NOME: GABARITO

1. Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória simples de uma população X com média μ e variância σ^2.

(a) Mostre que, se $\mu = 0$, então $T = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ é um estimador não viesado para estimar σ^2.

Solução

Queremos mostrar que $\mathrm{E}(T) = \sigma^2$. Sabemos que

$$X_1, X_2, \cdots, X_n - \text{iid} - X_i \sim (\mu; \sigma^2)$$
$$\mathrm{E}(X_i^2) = \mathrm{Var}(X_i) + [\mathrm{E}(x_i)]^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

Logo,

$$\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + \mu^2) = \frac{1}{n}(n\sigma^2 + n\mu^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

Com os dados do problema, temos

$$\mu = 0 \Rightarrow \mathrm{E}(T) = \sigma^2$$

(b) Mostre que se μ é uma constante não nula, *mas conhecida*, então T é viesado para estimar σ^2. Calcule o viés de T e proponha um estimador T^* não viesado para σ^2 baseado em T.

Solução

Se $\mu \neq 0$, vimos acima que

$$\mathrm{E}(T) = \sigma^2 + \mu^2 \Rightarrow \mathrm{Viés}(T) = \mathrm{E}(T) - \sigma^2 = \mu^2$$

Definindo

$$T^* = T - \mu^2 \Rightarrow \mathrm{E}(T^*) = \mathrm{E}(T) - \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

e, assim, $T^* = T - \mu^2$ é não viesado para estimar σ^2.

(c) Entre o estimador T^* e S^2, qual lhe parece preferível para estimar σ^2 na situação descrita no item anterior?

Solução

Note que

$$T^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

e

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

Ambos estimadores são não viesados para estimar σ^2. No entanto, no contexto em questão, estamos supondo que a média amostral é conhecida, não havendo, assim, necessidade de estimá-la. Dessa forma, o estimador T^*, que usa o valor conhecido de μ, deve ser preferido a S^2, que usa o estimador de $/mu$. Lembre-se que perdemos um grau de liberdade quando trabalhamos com S^2.

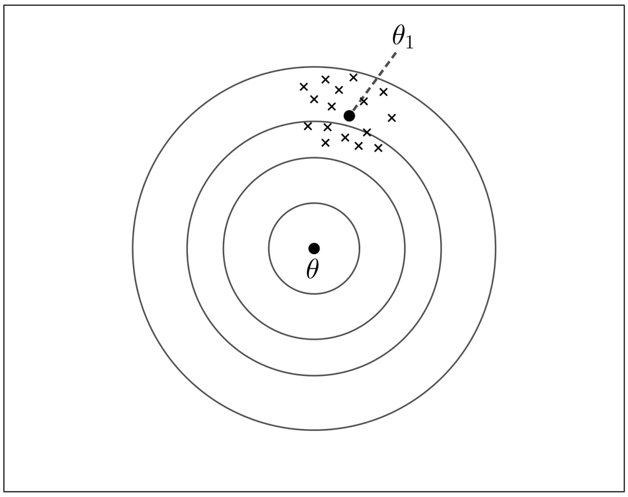
Vamos considerar um caso particular, em que $X_i \sim N(\mu; \sigma^2)$. Sabemos que, nesse caso,

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \Rightarrow \mathrm{Var}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1) \Rightarrow \mathrm{Var}(S^2) = \frac{2(n-1)\sigma^4}{(n-1)^2} = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$$\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0;1)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi_n^2\Rightarrow \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right]=2n\Rightarrow \mathrm{Var}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=2n\sigma^4\Rightarrow$$
$$Var(T^*)=\frac{2\sigma^4}{n}$$

Vemos, com esse exemplo, que $\mathrm{Var}(T^*)<\mathrm{Var}(S^2)$.

