1. Seja $X_1, X_2, \cdots, X_6$ uma amostra aleatória simples de tamanho 6 de uma população $N(\mu; \sigma^2)$. Determine o valor da constante C tal que

$$\widetilde{\sigma}^2 = C\left[(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2 + (X_5 - X_6)^2\right]$$

seja um estimador não viesado de σ^2.

Solução:

Temos que provar que

$$\mathrm{E}(\widetilde{\sigma}^2) = \mathrm{E}\left(C\left[(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2 + (X_5 - X_6)^2\right]\right) = \sigma^2$$

Como as X_i's são iid, segue que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_i - X_{i+1})^2 &= \mathrm{E}(X_i^2) + \mathrm{E}(X_{i+1}^2) - 2\,\mathrm{E}(X_i X_{i+1}) \\
&= \mathrm{Var}(X_i) + [\mathrm{E}(X_i)]^2 + \mathrm{Var}(X_{i+1}) + [\mathrm{E}(X_{i+1})]^2 - 2\,\mathrm{E}(X_i)\,\mathrm{E}(X_{i+1}) \\
&= \sigma^2 + \mu^2 + \sigma^2 + \mu^2 - 2\mu \cdot \mu = 2\sigma^2
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathrm{E}(\widetilde{\sigma}^2) = \sigma^2 \Leftrightarrow C\left[3 \cdot 2\sigma^2\right] = \sigma^2 \Leftrightarrow C = \frac{1}{6}$$

2. Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória simples de uma população $X \sim Poi(\lambda)$. Determine o valor da constante C tal que

$$\widetilde{\lambda} = C\left[X_1(X_1 - X_2) + X_2(X_2 - X_3) + \cdots + X_{n-1}(X_{n-1} - X_n)\right]$$

seja um estimador não viesado de λ.

Solução:

Temos que provar que

$$\mathrm{E}(\widetilde{\lambda}) = \mathrm{E}(C\left[X_1(X_1 - X_2) + X_2(X_2 - X_3) + \cdots + X_{n-1}(X_{n-1} - X_n)\right]) = \lambda$$

Como as X_i's são iid, segue que

$$\mathrm{E}\left[X_i(X_i - X_{i+1})\right] = \mathrm{E}(X_i^2) - \mathrm{E}(X_i X_{i+1}) = \mathrm{E}(X_i^2) - \mathrm{E}(X_i)\,\mathrm{E}(X_{i+1}) = \mathrm{E}(X_i^2) - [\mathrm{E}(X_i)]^2 = \mathrm{Var}(X_i) = \lambda$$

Logo,

$$\mathrm{E}(\widetilde{\lambda}) = \lambda \Leftrightarrow C(n-1)\lambda = \lambda \Leftrightarrow C = \frac{1}{n-1}$$

3. Suponha que Γ_1 e Γ_2 sejam estimadores independentes e não viesados para um parâmetro γ, com variâncias σ_1^2 e σ_2^2, respectivamente.

   (a) Mostre que $\Gamma = a\Gamma_1 + (1-a)\Gamma_2$ é também um estimador não viesado de γ.

   (b) Ache o valor de a que minimiza a variância de Γ.

Solução:

(a)

$$\mathrm{E}(\Gamma) = \mathrm{E}[a\Gamma_1 + (1-a)\Gamma_2] = a\,\mathrm{E}(\Gamma_1) + (1-a)\,\mathrm{E}(\Gamma_2) = a\gamma + (1-a)\gamma = \gamma$$

(b) Como Γ_1 e Γ_2 são independentes, resulta que

$$\mathrm{Var}(\gamma) = a^2\,\mathrm{Var}(\Gamma_1) + (1-a)^2\,\mathrm{Var}(\Gamma_2) = a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2$$

Derivando em relação a a obtemos

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Var}(\gamma)}{\mathrm{d}a} = 0 \Rightarrow 2a\sigma_1^2 - 2(1-a)\sigma_2^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Var}(\gamma)}{\mathrm{d}a^2} = 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 > 0 \Rightarrow \text{mínimo!}$$

4. Suponha que Γ_1 e Γ_2 sejam estimadores independentes e não viesados para um parâmetro γ, tais que a variância de Γ_1 é o dobro da variância de Γ_2. A partir desses estimadores constrói-se um novo estimador $\Gamma = a_1\Gamma_1 + a_2\Gamma_2$. Determine os valores das constantes a_1 e a_2 para que Γ seja não viesado para estimar γ e tenha variância mínima.

