{a}{1-r} - a = \frac{ar}{1-r}$$

♦♦

Teorema 11.7
Seja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *uma série de termos não negativos. Se a sequência das somas parciais for limitada superiormente, então a série converge.*

Demonstração:
Como os termos da série são não negativos, a sequência das somas parciais é não decrescente, ou seja, monótona. Como ela é limitada inferiormente por s_1 e limitada superiormente por hipótese, resulta que (s_n) é monótona e limitada e pelo Teorema 10.7, concluímos que (s_n) é convergente e, assim, a série converge.

□

11.5 Testes de convergência

Nesta seção estudaremos alguns testes de convergência de séries com termos não negativos. Alguns deles analisam o comportamento de duas séries e o conhecimento sobre a convergência ou divergência de uma delas pode determinar o comportamento da outra. Outros analisam o comportamento dos termos da série.

Teorema 11.8
Sejam $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *séries de termos não negativos e suponha que* $a_k \leq b_k$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(a) *Se a série "maior"* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge, então a série "menor"* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *também converge.*

(b) *Se a série "menor"* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverge, então a séria "maior"* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *também diverge.*

Demonstração:

(a) Sejam as somas parciais

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$t_n = b_a + b_2 + \cdots + b_n$$

Tanto (s_n) quanto (t_n) são não decrescentes, já que seus termos são não negativos. Como $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, a sequência (t_n) converge e, portanto é limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $0 \leq s_n \leq t_n \leq M$. Logo, (s_n) é monótona e limitada e, pelo Teorema 10.7, (s_n) converge, o que significa que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

(b) Suponhamos, por absurdo, que $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ seja convergente; então, pelo item anterior, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é convergente, o que contraria a hipótese.

□

Exemplo 11.7

Analise a convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^3 + k^2}$.

Solução:

Note que $0 < \frac{1}{2k^3 + k^2} < \frac{1}{2k^3}$. A série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ é uma série p, com $p > 1$; logo, ela é convergente, assim como a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^3}$, pelo Teorema 11.4. Pelo Teste da Comparação, concluímos que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^3 + k^2}$ converge. ♦♦

Teorema 11.9 Teste da Comparação de Limites

Sejam $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *séries de termos positivos e suponha que*

$$L = \lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k}$$

(a) Se $L > 0$ e L é finito, então ou ambas as séries convergem ou ambas divergem.

(b) Se $L = 0$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, então $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ também converge.

(c) Se $L = \infty$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, então $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ também diverge.

Demonstração:

(a) Dado $\epsilon = \frac{L}{2}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > k_0$

$$\left| \frac{a_k}{b_k} - L \right| < \frac{L}{2} \Longrightarrow \frac{L}{2} < \frac{a_k}{b_k} < \frac{3L}{2} \Longrightarrow \frac{L}{2} b_k < a_k < \frac{3L}{2} b_k$$

Assim, para k grande, a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3L}{2} b_k$ domina a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Se $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3L}{2} b_k$ também converge (Teorema 11.4, com $3L/2 > 0$) e, pelo Teste da Comparação, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ também converge.

Temos também que, para k grande, a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ domina a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L}{2} b_k$. Se $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L}{2} b_k$ também diverge (Teorema 11.4, com $L/2 > 0$) e, pelo Teste da Comparação, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ também diverge.

(b) Dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > k_0$

$$\left|\frac{a_k}{b_k}\right| < \epsilon \Longrightarrow 0 < \frac{a_k}{b_k} < \epsilon \Longrightarrow 0 < a_k < \epsilon b_k$$

Assim, para k grande, a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon b_k$ domina a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Se $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon b_k$ também converge (Teorema 11.4, com $\epsilon > 0$) e, pelo Teste da Comparação, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ também converge.

(c) Como $L = \infty$, para todo $M > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > k_0$

$$\frac{a_k}{b_k} > M \Longrightarrow a_k > M b_k$$

Então, para k grande, a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ domina a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} M b_k$. Se $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} M b_k$ também diverge (Teorema 11.4, com $M > 0$) e, pelo Teste da Comparação, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ também diverge.

