Universidade Federal Fluminense

Instituto de Matemática e Estatística

Departamento de Estatística

Inferência para Duas Populações

Ana Maria Lima de Farias

Fábio Nogueira Demarqui

Departamento de Estatística

Março 2017

Sumário

Capítulo 1

Inferência com Amostras Independentes

Vamos considerar, inicialmente, o caso de termos amostras *independentes* de duas populações normais. Como no caso de uma população, vamos começar com a situação simplificada em que as variâncias populacionais são conhecidas e nosso interesse está na inferência sobre as médias populacionais. Em seguida, faremos inferência sobre as variâncias populacionais para, finalmente, considerarmos o caso geral em que tanto as médias como as variâncias populacionais são desconhecidas.

1.1 Introdução

É muito comum encontrarmos, na prática, situações em que o objetivo é comparar dois grupos diferentes. Será que meninos e meninas do ensino médio gastam o mesmo número de horas por semana navegando na internet? O desempenho de alunos em um exame nacional melhora depois que eles realizam um curso preparatório? Irmãos gêmeos respondem da mesma forma a um determinado estímulo? A proporção de pessoas favoráveis a determinado projeto de um governo estadual é a mesma na zona urbana e na zona rural?

Em todos esses exemplos, queremos comparar duas populações: meninos e meninas, alunos antes e depois do curso preparatório, irmãos gêmeos, zona urbana e zona rural. Como no caso de uma população, tomaremos nossas decisões com base em amostras aleatórias simples retiradas dessas populações. Mas podemos ver, nesses exemplos, duas situações diferentes: quando comparamos irmãos gêmeos ou alunos antes e depois de um curso preparatório e quando comparamos meninos e meninas do ensino médio ou zonas urbana e rual. No primeiro caso, há uma dependência entre as amostras, o que não ocorre no segundo caso.

1.2 Definições e notação

No estudo da inferência para uma população, vimos que a suposição de termos uma amostra aleatória simples da população de interesse era fundamental para o desenvolvimento dos estimadores e estatísticas de teste. Nos problemas de inferência a partir de duas amostras não é diferente, mas temos que nos preocupar também com possíveis relações entre as populações e/ou amostras.

Sejam duas populações representadas pelas variáveis aleatórias X_1 e X_2 e sejam $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$ e $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ amostras aleatórias simples de tamanhos n_1 e n_2 retiradas dessas populações. Neste capítulo, estudaremos apenas amostras *independentes*, cuja definição é dada a seguir..

DEFINIÇÃO **Amostras Independentes**

As amostras são *independentes* se o processo de seleção dos indivíduos ou objetos na amostra 1 não tem qualquer efeito sobre, ou qualquer relação com, a seleção dos indivíduos ou objetos na amostra 2. Se as amostras não são independentes, elas são *dependentes*.

Na Tabela 1.1 apresentamos a notação que será utilizada referente aos parâmetros dessas populações e seus respectivos estimadores. Assim como no caso de uma população, vamos assumir que as populações sejam normais.

Tabela 1.1 – Notação: Inferência para duas populações

População	Parâmetros		Amostra	Estatística Amostral		Valores observados	
	Média	Variância		Média	Variância	Média	Variância
$X_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1^2)$	μ_1	σ_1^2	$X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$	$\overline{X}_1$	S_1^2	$\overline{x}_1$	s_1^2
$X_2 \sim N(\mu_2; \sigma_2^2)$	μ_2	σ_2^2	$X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$	$\overline{X}_2$	S_2^2	$\overline{x}_2$	s_2^2

1.3 Inferência sobre médias de duas populações normais com variâncias conhecidas

Como no caso de uma população, vamos considerar, inicialmente, o caso de amostras *independentes* de duas populações normais cujas variâncias são conhecidas. Assim, nosso interesse está na inferência sobre as médias populacionais e tal inferência se baseará nas médias amostrais, sobre as quais sabemos que

$$\overline{X}_1 \sim N\left(\mu_1; \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right) \qquad \overline{X}_2 \sim N\left(\mu_2; \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Como estamos supondo que as amostras são independentes, resulta que $\overline{X}_1$ e $\overline{X}_2$ são independentes. Logo,

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2; \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \tag{1.1}$$

ou equivalentemente,

$$\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0; 1) \tag{1.2}$$

1.3.1 Intervalo de confiança para $\mu_1 - \mu_2$

Temos, a partir de (1.2), que

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Logo,

$$P\left((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

o que nos dá o seguinte intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para $\mu_1 - \mu_2$.

$$\left((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}; (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) \tag{1.3}$$

Note que os limites são variáveis aleatórias e, assim, faz sentido falar que a probabilidade é $1-\alpha$. Isso significa que se repetirmos várias vezes o processo de amostragem e subsequente construção do intervalo de confiança correspondente, "acertaremos" em $100(1-\alpha)\%$ das vezes, ou seja, o intervalo conterá o verdadeiro parâmetro $\mu_1 - \mu_2$.

