GET00182 – Estatística II
Aula de exercícios – 13/11/2017 – Profa. Ana Maria Farias

Considerações gerais

Vocês têm que prestar atenção na construção da estatística de teste, que tem que seguir a especificação das hipóteses. Por exemplo, se estamos interessados em testar $\mu_1 < \mu_2$, podemos estabelecer a hipótese alternativa como $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$ ou como $H_1 : \mu_2 - \mu_1 > 0$. No primeiro caso, temos um teste unilateral à esquerda e a estatística de teste se baseia em $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$; no segundo caso, temos um teste unilateral à direita e a estatística de teste se baseia em $\overline{X}_2 - \overline{X}_1$. Se vocês errarem essas associações os resultados estarão todos errados!

O mesmo vale para comparação de variâncias. Se queremos testar $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$, podemos usar a estatística de teste $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ com um teste unilateral inferior para $H_1 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$ ou a estatística de teste $\dfrac{S_2^2}{S_1^2}$ com um teste unilateral superior para $H_1 : \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > 1$. Os graus de liberdade do numerador e do denominador são os graus associados a S_1^2 e S_2^2 e devem ser usados de forma compatível com a estatística de teste.

Certifiquem-se de saber como (e porque) obter a abcissa de uma distribuição F que deixa probabilidade α *abaixo* dela, lembrando que nossa tabela dá os valores críticos, que deixam probabilidade α *acima*.

---

1. De acordo com o Associação Nacional de Diretores de Cemitérios, Nevada e Washington tiveram as mais altas taxas de cremação em 2005. Em pesquisa recente, obtiveram-se amostras aleatórias independentes de mortes nesses dois estados, e registrou-se o número de cremações em cada um. Os dados estão resumidos na tabela que segue.

Estado	Tamanho amostral	Número de cremações
Nevada	544	335
Washington	603	381

   (a) Ache a proporção amostral de cremação para cada estado. Verifique os critérios de simetria.

   (b) Realize o teste de hipótese apropriado para determinar se há alguma evidência de que as duas proporções populacionais sejam diferentes. Use $\alpha = 0,01$.

   (c) Ache o valor P para o teste de hipótese da parte (b).

Solução:

(a) Os números de sucessos (cremações) e de fracassos (não cremação) em ambas as amostras são maiores que 5, e ambas as amostras são grandes. Podemos, assim, usar a aproximação normal.

$$\widehat{p}_N = \frac{335}{544} = 0,6158 \tag{1}$$
$$\widehat{p}_W = \frac{381}{603} = 0,6318 \tag{2}$$

(b)

$$\widehat{p}_N = \widehat{p}_W \tag{3}$$
$$\widehat{p}_N \neq \widehat{p}_W \tag{4}$$

Sob H_0, a estimativa combinada para a verdadeira proporção de cremação é
$\widehat{p}_C = \dfrac{335 + 381}{544 + 603} = 0,624237$

Estatística de teste (ET):

$$Z_0 = \frac{\widehat{P}_N - \widehat{P}_W}{\sqrt{\widehat{P}_C(1-\widehat{P}_C)\left(\frac{1}{544}+\frac{1}{603}\right)}} \approx N();1)$$

Região crítica: $|Z_0| > 2,58$

Valor observado da ET: $z_0 = \dfrac{0,6158 - 0,6318}{\sqrt{0,624237(1-0,624237)\left(\frac{1}{544}+\frac{1}{603}\right)}} = -0,5598$

Não se rejeita H_0; ao nível de significância de 1%, não há evidências de que as taxas de cremação sejam diferentes nos 2 estados.

Valor P: $P = 2\,\mathrm{P}(Z > 0,5598) = 2(1-\Phi(0,56)) = 2(1-0,7123) = 0,5754$

2. Raytheon Aircraft está agora fabricando jatos comerciais com uma fuselagem moldada de fibra de carbono em vez de alumínio. Isso reduz o peso geral do avião, acelera o tempo de produção, e aumenta o espaço da cabine. A espessura total de uma parede de fuselagem de fibra de carbono é 0,81 polegadas versus 3 polegadas para paredes de alumínio, e a variabilidade na espessura é, teoricamente, também muito menor. Obtiveram-se amostras aleatórias independentes dos dois tipos de fuselagem, e mediu-se (em polegadas) a espessura de cada uma. Os dados são apresentados na tabela que segue.