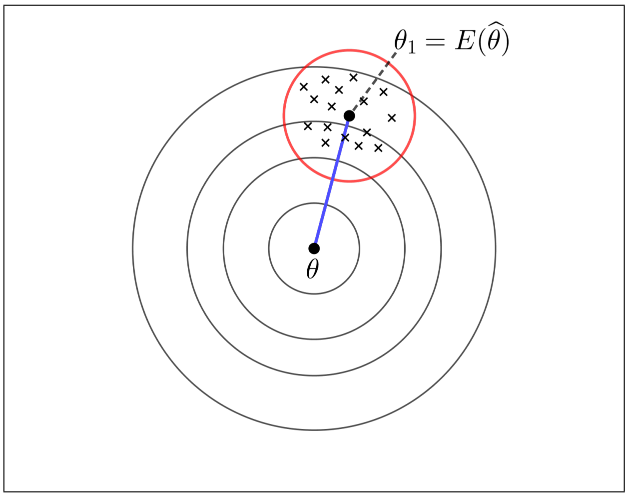
2. Se $\widehat{\theta}$ é um estimador para o parâmetro θ, prove que $\mathrm{EQM}(\widehat{\theta})=\mathrm{Var}(\widehat{\theta})+[\mathrm{Viés}(\widehat{\theta})]^2$. Utilize a figura a seguir, análoga à utilizada na apostila, para interpretar essa decomposição.



Solução

$$\begin{aligned}
\mathrm{EQM}(\widehat{\theta}) &= \mathrm{E}(\widehat{\theta}-\theta)^2=\mathrm{E}[\widehat{\theta}-\mathrm{E}(\widehat{\theta})+\mathrm{E}(\widehat{\theta})-\theta]^2\\
&= \mathrm{E}[\widehat{\theta}-\mathrm{E}(\widehat{\theta})]^2+\mathrm{E}[\mathrm{E}(\widehat{\theta})-\theta]^2+2\,\mathrm{E}[\widehat{\theta}-\mathrm{E}(\widehat{\theta})][\mathrm{E}(\widehat{\theta})-\theta]\\
&= \mathrm{Var}(\widehat{\theta})+[\mathrm{E}(\widehat{\theta})-\theta]^2+2\,\mathrm{E}[\widehat{\theta}-\mathrm{E}(\widehat{\theta})]\,\mathrm{Viés}(\widehat{\theta})\\
&= \mathrm{Var}(\widehat{\theta})+[\mathrm{Viés}(\widehat{\theta})]^2+2[\mathrm{E}(\widehat{\theta})-\mathrm{E}(\widehat{\theta})]\,\mathrm{Viés}(\widehat{\theta})\\
&= \mathrm{Var}(\widehat{\theta})+[\mathrm{Viés}(\widehat{\theta})]^2
\end{aligned}$$

Veja a figura a seguir.



Os pontos dentro do círculo vermelho representam os valores de $\widehat{\theta}$ ao longo de todas as possíveis amostras. Vemos que esses valores estão centrados em $\theta_1=\mathrm{E}(\widehat{\theta})$. A variabilidade desses valores em torno da sua média é $\mathrm{Var}(\widehat{\theta})$. Como o estimador é viesado, há uma diferença entre sua média e o verdadeiro valor do parâmetro, que é o viés do estimador, representado pela linha em azul. Em termos de erro quadrático, tomamos esse viés ao quadrado, que é a componente $[\mathrm{Viés}(\widehat{\theta})]^2$.

3. (a) Defina **intervalo de confiança** e **nível de confiança**, interpretando essas definições.
   (b) Defina **valor** P e explique a sua utilização na tomada de decisão sobre um teste de hipótese.
   (c) Defina **região crítica** de um teste de hipótese.
   (d) Defina **erro tipo I** e explique como ele é usado na determinação da região crítica de um teste de hipótese.

Solução

(a) Se $X_1, X_2, \cdots X_n$ é uma amostra aleatória simples de uma população representada pela variável aleatória X cuja lei de probabilidade depende de um parâmetro desconhecido θ, então as estatísticas $\widehat{\theta}_1$ e $\widehat{\theta}_2$ formam um intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para θ se

$$\mathrm{P}\left(\widehat{\theta}_1 \leq \theta \leq \widehat{\theta}_2\right) \geq 1-\alpha$$

qualquer que seja o valor de θ. $1-\alpha$ é chamado *nível de confiança* do intervalo.