Para uma amostra específica, o intervalo de confiança é

$$\left((\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}; (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) \tag{1.4}$$

e esse intervalo ou contém, ou não contém o verdadeiro parâmetro. Não faz sentido dizer que o intervalo dado em (1.4) contém o parâmetro com probabilidade $1-\alpha$. O que podemos dizer é que o método de obtenção dos intervalos garante uma probabilidade de acerto de $1-\alpha$.

1.3.2 Teste de hipótese sobre $\mu_1 - \mu_2$

Vamos, agora, estabelecer os procedimentos para o teste de hipóteses referentes à diferença entre as médias, de maneira análoga ao caso de uma população. Nosso objetivo, então, é testar [1]

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \tag{1.5}$$

As hipóteses alternativas possíveis são:

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0 \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$$

O procedimento de teste consiste em rejeitar a veracidade da hipótese nula H_0 sempre que obtivermos valores da estatística de teste com pequenas probabilidades de ocorrência sob H_0. Para o teste de hipótese sobre a diferença de médias de populações normais com variâncias conhecidas, a estatística de teste é dada em (1.2) e probabilidades pequenas correspondem à cauda da distribuição normal. Lembrando que sob H_0, $\mu_1 - \mu_2 = 0$, isso nos leva às seguintes regras de decisão para um nível de significância α (lembre-se que $\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira})$:

[1] É possível trabalhar com hipóteses mais gerais envolvendo uma diferença Δ_0, mas os procedimentos são análogos.

- Hipótese nula e estatística de teste

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$Z_0 = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \underbrace{\sim}_{\text{sob } H_0} N(0,1)$$

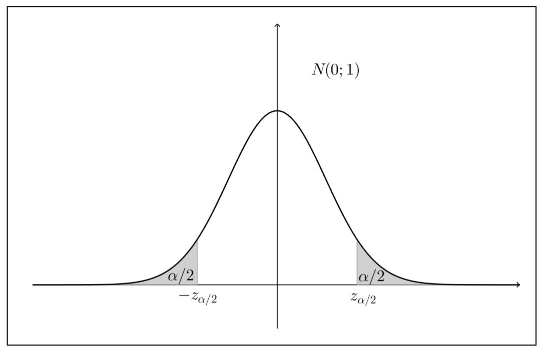
$$z_0 = \text{valor observado de } Z_0$$

- Teste bilateral

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Região crítica:
$|Z_0| > z_{\alpha/2}$

Valor P :
$P = 2 \cdot \mathrm{P}(Z > |z_0|)$

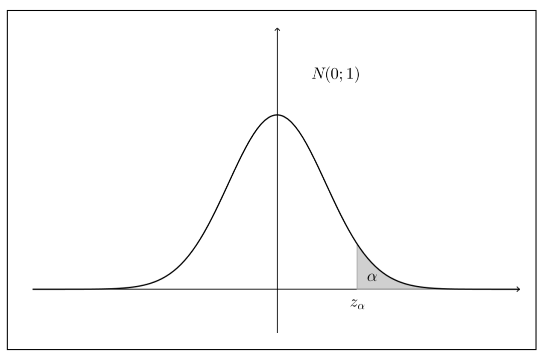


- Teste unilateral à direita

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$

Região crítica:
$Z_0 > z_\alpha$

Valor P :
$P = \mathrm{P}(Z > z_0)$

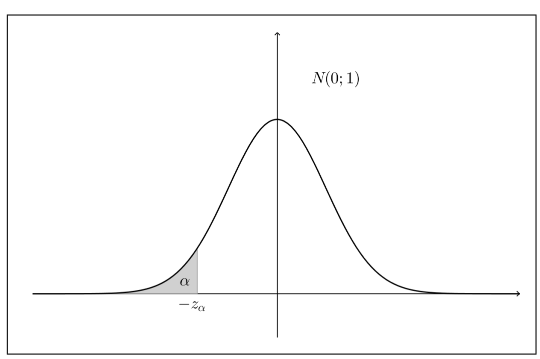


- Teste unilateral à esquerda

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$

Região crítica:
$Z_0 < -z_\alpha$

Valor P :
$P = \mathrm{P}(Z > |z_0|)$



1.3.3 Poder do teste e tamanho de amostra

No mesmo contexto da subseção anterior, vamos considerar o teste da hipótese de igualdade de médias, que é equivalente a