Solução:

$$\mathrm{E}(\Gamma) = \gamma \Leftrightarrow \mathrm{E}[a_1\Gamma_1 + a_2\Gamma_2] = \gamma \Leftrightarrow a_1\gamma + a_2\gamma = \gamma \Leftrightarrow a_1 + a_2 = 1$$

Como Γ_1 e Γ_2 são independentes, resulta que

$$\mathrm{Var}(\gamma) = a_1^2\,\mathrm{Var}(\Gamma_1) + a_2^2\,\mathrm{Var}(\Gamma_2) = (1-a_2)^2 \cdot 2\sigma_2^2 + a_2^2\sigma_2^2 = (2 - 4a_2 + 3a_2^2)\sigma_2^2$$

Derivando em relação a a obtemos

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Var}(\gamma)}{\mathrm{d}a} = 0 \Rightarrow (6a_2 - 4)\sigma_2^2 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Var}(\gamma)}{\mathrm{d}a^2} = 6\sigma_2^2 > 0 \Rightarrow \text{mínimo!}$$

5. O Diretório Acadêmico (DA) do seu curso deseja realizar uma pesquisa entre os alunos sobre o nível de satisfação com o horário de funcionamento da biblioteca. Você vai ajudar o DA a planejar a pesquisa e analisar os resultados.

   (a) Calcule o tamanho da amostra necessário para se estimar a verdadeira proporção de alunos satisfeitos com o horário de funcionamento da biblioteca, com margem de erro 0,08 e nível de confiança de 99%.

   (b) Querendo garantir que a amostra não seja desnecessariamente grande por causa dos custos envolvidos, você faz uma pesquisa piloto que aponta uma proporção de apenas 28% de alunos satisfeitos com o horário de funcionamento da biblioteca. Calcule o novo tamanho de amostra, incorporando essa informação auxiliar.

   (c) Seguindo suas diretrizes, o DA realiza uma pesquisa com 210 alunos, obtendo nessa amostra 67 alunos satisfeitos com o horário de funcionamento da biblioteca.

Construa um intervalo de 99% de confiança para a verdadeira proporção de alunos satisfeitos com o horário de funcionamento da biblioteca.

Solução:

(a) $\epsilon = 0,08 \qquad\qquad 1 - \alpha = 0,99 \Rightarrow z_{0,005} = 2,58$

$0,08 = 2,58\dfrac{\sqrt{0,5.0,5}}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \dfrac{2,58}{0,08} \cdot 0,5 = 16,125 \Rightarrow n \geq 261$

(b) $0,08 = 2,58\dfrac{\sqrt{0,28.0,72}}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \dfrac{2,58}{0,08} \cdot \sqrt{0,28.0,72} = 14,48 \Rightarrow n \geq 210$

(c) $\widehat{p} = \dfrac{67}{210} = 0,319$

$\epsilon = 2,58\sqrt{\dfrac{0,319.0,681}{210}} = 0,083$

Intervalo de confiança: $(0,319 - 0,083\,;\ 0,319 + 0,083) = (0,236\,;\ 0,402)$

6. Seja $X_1, X_2, \cdots, X_9$ uma amostra aleatória simples de tamanho 9 de uma população $X \sim N(\mu; 1)$. Calcule

(a) $\mathrm{P}\left(|X - \mu| \leq \frac{1}{2}\right)$

(b) $\mathrm{P}\left(|\overline{X} - \mu| \leq \frac{1}{2}\right)$

Solução:

(a) $\mathrm{P}\left(|X - \mu| \leq \frac{1}{2}\right) = \mathrm{P}\left(|Z| \leq \frac{1}{2}\right) = \Phi(0,5) - \Phi(-0,5) = \Phi(0,5) - [1 - \Phi(0,5)] = 2 \cdot 0,6915 - 1 = 0,3830$

(b) $\mathrm{P}\left(|\overline{X} - \mu| \leq \frac{1}{2}\right) = \mathrm{P}\left(\dfrac{|\overline{X} - \mu|}{\frac{1}{3}} \leq \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\right) = \mathrm{P}\left(|Z| \leq 1,5\right) = \Phi(1,5) - \Phi(-1,5) = \Phi(1,5) - [1 - \Phi(1,5)] = 2 \cdot 0,9332 - 1 = 08664$