Tipo de fuselagem	Tamanho amostral	Variância amostral
Alumínio	9	0,0196
Fibra de carbono	11	0,0025

Há alguma evidência que sugira que a variabilidade na espessura da fuselagem seja menor para fuselagens de fibra de carbono? Use $\alpha = 0,05$.

Solução:

Temos que assumir que a espessura tem distribuição normal para os 2 tipos de material.

$$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_C^2$$
$$H_1 : \sigma_A^2 > \sigma_C^2$$

Isso é equivalente a

$$H_0 : \frac{\sigma_A^2}{\sigma_C^2} = 1$$
$$H_1 : \frac{\sigma_A^2}{\sigma_C^2} > 1$$

Estatística de teste (ET): $F_0 = \dfrac{S_A^2}{S_C^2} \sim F_{8,10}$

Região crítica: $F_0 > 3,072$ (cauda superior da $F_{8,10}$)

Valor observado da ET: $f_0 = \dfrac{0,0196}{0,0025} = 7,84 > 3,072$

Rejeita-se H_0; há evidência, ao nível de 5%, de que a variabilidade na espessura seja maior para fuselagens de alumínio.

Valor P: $P = \mathrm{P}(F_{8,10} > 7,84 = 1 - 0,998086 = 0,001914$ (Minitab)

Invertendo a razão:

$$H_0 : \sigma_C^2 = \sigma_A^2$$
$$H_1 : \sigma_C^2 < \sigma_A^2$$

equivalente a

$$H_0 : \frac{\sigma_C^2}{\sigma_A^2} = 1$$
$$H_1 : \frac{\sigma_C^2}{\sigma_A^2} < 1$$

Estatística de teste: $F_0 = \dfrac{S_C^2}{S_A^2} \sim F_{10,8}$

Região crítica: $F_0 < F_{10,8;0,95} = \dfrac{1}{F_{8,10;0,05}} = \dfrac{1}{3,072} = 0,3255$ (cauda inferior da $F_{10,8}$)

Valor observado da ET: $f_0 = \dfrac{0,0025}{0,0196} = 0,12755 < 0,3255$

A conclusão, naturalmente, é a mesma obtida anteriormente.

Valor P $P = \mathrm{P}(F_{10,8} < 0,12755) = 0,001914$ (Minitab)

3. O Departamento Transporte americano exige que veículos que transportam material perigoso indiquem o tipo da carga. Há muitas outras regulamentações relativas a contêineres, separação de vários materiais, e peso bruto. Amostras aleatórias independentes de caminhões que carregavam materiais corrosivos foram paradas nas estradas da Carolina do Norte e da Virginia, e o peso (em kg) do material perigoso foi registrado. As estatísticas-resumo e as variâncias conhecidas são apresentadas na tabela que segue.

Estado	Tamanho amostral	Média amostral	Variância populacional
Carolina do Norte	22	835,6	3192,25
Virgínia	25	884,2	3956,41

Há alguma evidência que sugira que a quantidade média de material corrosivo carregado por caminhões na Carolina do Norte seja diferente da quantidade média de material corrosivo carregado por caminhões na Virgínia? Use $\alpha = 0,01$ e admita que cada distribuição subjacente de pesos seja normal.

Solução:

Pelo enunciado do problema, podemos admitir que as condições de normalidade são atendidas para ambas as populações.

$$H_0 : \mu_C = \mu_V$$
$$H_1 : \mu_C \neq \mu_V$$

Estatística de teste (ET):

$$Z_0 = \frac{\overline{X}_C - \overline{X}_V}{\sqrt{\dfrac{3192,25}{22} + \dfrac{3956,41}{25}}} \sim N(0;1) \qquad \text{sob } H_0$$

Região crítica: $|Z_0| > 2,58$

Valor observado da ET: $z_0 = \dfrac{835,6 - 884,2}{\sqrt{\dfrac{3192,25}{22} + \dfrac{3956,41}{25}}} = -2,79 < -2,58$

Rejeita-se H_0; há evidência, ao nível de 1%, de que os pesos médios do material corrosivo carregado nos 2 estados sejam diferentes.