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \tag{1.6}$$

e calcular o seu poder quando

$$\mu_1 - \mu_2 = \Delta$$

Teste bilateral

Considerando a regra de decisão vista acima, o poder do teste pode ser escrito em função de Δ como

$$\begin{aligned}
\pi(\Delta) &= \mathrm{P}(\text{rejeitar } H_0 \,|\, \Delta) = 1 - \mathrm{P}\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq z_{\alpha/2} \,|\, \Delta\right) \\
&= 1 - \mathrm{P}\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - \Delta + \Delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq z_{\alpha/2} \,|\, \Delta\right) \\
&= 1 - \mathrm{P}\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq Z \leq z_{\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right) \Longrightarrow
\end{aligned}$$

$$\pi(\Delta) = 1 - \left[\Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right)\right] \tag{1.7}$$

Assim como no caso de uma população, é possível determinar o tamanho da amostra necessário para se ter um poder π^* na detecção de uma diferença Δ^*, desde que se trabalhe com amostras de *mesmo* tamanho n. Nesse caso, temos

$$\pi(\Delta) = 1 - \left[\Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}}}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}}}\right)\right]$$

Se queremos $\pi(\Delta^*) = \pi^*$ com $\Delta^* > 0$, então $\Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\Delta^*}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{n}}}\right) \approx 0$, o que resulta em

$$\pi(\Delta^*) = \pi^* \approx 1 - \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\Delta^*}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}}}\right) \Rightarrow \pi^* \approx \mathrm{P}\left(Z > z_{\alpha/2} - \frac{\Delta^*}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}}}\right) \Longrightarrow$$

$$z_{\pi^*} \approx z_{\alpha/2} - \frac{\Delta^*}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}}} \Longrightarrow \sqrt{n} \approx \frac{z_{\alpha/2} - z_{\pi^*}}{\Delta^*}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \Longrightarrow$$

$$n \approx \frac{\left(z_{\alpha/2} - z_{\pi^*}\right)^2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}{(\Delta^*)^2} \tag{1.8}$$

Se $\Delta^* < 0$, então $\Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\Delta^*}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{n}}}\right) \approx 1$, o que resulta em

$$\pi(\Delta^*) = \pi^* \approx \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\Delta^*}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}}}\right) = \mathrm{P}\left(Z > z_{\alpha/2} + \frac{\Delta^*}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}}}\right) \Longrightarrow$$

$$z_{\pi^*} \approx z_{\alpha/2} + \frac{\Delta^*}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}}} \Longrightarrow \sqrt{n} \approx \frac{z_{\pi^*} - z_{\alpha/2}}{\Delta^*}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

e isso nos leva à mesma expressão para n dada em (1.8).

Teste unilateral à direita

Considerando a regra de decisão vista acima, o poder do teste pode ser escrito em função de $\Delta > 0$ como

$$\begin{aligned}
\pi(\Delta) &= \mathrm{P}(\text{rejeitar } H_0 \,|\, \Delta) = \mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > z_\alpha \,|\, \Delta\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \Delta + \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > z_\alpha \,|\, \Delta\right) = \mathrm{P}\left(Z > z_\alpha - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right) \Longrightarrow
\end{aligned}$$

$$\pi(\Delta) = 1 - \Phi\left(z_\alpha - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right) \tag{1.9}$$

Se queremos determinar o tamanho comum das amostras necessário para se ter um poder π^* na detecção de uma diferença $\Delta^* > 0$, então temos que ter

$$\pi(\Delta^*) = \pi^* = \mathrm{P}\left(Z > z_\alpha - \frac{\Delta^*}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}}} \right) \Longrightarrow z_{\pi^*} = z_\alpha - \frac{\Delta^*}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}}}$$

o que resulta em

$$n \approx \frac{(z_\alpha - z_{\pi^*})^2 \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)}{(\Delta^*)^2} \tag{1.10}$$