7. Seja X_1, X_2 uma amostra aleatória simples de uma população $X \sim N(0; \sigma^2)$. Calcule

(a) $\mathrm{P}\left(X_1^2 + X_2^2 \leq \sigma^2\right)$

(b) $\mathrm{P}\left(X_1^2 + X_2^2 \leq 2\sigma^2\right)$

Solução:

$X_i \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow \left(\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_1^2$

X_1, X_2 independentes $\Rightarrow \left(\dfrac{X_1}{\sigma}\right)^2 + \left(\dfrac{X_2}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_2^2$

(a) $\mathrm{P}\left(X_1^2 + X_2^2 \leq \sigma^2\right) = \mathrm{P}(\chi_2^2 \leq 1) = 0,393469$

(b) $\mathrm{P}\left(X_1^2 + X_2^2 \leq 2\sigma^2\right) = \mathrm{P}(\chi_2^2 \leq 2) = 0,632121$

Minitab

Função Distribuição Acumulada

Qui-Quadrado com GL 2

x	P(X = x)
1	0,393469
2	0,632121

8. Suponha que uma amostra aleatória simples de tamanho 2 seja retirada de uma população $X \sim N(0; \sigma^2)$; suponha, também, que $x_1 = -0,75$ e $x_2 = 0,16$. Quão confidentes podemos estar em que

   (a) $\sigma^2 \geq 1,0221$?

   (b) $\sigma^2 \geq 0,4242$?

   (c) $\sigma^2 \geq 2,7909$?

   Solução:

   (a) Queremos que $\sigma^2 \geq 0,4242$, ou equivalentemente, $\frac{1}{\sigma^2} \leq \frac{1}{0,4242}$. Logo, nosso nível de confiança é

$$P\left(\frac{X_1^2}{\sigma^2} + \frac{X_2^2}{\sigma^2} \leq \frac{0,5881}{0,4242}\right) = P(\chi_2^2 \leq 1,386374) = 0,50$$

   (b) $P\left(\frac{X_1^2}{\sigma^2} + \frac{X_2^2}{\sigma^2} \leq \frac{0,5881}{1,0221}\right) = P(\chi_2^2 \leq 0,575384) = 0,25$

   (c) $P\left(\frac{X_1^2}{\sigma^2} + \frac{X_2^2}{\sigma^2} \leq \frac{0,5881}{2,7909}\right) = P(\chi_2^2 \leq 0,210721) = 0,10$

   Veja Figura 1, onde se ilustram os três níveis de confiança calculados.

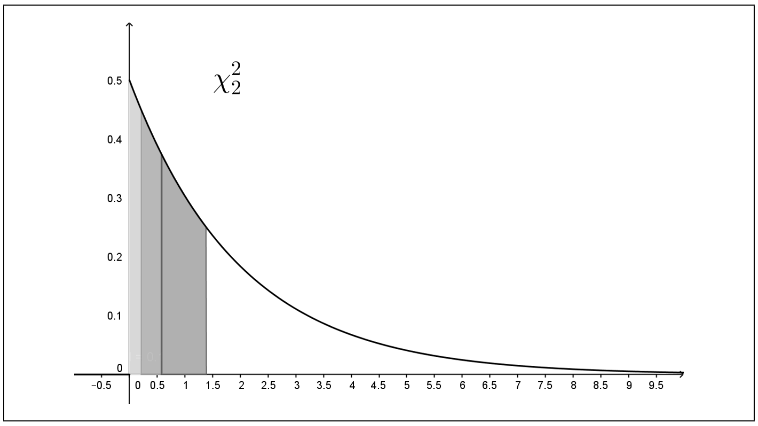


Figura 1 – Níveis de confiança para o Exercício 8

9. Determinada característica populacional é descrita por uma distribuição normal. Uma amostra de 25 observações resultou nas seguintes estimativas:

$$\overline{x} = 15 \qquad s = 5,9$$

   Obtenha o intervalo de confiança (L_1, L_2) para a média populacional de modo que, à desconfiança de que $\mu < L_1$ seja atribuída probabilidade de 1% e à desconfiança de que $\mu > L_2$ seja atribuída probabilidade 0,1%. Esse é um intervalo de confiança *assimétrico*.

   Solução:

   A ideia aqui é distribuir o "erro" de forma assimétrica; veja a Figura 2.