$\square$

Exemplo 11.8

Use o Teste da Comparação de Limites para determinar se a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^6 - 2k^4 + 3k^2}{2k^9 + 5k^5 - 3k^4}$ converge.

Solução:

Quando os termos de uma série envolvem polinômios, a convergência (ou divergência) é determinada pelo termo dominante; assim, podemos descartar os demais termos, sem que isso altere a convergência ou divergência da série.

No exemplo, a série dada deve ter o mesmo comportamento da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^6}{2k^9} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{2k^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{2} \frac{1}{k^3}$$

. Essa série converge, pois temos uma série p com $p > 1$ multiplicada por uma constante.

Vamos, então, aplicar o Teste da Comparação de Limites com a série dada e a série acima.

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{5k^6 - 2k^4 + 3k^2}{2k^9 + 5k^5 - 3k^4}}{\dfrac{5}{2k^3}} = \lim_{k\to\infty} \frac{10K^9 - k^7 + 6k^5}{10k^9 + 25k^5 - 15k^4} = 1$$

Como L é finito e não nulo e a série auxiliar converge, resulta que a série dada também converge. ♦♦

Teorema 11.10 Teste da Razão

Seja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *uma série de termos positivos e suponha que*

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

(a) Se $L < 1$, a série converge.

(b) Se $L > 1$ ou $L = \infty$, a série diverge.

(c) Se $L = 1$, a série pode convergir ou divergir.

Demonstração:

(a) Seja r um número tal que $L < r < 1$. Tome $\epsilon = r - L$; então, $\epsilon > 0$ e existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > K$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k} - L\right| < \epsilon \Longrightarrow 0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < L + \epsilon = r \Longrightarrow 0 < a_{k+1} < ra_k$$

Temos, então, que

$$\begin{aligned} a_{K+1} &> ra_K \\ a_{K+2} &> ra_{K+1} < r^2 a_K \\ a_{K+3} &> ra_{K+2} < r^3 a_K \\ &\vdots \end{aligned}$$

Então, para k grande a série geométrica de razão r domina a série dada. Como $|r| < 1$, a série geométrica é convergente e pelo teste da Comparação resulta que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ também converge.

(b) Seja r um número tal que $1 < r < L$. Tome $\epsilon = L - r$; então, $\epsilon > 0$ e existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > K$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k} - L\right| < \epsilon \Longrightarrow L-\epsilon < \frac{a_{k+1}}{a_k} < L+\epsilon \Longrightarrow r < \frac{a_{k+1}}{a_k} < L+\epsilon \Longrightarrow 1 < r < \frac{a_{k+1}}{a_k} \Longrightarrow a_k < a_{k+1}$$

Logo,

$$0 < a_K < a_{K+1} < a_{K+2} < \cdots \Longrightarrow 0 < a_K < a_k \text{ para todo } k > K$$

ou seja, para k suficientemente grande, todos os termos da série são maiores que $a_K > 0$ e, portanto, o limite do termo geral não é zero, o que significa que a série diverge.

Demonstração análoga vale para o caso em que $L = \infty$.

(c) Considere a série p com $p = 2$ e a série harmônica; a primeira converge e a segunda diverge. No entanto, para a série p

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(k+1)^2}}{\dfrac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^2+2k+1} = 1$$

e para a série harmônica

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{1}{+1}}{\dfrac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1$$

Assim, temos exemplo de uma série convergente e de uma série divergente para as quais $L = 1$.

□

Exemplo 11.9

Aplique o Teste da razão para analisar a convergência ou divergência da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$.

Solução:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\dfrac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}}{\dfrac{k^k}{k!}} = \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} \cdot \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} \cdot \frac{1}{k+1} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

e

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e > 1.$$

Logo, a série diverge. ♦♦

Teorema 11.11 Teste da Raiz

Seja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *uma série de termos positivos e suponha que*

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} (a_k)^{1/k}.$$

(a) Se $L < 1$, a série converge.

(b) Se $L > 1$ ou $L = \infty$, a série diverge.

(c) Se $L = 1$, a série pode convergir ou divergir.