A interpretação é a seguinte: se repetíssemos muitas e muitas vezes o processo de seleção da amostra e para cada amostra sorteada construíssemos o respectivo intervalo de confiança, então uma proporção de $1-\alpha$ desses intervalos conteriam o verdadeiro parâmetro θ. Sendo assim, o nível de confiança mede o grau de acerto do método, em que acerto significa o intervalo conter o parâmetro de interesse.

(b) Em um teste de hipótese de H_0 versus H_a, o valor P é a probabilidade de se obter um valor da estatística de teste tão ou mais extremo, na direção de H_a, que o valor observado, supondo-se H_0 verdadeira. Assim, rejeita-se a hipótese nula H_0 para valores pequenos de P, pois esses são indícios de que o resultado obtido para a estatística de teste é pouco provável de ocorrer sob H_0.

(c) A região crítica de um teste de hipótese é o conjunto de valores da estatística de teste que levam à rejeição da hipótese nula H_0.

(d) O erro tipo I é o erro que se comete ao se rejeitar a hipótese nula H_0, quando na verdade ela é verdadeira. Em geral, define-se a probabilidade desejada para um erro tipo I e com essa probabilidade define-se a região crítica do teste.

---

4. O alto custo dos medicamentos forçou algumas pessoas nos Estados Unidos a escolherem entre os remédios prescritos e outras necessidades, como alimentação, aquecimento ou eletricidade. Uma pesquisa concluiu que 29% dos adultos americanos deixaram de aviar pelo menos uma receita no ano anterior devido ao custo. Em seguida a uma campanha de propaganda alertando os adultos sobre a importância de aviarem suas receitas, um grupo de médicos espera que essa porcentagem tenha diminuído. Obteve-se uma amostra aleatória de 1000 adultos que receberam receitas, e 260 deles disseram não ter aviado a receita devido ao custo.
   (a) Há alguma evidência que sugira que a proporção de adultos americanos que não aviaram uma receita devido ao custo tenha diminuído? Use $\alpha = 0,01$.
   (b) Calcule o valor P.
   (c) Ache a probabilidade de um erro tipo II nesse teste de hipótese se $p = 0,26$.

Solução

(a) Condições para o teste de hipótese baseado na normalidade aproximada de $\widehat{P}$ são satisfeitas: $n = 1000 \qquad 260 > 5 \qquad 740 > 5$.

$$H_0 : p = 0,29$$
$$H_1 : p < 0,29$$

$\alpha = 0,01 \Rightarrow z_{0,01} = 2,33$

Estatística de teste: $Z_0 = \dfrac{\widehat{P} - 0,29}{\sqrt{\dfrac{0,29 \times 0,71}{1000}}} \approx N(0;1)$ sob H_0.

Região crítica: $Z_0 < -2,33$

Valor observado da estatística de teste: $z_0 = \dfrac{0,26 - 0,29}{\sqrt{\dfrac{0,29 \times 0,71}{1000}}} = -2,0907 > -2,33$

Não há evidências que sugiram, ao nível $\alpha = 0,01$, uma redução na proporção de não aviamento de receitas após a campanha.

(b) $P = \mathrm{P}(Z < -2,0907) = 0,5 - 0,4812 = 0,0188$. Note que $P > 0,01$.