   Temos, então:

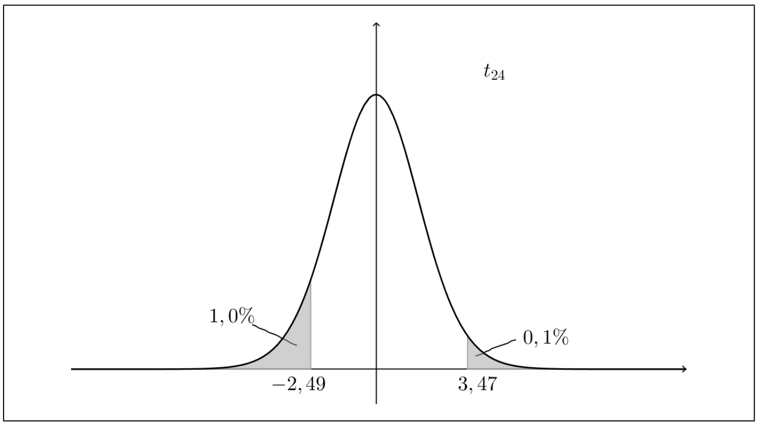


Figura 2 – Intervalo de confiança assimétrico

$$P(-2,49 \leq t_{24} \leq 3,47) = 0,989 \Rightarrow P\left(-\frac{2,49S}{\sqrt{25}} \leq \overline{X} - \mu \leq \frac{3,47S}{\sqrt{25}}\right) = 0,989 \Rightarrow$$
$$P\left(\overline{X} - \frac{3,47S}{\sqrt{25}} \leq \mu \leq \overline{X} + \frac{2,49S}{\sqrt{25}}\right) = 0,989$$

Para a amostra dada, o intervalo de confiança assimétrico é

$$\left(15 - \frac{3,47 \cdot 5,9}{5}\,;\, 15 + \frac{2,49 \cdot 5,9}{5}\right) = (10,9054\,;\, 17,9382)$$

10. Seja $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ uma amostra aleatória simples de tamanho 10 de uma população $X \sim N(\mu;\sigma^2)$. Calcule $P(|\overline{X} - \mu| \leq S)$ em que $S^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(X_i - \overline{X})^2$

Solução:

$\sqrt{10}\dfrac{\overline{X} - \mu}{S} \sim t_9$. Logo,

$$P(|\overline{X} - \mu| \leq S) = P\left(\left|\frac{\overline{X} - \mu}{S}\right| \leq 1\right) = P\left(\left|\sqrt{10}\frac{\overline{X} - \mu}{S}\right| \leq \sqrt{10}\right) = P(t_9 \leq \sqrt{10}) \underbrace{=}_{\text{Minitab}} 0,994246$$

Minitab

Distribuição t de Student com GL 9

x	P(X = x)
3,16228	0,994246

11. A produção mensal de vacas leiteiras de Iowa é de aproximadamente 718 litros de leite por vaca. Para avaliar o efeito de uma onda de calor prolongada sobre a produção de leite, obteve-se uma amostra aleatória de vacas leiteiras de Iowa e a produção mensal (no verão) de leite (em litros) para cada uma é apresentada na tabela que segue.

720	699	712	713	711	702	717	716	703	724	717	708
725	722	718	717	711	717	732	717	714	714	713	719

(a) Há alguma evidência que sugira que a verdadeira produção média mensal de leite por vaca tenha decrescido? Use $\alpha = 0,05$. Se o teste for significante, você acredita que o calor tenha causado esse decréscimo?

(b) Ache limites para o valor P associado a esse teste de hipótese.
Obs.: $\sum_{i=1}^{24} = 17\,161 \qquad \sum_{i=1}^{24} x_i^2 = 12\,272\,089$

Solução:

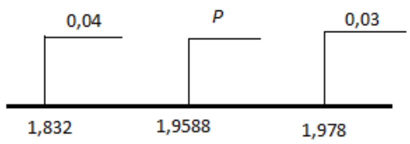
$$\overline{x} = \frac{17161}{24} = 715,042$$
$$S^2 = \frac{1}{23}\left[12272089 - \frac{17161^2}{24}\right] = 54,7373$$

(a)

$$H_0 : \mu = 718$$
$$H_1 : \mu < 718$$

Estatística de teste: $T_0 = \sqrt{24}\dfrac{\overline{X} - 718}{S} \sim t_{23}$
Região crítica: $T_0 < -t_{23;005}$ ou $T_0 < -1,714$
Valor observado da ET: $t_0 = \sqrt{24}\dfrac{715,042 - 718}{\sqrt{54,7373}} = -1,9588 < -1,714$
Rejeita-se H_0, ou seja, há evidências de que houve redução na produção leiteira. No entanto, não se pode dizer que o calor "causou" essa redução, uma vez que não foi feito um experimento planejado. Outros fatores que não foram controlados podem ter afetado a produção de leite.