Demonstração:

(a) A demonstração é análoga à demonstração do Teste da razão; eis o esboço. Tome r tal que $L < r < 1$ e $\epsilon = r - L > 0$. Então existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > K$

$$|\sqrt[k]{a_k} - L| < \epsilon \Longrightarrow 0 < \sqrt[k]{a_k} < r \Longrightarrow 0 < a_k < r^k$$

Logo, a série geométrica, que é convergente pois $|r| < 1$, domina série original e pelo teste da Comparação resulta que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ também converge.

(b) Seja r um número tal que $1 < r < L$. Tome $\epsilon = L - r$; então, $\epsilon > 0$ e existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > K$

$$|\sqrt[k]{a_k} - L| < \epsilon \Longrightarrow L - \epsilon < \sqrt[k]{a_k} < L + \epsilon \Longrightarrow 1 < r < \sqrt[k]{a_k} \Longrightarrow 1 < r^k < a_k$$

Assim, para k suficientemente grande, todos os termos da série são maiores que 1 e, portanto, o limite do termo geral não é zero, o que significa que a série diverge.

(c) Os mesmos exemplos dados na demonstração do Teste da Razão ilustram o resultado aqui.

□

Exemplo 11.10

Use o Teste da Raiz para analisar a convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(k+1)]^k}$.

Solução:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln(k+1)} = 0 < 1.$$

Logo, a série converge. ♦♦

11.6 Exercícios propostos(Anton et al. (2014))

1. Em cada item, ache o valor exato das quatro primeiras somas parciais, ache a forma fechada para a $n-$ésima soma parcial e determine se a série converge. Em caso afirmativo, estabeleça a sua soma.

   (a) $2+\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5^2}+\cdots+\dfrac{2}{5^{k-1}}+\cdots$

   (b) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{2^2}{4}+\cdots+\dfrac{2^{k-1}}{4}+\cdots$

   (c) $\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}+\cdots$

   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k$

   (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}4^{k-1}$

   (f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right)$

2. Determine se as seguintes séries convergem e, em caso afirmativo, encontre sua soma.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+2}$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{7}{6^{k-1}}$

   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{2}\right)^{k+1}$

   (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)(k+3)}$

   (f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{9k^2+3k-2}$

   (g) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}$

   (h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k-2}$

   (i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{k-1}$

   (j) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{4^{k-2}}{7^{k-1}}$

   (k) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)$

   (l) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}5^{3k}7^{1-k}$

3. Expresse cada uma das dízimas a seguir como uma fração.

   (a) $0,4444\cdots$

   (b) $5,373737\cdots$

   (c) $0,782178217821\cdots$

   (d) $0,9999\cdots$

   (e) $0,159159159\cdots$

   (f) $0,4514141414\cdots$

4. Use a série geométrica para provar que

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k=\frac{1}{1+x}$ se $-1<x<1$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k=\frac{1}{4-x}$ se $2<x<4$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2}$ se $-1 < x < 1$

5. Em cada item, ache os valores de x para os quais a série converge, e ache a soma da série para esses valores de x.

   (a) $x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - \cdots$

   (b) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{4}{x^4} + \dfrac{8}{x^5} + \dfrac{16}{x^6} + \cdots$

   (c) $e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x} + e^{-5x} + \cdots$

6. Mostre que cada um dos resultados a seguir é válido.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{3}{2}$

   (c) $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{4\cdot 6} \cdots = \dfrac{3}{4}$

   (d) $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \cdots = \dfrac{1}{2}$

7. Use o Teorema 11.4 para achar a soma de cada uma das séries a seguir.

   (a) $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\right) + \left(\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{4^2}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{2^k} + \dfrac{1}{4^k}\right) + \cdots$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^k} - \frac{1}{k(k+1)}\right)$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2-1} - \frac{7}{10^{k-1}}\right)$

   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(7^{-k}3^{k+1} - \frac{2^{k+1}}{5^k}\right)$

8. A seguir, são dadas várias séries p. Identifique o valor de p e determine se a série converge ou não.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}$ (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{-4/3}$ (g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^5}}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2/3}$ (f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{k}}$ (h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\pi}}$