Valor P: $P = 2\,\mathrm{P}(Z > 2,79) = 2(1 - \Phi(2,79)) = 2(1 - 0,9974) = 0,0052$

4. Alguns pesquisadores afirmam que a música pode ser relaxante e, portanto, pode reduzir o estresse. Foram selecionados aleatoriamente 12 pacientes que diziam estar sofrendo de estresse relacionado ao trabalho. Obteve-se uma taxa inicial de pulsação (em batimentos por minuto, bpm) em repouso e cada pessoa participou de um programa de audição de música para terapia de relaxamento durante um mês. Ao final do experimento, tomou-se a taxa final de pulsação em repouso. Os dados são apresentados na tabela que segue.

Sujeito	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Taxa inicial	67	71	67	83	70	75	71	68	72	88	78	70
Taxa final	61	72	70	76	58	61	74	59	61	64	71	77

Há alguma evidência que sugira que o programa de audição de música para terapia de relaxamento tenha reduzido a taxa média de pulsação e, portanto, reduzido o nível de estresse? Admita que as distribuições subjacentes de taxas de pulsação iniciais e finais sejam normais, e use $\alpha = 0,05$.

Solução:

Aqui estamos no contexto de dados emparelhados; temos duas medições de batimentos nos mesmos sujeitos, antes e depois da terapia musical. Sendo assim, temos que trabalhar com a amostra aleatória das diferenças, calculadas para cada sujeito. Vamos calcular a diferença "antes-depois".

Sujeito i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Diferença d_i	6	-1	-3	7	12	14	-3	9	11	24	7	-7

$$\sum_{i=1}^{12} d_i = 76 \Rightarrow \overline{d} = 6,33333$$

$$\sum_{i=1}^{12} d_i^2 = 1320 \Rightarrow s_D^2 = \frac{1}{11}\left(1320 - \frac{76^2}{12}\right) = 76,2424$$

$$H_0 : \mu_D = 0$$
$$H_1 : \mu_D > 0$$

Estatística de teste (ET):

$$T_0 = \frac{\overline{D} - 0}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}} \sim t_{n-1} \qquad \text{sob } H_0$$

Região crítica: $T_0 > 1,796$

Valor observado da ET: $t_0 = \dfrac{6,3333}{\sqrt{\dfrac{76,2424}{12}}} = 2,5126 > 1,796$

Rejeita-se H_0; há evidências de que as taxas de batimentos depois da terapia musical sejam menores, mas note que não podemos concluir que a terapia musical "causou" essa diminuição, uma vez que não foi feito uma planejamento controlado para excluir outros fatores.

Valor P: $P = \mathrm{P}(t_{11} > 2,5123) = 1 - 0,985566 = 0,014434$

5. Para ajudar os lojistas em seu planejamento, a cada ano se realiza um estudo para se determinar quanto as pessoas pretendem gastar com presentes nas festas de fim de ano. Em uma pesquisa de novembro de 2008, obteve-se uma amostra de compradores e lhes foi pedido que estimassem a quantia que pretendiam gastar (em dólares) com presentes. A média amostral dos gastos antecipada foi relatada por gênero, grupo de idade, e nível de renda. Considere as estatísticas-resumo dadas na tabela que segue.

Grupo	Tamanho amostral	Média amostral	Desvio padrão amostral
Homens	27	784,00	37,50
Mulheres	25	652,00	29,90

Historicamente, os homens relatam gastos maiores do que os das mulheres. Com base nos dados de 2008, há alguma evidência que sugira que a quantidade média que os homens pretendem gastar seja maior do que a quantidade média que as mulheres pretendem gastar? Use $\alpha = 0,001$, e admita que as populações sejam normais, com variâncias iguais.