(b) $P = \mathrm{P}(t_{23} < -1,9588)$



$0,03 < P < 0,04$ Valor exato (Minitab): $P = 1 - 0,968815 = 0,031185$

12. A educação em casa está se tornando muito popular nos Estados Unidos e muitas faculdades tentam atrair estudantes desse grupo. Há evidência de que aproximadamente 90% de todas as crianças que estudaram em casa vão para a faculdade. Para verificar essa afirmativa, obteve-se uma amostra aleatória de 225 crianças que estudaram em casa e verificou-se que 189 frequentaram a faculdade.

(a) Verifique os critérios de simetria. Um teste de hipótese de grandes amostras sobre p é apropriado?

(b) Realize o teste apropriado para determinar se a proporção de crianças que estudaram em casa que frequentaram a faculdade é diferente de 0,90. Use $\alpha = 0,05$.

(c) Calcule o valor P associado a esse teste.

Solução:

p = proporção das crianças que vão para a faculdade dentre as que estudaram em casa

(a) $\widehat{p} = \dfrac{189}{225} = 0,84$ $\qquad$ $0,9 \times 225 = 202,5 > 5$ $\qquad$ $0,1 \times 225 = 22,5 > 5$
Condições OK!

(b)

$$H_0 : p = 0,90$$
$$H_1 : p \neq 0,90$$

Estatística de teste: $Z_0 = \sqrt{225}\dfrac{\widehat{P} - 0,90}{\sqrt{0,9 \times 0,1}} \approx N(0;1)$ $\qquad$ $z_{0,025} = 1,96$

Região crítica: $|Z_0| > 1,96$

Valor observado da ET: $z_0 = \sqrt{225}\dfrac{0,84 - 0,90}{\sqrt{0,9 \times 0,1}} = -3,0 < -1,96$

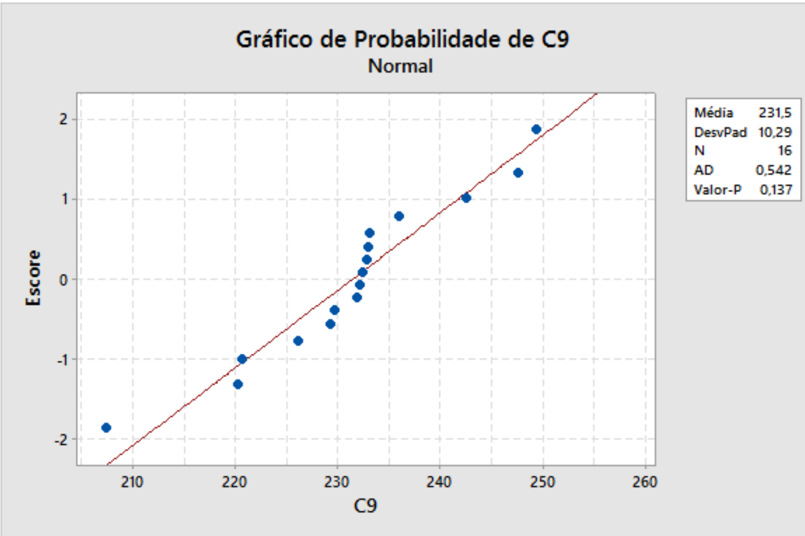
Rejeita-se H_0; há evidências de que a proporção seja diferente de 0,90.

(c) $P = 2\,\mathrm{P}(Z < -3) = 2[1 - \Phi(3)] = 0,0027$

13. Considere a seguinte amostra aleatória de 16 observações de uma população que se alega ser normal com variância de 36,8.

233,1	226,1	220,3	247,6	232,9	232,8	235,9	232,4
249,4	207,4	231,8	232,1	220,7	229,6	242,5	229,3

(a) Na figura a seguir apresenta-se a saída do Minitab para o teste de Anderson-Darling. O que se pode dizer sobre a normalidade dos dados?



(b) Faça o teste apropriado sobre a variância populacional.