(c) A região crítica do teste é equivalente a

$$\widehat{P} < 0,29 - 2,33 \times \sqrt{\frac{0,29 \times 0,71}{1000}} = 0,2566$$

O problema pede, então

$$\mathrm{P}(\widehat{P} \geq 0,2566 \,|\, p = 0,26) = \mathrm{P}\left(Z > \frac{0,2566 - 0,26}{\sqrt{\frac{0,26 \times 0,74}{1000}}} \right) = P(Z \geq -0,2451) = 0,5{+}0,0987 = 0,5987$$

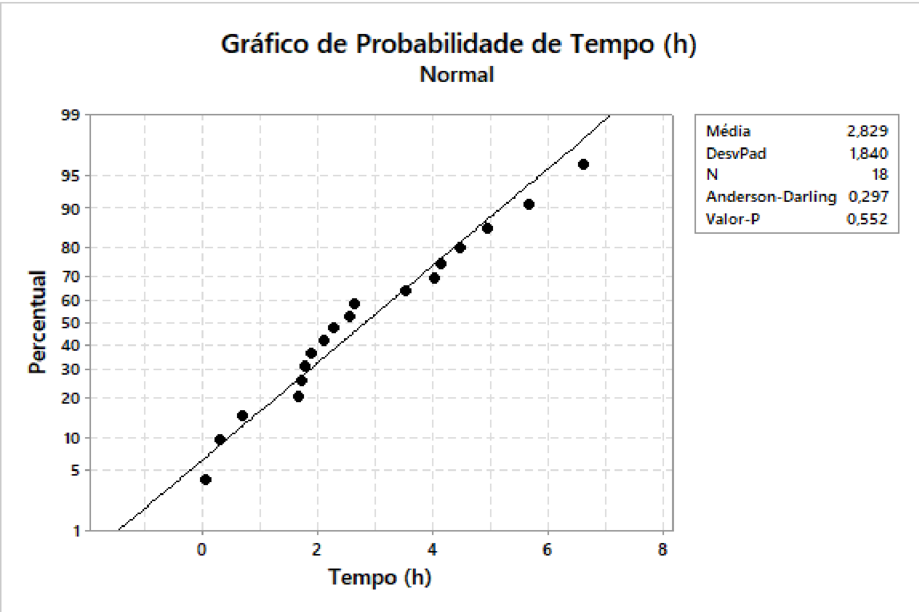
---

5. Todas as pessoas que possuem ou têm acesso a um computador têm várias senhas de acesso para vários programas. Supõe-se que esses códigos sejam uma combinação aleatória secreta de caracteres. No entanto, alguns psicólogos acreditam que os códigos sejam previsíveis com base em traços da personalidade, e muitos hackers de computador afirmam que qualquer código pode ser quebrado. Para estudar a segurança em computadores em uma grande empresa, um programa especial foi desenvolvido e usado para, sistematicamente, tentar quebrar vários códigos de clientes selecionados aleatoriamente. O tempo (em horas) necessário para quebrar cada código é apresentado a seguir. Ache um intervalo de confiança de 98% para a verdadeira variância populacional do tempo necessário para se quebrar um código.

1,88	1,71	2,09	6,60	2,28	3,52	2,64	4,94	1,78
4,13	2,55	1,66	0,28	4,02	4,47	0,68	5,67	0,03

$\sum x_i = 50,93$

$\sum x_i^2 = 201,6639$



Solução

O valor P do teste de Anderson-Darling para verificação da suposição de dados normais é alto, 0,552. Sendo assim, não se rejeita a hipótese de normalidade dos dados e podemos prosseguir com a inferência sobre a variância baseada na distribuição qui-quadrado, que pressupõe normalidade dos dados.

O valor observado da variância amostral pode ser calculado a partir dos dados como

$$s^2 = \frac{1}{17}\left(201,6639 - \frac{50,93^2}{18}\right) = 3,3859$$

ou usando a saída do Minitab como

$$s^2 = 1,840^2 = 3,3856$$

A diferença é devida a arredondamentos.