Solução:

Do enunciado do problema, concluímos que temos amostras independentes de duas populações normais com variâncias iguais.

$$H_0 : \mu_H = \mu_M$$
$$H_1 : \mu_H > \mu_M$$

Com o pressuposto de variâncias iguais, estimamos a variância populacional comum dos gastos por S_C^2.
Estatística de teste:

$$T_0 = \frac{\overline{X}_H - \overline{X}_M}{\sqrt{S_C^2 \left(\frac{1}{n_H} + \frac{1}{n_M}\right)}} \sim t_{27+25-2}$$

Região crítica: $T_0 > 3,2614$ (por software) ou $T_0 > 3,08$ (pela aproximação normal)

$$s_C^2 = \frac{26 \times 37,5^2 + 24 \times 29,9^2}{27 + 25 - 2} = 1160,375$$

Valor observado da ET: $t_0 = \dfrac{784 - 652}{\sqrt{1160,375 \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{25}\right)}} = 13,96 > 3,2614 > 3,08$

Rejeita-se H_0; há evidências de que os homens relatam gastos maiores do que as mulheres.

Valor P: $P = \mathrm{P}(t_{50} > 13,96) \approx 0$

6. Uma companhia que fabrica mobília hospitalar tem duas linhas de montagem dedicadas ao corte e furação de armários médicos. Cada processo, controlado por computador, é projetado para fazer furos em certa parte do armário com profundidade de 12,7 mm. Obtiveram-se amostras aleatórias independentes de furos das duas linhas de montagem cujos dados estão a seguir.

Furo	Linha 1	Linha 2
1	11,79	12,96
2	12,42	13,13
3	12,66	12,63
4	12,69	12,50
5	12,79	12,98
6	12,54	12,27
7	12,60	13,25
8	12,44	12,91
9	12,45	12,96
10	12,91	13,04
11	12,45	12,94
12	12,63	12,70
13	12,71	12,52
14	11,96	12,64
15	13,50	12,76
16	12,45	12,90
$\sum x_i$	200,99	205,09
$\sum x_i^2$	2526,9497	2629,8737
Teste K-S	$P = 0,229$	$P = 0,187$

(a) Há alguma evidência que sugira que a Linha 2 esteja produzindo furos com profundidade média populacional maior do que a Linha 1? Faça o teste apropriado com base em suposições corretas sobre as variâncias populacionais. Use $\alpha = 0,05$.

(b) Ache limites para o valor P associado a esse teste de hipótese.

Solução:

$X_1 =$ " profundidade dos furos na linha de produção 1"

$X_2 =$" profundidade dos furos na linha de produção 2"

Temos aas independentes de X_1 e X_2, cada uma com 16 observações. Os valores P para o teste de Kolmogorov-Smirnov são $P_1 = 0,229$ e $P_2 =,187$. Sendo assim, para ambos os casos, não se rejeita a hipótese de normalidade dos dados, e podemos supor que as amostras venham de populações normais.

Queremos testar

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 &: \mu_2 > \mu_1 \end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_2 - \mu_1 = 0 \\ H_1 &: \mu_2 - \mu_1 > 0 \end{aligned}$$

- Solução 1: supor variâncias desconhecidas e diferentes

  Estatística de teste: $T_0 = \dfrac{\overline{X}_2 - \overline{X}_1}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} \approx t_\nu \qquad \nu = \min(n_1 - 1, n_2 - 1)$

  Região crítica: $T_0 > 1,697$

  Note que

$$\overline{x}_1 = \frac{200,99}{16} = 12,561875 \qquad s_1^2 = \frac{1}{15}\left(2526,9497 - \frac{200,99^2}{16}\right) = 0,142563$$

$$\overline{x}_2 = \frac{205,09}{16} = 12,818125 \qquad s_2^2 = \frac{1}{15}\left(2629,8737 - \frac{205,09^2}{16}\right) = 0,066963$$

  Valor observado da ET: $t_0 = \dfrac{12,818125 - 12,561875}{\sqrt{\dfrac{0,145563}{16} + \dfrac{0,066963}{16}}} = 2,2393$

  Rejeita-se H_0; há evidências de que a profundidade média dos furos produzidos na linha 2 seja maior que a profundidade média dos furos produzidos na linha 1.