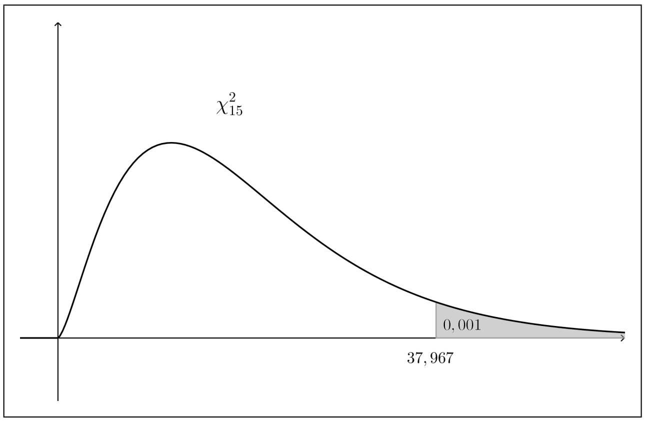
(c) Ache limites para o valor P associado a esse teste de hipótese.
Obs.: $\sum_{i=1}^{16} = 3703,9$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 859017,65$

Solução:

(a) As hipóteses do este de Anderson-Darling são
H_0: os dados vêm de uma população normal
H_1: os dados não vêm de uma população normal
Como o valor $P = 0,137$ é grande, não se rejeita H_0, ou seja, há evidências de que os dados vêm de uma população normal.

(b) Agora vamos fazer o teste sobre a variância. A variância amostral é
$S^2 = \frac{1}{15}\left(859017,65 - \frac{3703,9^2}{16}\right) = 105,863292.$
Note que na saída do Minitab é dado o desvio padrão amostral.
$H_0 : \sigma^2 = 36,8$
$H_1 : \sigma^2 \neq 36,8$
Estatística de teste: $\chi_0^2 = \frac{15S^2}{36,8} \sim \chi_{15}^2$
Região crítica: $\chi_0^2 < 6,262$ ou $\chi_0^2 > 27,488$
Valor observado da ET: $c_0 = \frac{15 \times 105,863292}{36,8} = 43,15 > 27,488$
Rejeita-se H_0; há evidências de que a variância seja diferente de 36,8.

(c) $P = 2\,\mathrm{P}(\chi_{15}^2 > 43,15$. Pela tabela podemos dizer que $P < 0,002$.



O valor exato, pelo Minitab, é $P = 2(1 - 0,999851) = 0,000298$.

14. Sabe-se que os diâmetros de parafusos têm distribuição normal com desvio padrão de 0,0001 in. Uma amostra aleatória simples de 10 parafusos acusou uma média de 0,2546 in.

(a) Teste a hipótese de que o verdadeiro diâmetro médio dos parafusos é igual a 0,255 in, com nível de significância de 0,05.

(b) Qual o tamanho de amostra necessário para se detectar um verdadeiro diâmetro médio de 0,2552 in com probabilidade de pelo menos 0,90?

Solução:

X = diâmetro (em polegadas)
$X \sim N(\mu; 0,0001^2)$ $\quad n = 10 \quad \overline{x} = 0,2546$

(a) $H_0 : \mu = 0,255$
$H_1 : \mu \neq 0,255$
Estatística de teste: $Z_0 = \sqrt{10}\frac{\overline{X} - 0,255}{0,0001} \sim N(0;1)$
Região crítica: $|Z_0| > 1,96$
Valor observado da ET: $z_0 = \sqrt{10}\frac{0,2546 - 0,255}{0,0001} = -12,65 < -1,96$
Rejeita-se H_0; há evidências de que o diâmetro médio seja diferente de 0,255 polegada.

(b) Queremos $\pi(0,2552) \geq 0,90$

$\pi^* = 0,90 \Rightarrow z_{\pi^*} = -1,64$

$n \approx \left[\frac{(z_{\alpha/2} - z_{\pi^*})\sigma}{\delta^*}\right]^2 = \left[\frac{(1,96 - (-1,64)) \cdot 0,0001}{0,2552 - 0,255}\right]^2 = 3,24 \Rightarrow n \geq 4$