Os valores críticos da distribuição qui-quadrado são:

$$\chi_{17;0,99} = 6,408 \qquad \chi_{17;0,01} = 33,409$$

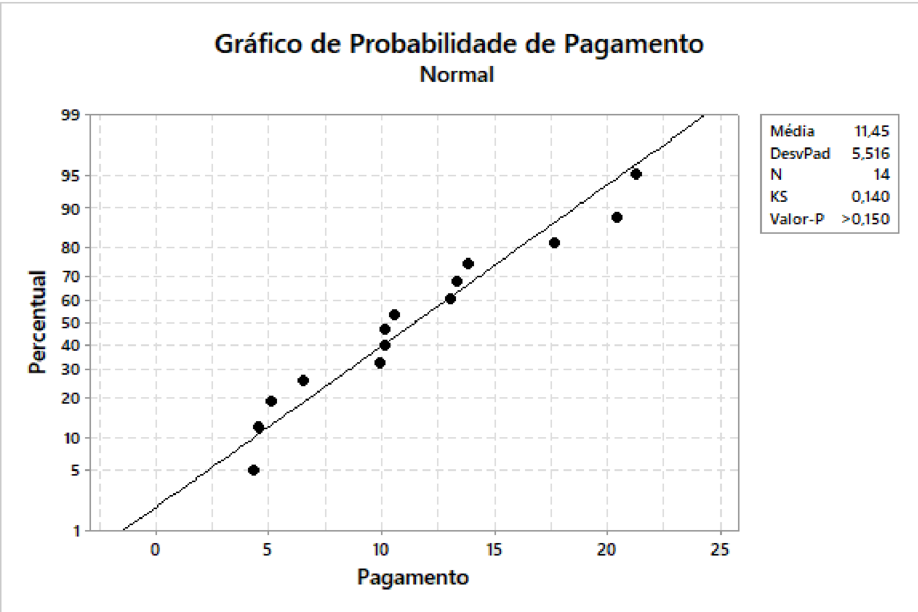
Logo, o intervalo de confiança de 98% para a variância populacional é

$$\left(\frac{17 \times 3,3859}{33,409} \, , \, \frac{17 \times 3,3859}{6,408} \right) = (1,7229 \, , \, 8,9826)$$

6. O pagamento médio para CEOs (Chief Executive Officers - Diretores Executivos), em 2008, nas 500 maiores companhias americanas, foi de 12,8 milhões de dólares. Clamor público e reclamações de acionistas forçaram os comitês de compensação a reconsiderar os salários de executivos seniores. Obteve-se uma amostra aleatória de CEOs, e o pagamento total (em milhões de dólares) para cada um é apresentado a seguir. Há alguma evidência que sugira,, ao nível de significância de 5%, que o pagamento médio para CEOs tenha diminuído?

10,1	4,3	13,8	5,1	13,0	21,2	4,5
10,5	17,6	10,1	6,5	9,9	13,3	20,4

$$\sum x_i = 160,3 \qquad \sum x_i^2 = 2230,97$$



Solução

O valor P do teste de Kolmogorov-Smirnov para verificação da suposição de dados normais é maior que 0,15. Sendo assim, não se rejeita a hipótese de normalidade dos dados e podemos prosseguir com o teste sobre a média baseado na distribuição t-Student, que pressupõe normalidade dos dados.

Os valores observados da média e da variância amostrais podem ser calculados a partir dos dados como

$$\overline{x} = \frac{160,3}{14} = 11,45 \qquad s^2 = \frac{1}{13}\left(2230,97 - \frac{160,3^2}{14}\right) = 30,425769$$

ou usando a saída do Minitab como

$$\overline{x} = 11,45 \qquad s^2 = 5,516^2 = 30,426256$$

A diferença é devida a arredondamentos.

$$H_0 : \mu = 12,8$$
$$H_0 : \mu < 12,8$$

$\alpha = 0,05 \Rightarrow t_{13;0,05} = 1,771$

Estatística de teste: $T_0 = \dfrac{\overline{X} - 12,8}{\sqrt{\dfrac{30,425769}{14}}} \sim t_{13}$ sob H_0.

Região crítica: $T_0 < -1,771$

Valor observado da estatística de teste: $t_0 = \dfrac{11,45 - 12,8}{\sqrt{\dfrac{30,425769}{14}}} = -0,91575 > -1,771$

Não há evidências que sugiram, ao nível $\alpha = 0,05$, uma redução no pagamento médio para CEOs.