9. Aplique o teste da divergência (Teorema 11.3) para analisar a convergência das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+k+3}{2k^2+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\pi}}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \cos k\pi$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln k$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+3}$

10. Use o teste da comparação para determinar se cada uma das séries a seguir converge ou diverge.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5k^2-k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k-\frac{1}{4}}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2-k}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^4+k}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k+5}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5\text{sen}^2 k}{k!}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^{3/2}-\frac{1}{2}}$

11. Use o teste da comparação dos limites para determinar se cada uma das séries converge.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2-2k+6}{8k^7+k-8}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k+6}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3^k+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)(k+5)}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8k^2-3k}}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+3)^{17}}$

12. Use o teste da razão para analisar a convergência de cada uma das séries a seguir.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5k}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^3}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$

13. Use o teste da raiz para analisar a convergência de cada uma das séries a seguir.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k+2}{2k-1} \right)^k$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{100} \right)^k$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5^k}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-k})^k$

14. Use qualquer método para analisar a convergência de cada uma das séries a seguir.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7^k}{k!}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{5^k}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!10^k}{3^k}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{50}}{e^{-k}}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3+1}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^3+1}$

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2+3^k k}$

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$

(j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{5^k}$

(k) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\sqrt{k}}{(k+1)^3-1}$

(l) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4+|\cos k|}{k^3}$

(m) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{k}}$

(n) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

(o) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{e^k}$

(p) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{e^{k^2}}$

(q) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+4)!}{4!k!4^k}$

(r) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{k^2}$

Apêndice A

Alfabeto grego

Tabela A.1 – Alfabeto grego

Minúscula	Maiúscula	Como se escreve
α	A	Alfa
β	B	Beta
γ	Γ	Gama
δ	Δ	Delta
ϵ ou ε	E	Épsilon
ζ	Z	Zeta
η	H	Êta
θ ou ϑ	Θ	Teta
ι	I	Iota
κ	K	Kapa
λ	Λ	Lambda
μ	M	Mu (lê-se como 'mi')
ν	N	Nu (lê-se como 'ni')
ξ	Ξ	Ksi (lê-se como 'Quiçi')
o	O	Omicron
π ou ϖ	Π	Pi
ρ ou ϱ	P	Rô
σ ou ς	Σ	Sigma
τ	T	Tau
υ	Υ	Upsilon
ϕ ou φ	Φ	Fi
χ	X	Qui
ψ	Ψ	Psi
ω	Ω	Ômega

Referências

Anton, H., Bivens, I. e Davis, S. (2014) *Cálculo*, vol. 2. Bookman.

Gonçalves, M. B. e Gonçalves, D. (2012) Elementos da análise. http://mtm.ufsc.br/~daemi/Cursos%20Ministrados/Int_Analise/Livro/Elementos%20da%20An%E1lise%20-%20Versao%20Preliminar.pdf. Acessado em 20/04/2019.

Hefez, A. (2012) Indução matemática. OBMEP.

Lander, L. J. e Parkin, T. R. (1966) Counterexample to Euler's conjecture on sums of like powers. *Bull. Amer. Math. Soc.*

Lipschutz, S. (1999) *Set Theory and Related Topics*. McGraw-Hill.

Monteiro, M. S. (2016) Conjuntos infinitos. www.ime.usp.br/~martha/mat0315-2016/enumeraveis.pdf. Acessado em 20/04/2019.

de Morais Filho, D. C. (2004) *Um Convite à Matemática: com técnicas de demonstração e notas históricas*. SBM, 3a. ed.

Ripoll, J. B., Ripoll, C. C. e da Silveira, J. F. P. (2011) *Números Racionais, Reais e Complexos*. UFRGS, 2a. ed.

Santos, J. P. O. e Estrada, E. L. (2011) *Problemas Resolvidos de Combinatória*. Ciência Moderna, 2a. ed.

Santos, J. P. O., Mello, M. P. e Murari, I. T. C. (2007) *Introdução à Análise Combinatória*. Ciência Moderna.