Note que a amostra tem tamanho $n = 10$. Logo, para essa amostra, $\pi(0,2552) > 0,90$. De fato:

$$\mathrm{P}(\text{rejeitar } H_0 \,|\, \mu = 0,2552) = 1 - \mathrm{P}\left(-1,96 \leq \sqrt{10}\frac{\overline{X} - 0,255}{0,0001} \leq 1,96 \,|\, \mu = 0,2552\right)$$
$$= 1 - \mathrm{P}\left(-1,96 \leq \sqrt{10}\frac{\overline{X} - 0,2552 + 0,2552 - 0,255}{0,0001} \leq 1,96 \,|\, \mu = 0,2552\right)$$
$$= 1 - \mathrm{P}\left(-1,96 - \sqrt{10}\frac{0,0002}{0,0001} \leq Z \leq 1,96 - \sqrt{10}\frac{0,0002}{0,0001}\right)$$
$$= 1 - \mathrm{P}(-8,28 \leq Z \leq -4,36) \approx 1 - 0 = 1 > 0,90$$

15. O gerente de um mercado acha que a maioria dos seus clientes gasta pelo menos 50 reais em qualquer visita feita à loja. Muitos de seus preços são decididos com base nessa suposição. Ele decide testá-la com uma amostra de 50 clientes, cujos gastos (em ordem decrescente) são exibidos a seguir. O que os dados revelam sobre o problema em pauta?

(a) Para responder a essa questão, formule e resolva o teste de hipótese apropriado, usando um nível de significância de 5%. Certifique-se de definir o parâmetro envolvido, a estatística de teste, os resultados utilizados e estabelecer as conclusões em linguagem apropriada.

(b) Calcule o valor P.

89,20	75,00	68,10	65,00	65,00	62,50	61,50	61,00	60,50	60,00
60,00	59,80	56,70	55,40	53,60	52,10	52,00	51,40	51,20	51,00
50,00	50,00	49,80	45,60	45,20	44,80	44,70	43,00	42,50	40,00
35,50	35,00	34,80	34,50	33,20	31,80	30,90	30,50	29,80	28,20
25,10	25,00	22,80	21,00	19,50	18,60	17,40	16,30	15,10	15,00

$\sum x_i = 2186,60$ $\qquad$ $\sum x_i^2 = 110349,56$

Solução:

$$\overline{x} = \frac{2186,6}{50} = 43,732 \qquad s^2 = \frac{1}{49}\left(110349,56 - \frac{2186,6^2}{50}\right) = 300,5136 \qquad s = 17,3353$$

(a) $H_0 : \mu = 50$

$H_1 : \mu < 50$

Estatística de teste: $Z_0 = \sqrt{50}\frac{\overline{X} - 50}{S} \approx N(0;1)$

Região critica: $Z_0 < -1,64$

Valor observado da ET: $z_0 = \sqrt{50}\frac{43,732 - 50}{17,3353} = -2,5567 < -1,64$

Rejeita-se H_0; há evidências de que os clientes gastam menos de 50 reais.

(b) $P = \mathrm{P}(Z \leq -2,56) = \Phi(-2,56) = 1 - \Phi(2,56) = 0,0052$

16. A Associação de Tecnologia dos Motoristas, no Reino Unido, estudou, recentemente, o comportamento de motoristas que usam ou não detectores de radar. Obteve-se uma

amostra aleatória de 250 usuários e 562 não usuários de detectores. Nos últimos três anos, 108 usuários e 68 não usuários tinham se envolvido em acidentes.

(a) Ache um intervalo de confiança de 99% para a verdadeira proporção de usuários de detector de radar que tiveram um acidente nos últimos três anos.

(b) Ache um intervalo de confiança de 99% para a verdadeira proporção de não usuários de detector de radar que tiveram um acidente nos últimos três anos.

(c) Há alguma evidência que sugira que as duas verdadeiras proporções sejam diferentes? Justifique sua resposta.

Solução:

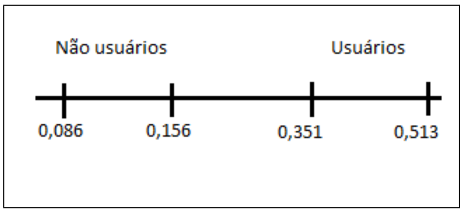
- Usuários de detector
  $n = 250 \qquad \widehat{p}_U = \dfrac{108}{250} = 0,432$
  $250 \times 0,432 = 108 \geq 5 \qquad\qquad 250 \times 0,568 = 142 \geq 5$
- Usuários de detector
  $n = 562 \qquad \widehat{p}_U = \dfrac{68}{562} = 0,1121$
  $562 \times 0,121 = 68 \geq 5 \qquad\qquad 562 \times (1 - 0,121) = 494 \geq 5$

Podemos usar a aproximação normal para as duas amostras.