  Valor P:

$$P = \mathrm{P}(t_{15} > 2,2393) = 0,020358 \text{ (Minitab)}$$

$$2,131 < 2,2393 < 2,249 \Rightarrow 0,02 < P < 0,025 \text{ (pela tabela)}$$

- Solução 2: testar igualdade de variâncias para decidir o tipo de teste t

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 &: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{aligned}$$

  Estatística de teste: $F_0 = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{15,15}$ sob H_0

  Região crítica: $F_0 > 2,862 \qquad$ ou $\qquad F_0 < \dfrac{1}{2,862} = 0,349$

  Valor observado da ET: $f_0 = \dfrac{0,142563}{0,066963} = 2,129$

  Valor P: $P = 2\,\mathrm{P}(F_{15,15} > 2,129) = 2(1 - 0,922609) = 0,154782$ (Minitab)

  Como $0,349 < 2,129 < 2,862$ ou P grande, não se rejeita a hipótese de igualdade de variâncias e podemos usar o teste t combinado.

  $s_C^2 = \dfrac{0,142563 + 0,066963}{2} = 0,104763 \quad (n_1 = n_2 = 16)$

  Estatística de teste: $T_0 = \dfrac{\overline{X}_2 - \overline{X}_1}{\sqrt{S_C^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} \approx t_{n_1+n_2-2}$

Região crítica: $T_0 > 1,697$

Valor observado da ET: $t_0 = \dfrac{12,818125 - 12,561875}{\sqrt{0,104763 \cdot \dfrac{2}{16}}} = 2,239 > 1,697$

Como $n_1 = n_2$, os valores da estatística de teste são iguais nas 2 soluções; o que muda são os graus de liberdade.

Como antes, rejeitamos H_0.

Valor P: $P = \mathrm{P}(t_{30} > 2,239) = 0,016351$ pelo Minitab. Pela tabela, podemos dizer apenas que $0,01 < P < 0,02$.

7. Em 2007, houve 1.095.769 roubos de carro nos estados Unidos, um aumento de 1,1 por cento em relação ao ano anterior. A despeito dessa tendência, muitas pessoas ainda deixam seus carros destrancados. Em uma amostra aleatória de 200 homens, 110 disseram que, usualmente, deixavam seus carros destrancados, e em uma amostra de 250 mulheres, 120 disseram deixar seus carros destrancados. Há alguma evidência que sugira que a proporção de homens que deixam seus carros destrancados seja diferente da proporção de mulheres que fazem o mesmo? Use $\alpha = 0,05$.

   Solução:

   Podemos resumir os dados em uma tabela 2×2 e a partir dessa tabela fica fácil verificar que as condições para a aproximação normal são satisfeitas: amostras grandes (200 homens e 250 mulheres), números de sucessos (trancam carro) e fracasso (não trancam carro) maiores que 5 para ambas populações.

	H	M	
T	90	130	220
$\overline{T}$	110	120	230
Total	200	250	450

$$H_0 : p_H = p_M$$
$$H_1 : p_H \neq p_M$$

Estatística de teste:

$$Z_0 = \frac{\overline{P}_H - \overline{P}_M}{\sqrt{\overline{P}_C(1 - \overline{P}_C)\left(\dfrac{1}{n_H} + \dfrac{1}{n_M}\right)}} \approx N(0;1) \qquad \text{sob } H_0$$

Região crítica: $|Z_0| > 1,96$

$$\overline{p}_H = \frac{110}{200} = 0,55 \qquad \overline{p}_M = \frac{120}{250} = 0,48$$

$$\overline{p}_C = \frac{110 + 120}{450} = 0,511111$$

Valor observado da ET: $Z_0 = \dfrac{0,55 - 0,48}{\sqrt{0,511111(1 - 0,511111)\left(\dfrac{1}{200} + \dfrac{1}{250}\right)}} = 1,4761$

Como $|1,4761| < 1,96$, não se rejeita H_0; não há evidência de que a proporção de homens que não trancam o carro seja diferente da proporção de mulheres que também não trancam o carro.

Valor P: $P = 2\,\mathrm{P}(Z > 1,4761) = 2(1 - \Phi(1,48)) = 2(1 - 0,9306) = 0,1388$