(a) Usuários:
$\epsilon = 2,58\sqrt{\dfrac{0,432 \times 0,568}{250}} = 0,081$
I.C.: $[0,432 - 0,081\,;\, 0,432 + 0,081] = [0,351\,;\, 0,513]$

(b) Não suários:
$\epsilon = 2,58\sqrt{\dfrac{0,121 \times 0,879}{562}} = 0,035$
I.C.: $[0,121 - 0,035\,;\, 0,121 + 0,035] = [0,086\,;\, 0,156]$

(c) Como os intervalos de confiança não se sobrepõem, há indícios de que as proporções de usuários e não usuários que sofreram acidente nos últimos 3 anos sejam diferentes.



17. O sindicato de caminhoneiros informa que a quantidade média de combustível diesel comprado por semana é 1330 litros, com desvio padrão de 68,1 litros. Essas informações são usadas pelos gerentes de postos de parada de caminhões para planejar esquemas de trabalho e suprimento do combustível. Manoel, gerente de um grande posto, resolve fazer um levantamento para verificar se as compras de diesel por caminhoneiros no seu posto seguem o padrão geral indicado pelo sindicato. Na tabela que segue estão os dados de uma amostra aleatória simples de 20 caminhoneiros. Suponha que o consumo possa ser bem aproximado por um modelo normal. Você vai ajudar Manoel nesse processo de decisão.

1283	1242	1317	1234	1226	1298	1298	1355	1382	1287
1344	1253	1314	1234	1298	1344	1298	1295	1355	1321

Obs.: $\sum_{i=1}^{20} x_i = 25\,978$ $\qquad\qquad$ $\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 33\,780\,632$

(a) Formule esse problema em termos de testes de hipóteses, especificando as hipóteses nulas e alternativas.

(b) Estabeleça as regiões críticas para um nível de significância $\alpha = 0,05$.

(c) Quais são as conclusões do gerente? Certifique-se de interpretar seus resultados no contexto do problema.

(d) Estabeleça intervalos que contenham os verdadeiros valores P.

(e) Construa intervalos de confiança para a média e para a variância da quantidade de diesel comprada por caminhoneiros no posto do Manoel. Use o nível de confiança de 95%.

Solução:

X =compras de diesel no posto do Manoel $\qquad X \approx N(\mu; \sigma^2)$

$\overline{x} = \dfrac{25978}{20} = 1298,9 \qquad s^2 = \dfrac{1}{19}\left(33780632 - \dfrac{25978^2}{20}\right) = 1989,8842 \qquad s = 44,61$

- Inferência sobre a média

  $H_0 : \mu = 1330$

  $H_1 : \mu \neq 1330$

  Estatística de teste: $T_0 = \sqrt{20}\dfrac{\overline{X} - 1330}{S} \sim t_{19}$

  Região crítica: $|T_0| > 2,093$

  Valor observado da ET: $t_0 = \sqrt{20}\dfrac{1298,9 - 1330}{44,6} = -3,118 < -2,093$

  Rejeita-se H_0: há evidências de que a quantidade média de combustível comprada no posto do Manoel seja diferente de 1330 litros.

  Margem de erro: $\epsilon = 2,093\dfrac{44,61}{\sqrt{20}} = 20,8779$

  Intervalo de confiança: $(1298,9 - 20,8779\,;\ 1298,9 + 20,8779)$

  Note que 1330 não está no intervalo de confiança.

- Inferência sobre a variância

  $H_0 : \sigma^2 = 68,1^2$

  $H_1 : \sigma^2 \neq 68,1^2$

  Estatística de teste:$\chi_0^2 = \dfrac{19S^2}{68,1^2} \sim \chi_{19}^2$

  Região crítica: $\chi_0^2 < 8,907$ ou $\chi_0^2 > 32,852$

  Valor observado da ET: $c_0^2 = \dfrac{19 \times 1989,8842}{68,1^2} = 8,1524 < 8,907$

  Rejeita-se H_0: há evidências de que o desvio padrão da quantidade de combustível comprada no posto do Manoel seja diferente de 68,1 litros.

  Intervalo de confiança para a variância: $\left(\dfrac{19 \times 1989,8842}{32,852}\,;\ \dfrac{19 \times 1989,8842}{8,907}\right) =$ $(1150,8523\,;\ 4244,7288)$

  Intervalo de confiança para o desvio padrão: $(33,9242\,;\ 65,1516)$.

  Note que 68,1 litros não está no intervalo de confiança para o desvio padrão.