Teste unilateral à esquerda

O poder do teste pode ser escrito em função de $\Delta < 0$ como

$$\begin{aligned}
\pi(\Delta) &= \mathrm{P}(\text{rejeitar } H_0 \,|\, \Delta) = \mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} < -z_\alpha \,|\, \Delta \right) \\
&= \mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \Delta + \Delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} < -z_\alpha \,|\, \Delta \right) = \mathrm{P}\left(Z < -z_\alpha - \frac{\Delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \right) \\
&= \mathrm{P}\left(Z > z_\alpha + \frac{\Delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \right) \Longrightarrow
\end{aligned}$$

$$\pi(\Delta) = 1 - \Phi\left(z_{\alpha/2} + \frac{\Delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \right) \tag{1.11}$$

Se queremos determinar o tamanho comum das amostras necessário para se ter um poder π^* na detecção de uma diferença $\Delta^* > 0$, então temos que ter

$$\pi(\Delta^*) = \pi^* = \mathrm{P}\left(Z > z_\alpha + \frac{\Delta^*}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}}} \right) \Longrightarrow z_{\pi^*} = z_\alpha + \frac{\Delta^*}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}}}$$

o que resulta em

$$n \approx \frac{(z_{\pi^*} - z_\alpha)^2 \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)}{(\Delta^*)^2} \tag{1.12}$$

mesma expressão obtida para o teste unilateral à direita.

1.4 Inferência sobre duas proporções - amostras grandes

Consideremos, agora,o caso em que nosso interesse está na comparação de duas proporções. Isso significa que nossas duas populações são descritas por variáveis Bernoulli, ou seja, $X_1 \sim Bern(p_1)$ e $X_2 \sim Bern(p_2)$ respectivamente. Se $X_{11}, X_{12}, \cdots, X_{1n_1}$ e $X_{21}, X_{22}, \cdots, X_{2n_2}$ são amostras grandes dessas populações , o Teorema Limite Central nos dá que

$$\overline{X}_1 = \widehat{P}_1 \approx N\left(p_1; \frac{p_1(1-p_1)}{n_1}\right) \qquad \widehat{P}_2 \approx N\left(p_2; \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

Se as amostras forem independentes, resulta que

$$\widehat{P}_1 - \widehat{P}_2 \approx N\left(p_1 - p_2; \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right) \tag{1.13}$$

sendo essa aproximação melhor se $n_1 > 30$, $n_1 p_1 \geq 5$, $n_1(1-p_1) \geq 5$, $n_2 > 30$, $n_2 p_2 \geq 5$ e $n_2(1-p_2) \geq 5$.

1.4.1 Intervalo de confiança para $p_1 - p_2$

Satisfeitas as condições de grandes amostras e simetria, resulta de 1.13 que

$$\mathrm{P}\left(-z_{\alpha/2} < \frac{(\widehat{P}_1 - \widehat{P}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} < z_{\alpha/2}\right) \cong 1 - \alpha$$

Logo,

$$\mathrm{P}\left((\widehat{P}_1 - \widehat{P}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} < (p_1 - p_2) < (\widehat{P}_1 - \widehat{P}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right) \cong 1 - \alpha$$

Como no caso univariado, estimamos a variância a partir da amostra, o que nos dá o seguinte intervalo de confiança de nível de confiança aproximadamente igual a $1 - \alpha$:

$$\left(\widehat{P}_1 - \widehat{P}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{P}_1(1-\widehat{P}_1)}{n_1} + \frac{\widehat{P}_2(1-\widehat{P}_2)}{n_2}}\,;\, \widehat{P}_1 - \widehat{P}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{P}_1(1-\widehat{P}_1)}{n_1} + \frac{\widehat{P}_2(1-\widehat{P}_2)}{n_2}}\right)$$

1.4.2 Teste de hipótese sobre $p_1 - p_2$

Consideremos o teste da hipótese da hipótese nula

$$H_0 : p_1 = p_2$$

contra uma das alternativas

$$H_1 : p_1 \neq p_2 \qquad H_1 : p_1 > p_2 \qquad H_1 : p_1 < p_2$$

O teste de grandes amostras se baseia na estatística dada em (1.13). Mas, sob H_0, $p_1 = p_2 = p$ e a variância de $\widehat{P}_1 - \widehat{P}_2$ nesse caso é

$$\sigma^2_{\widehat{P}_1 - \widehat{P}_2} = \frac{p(1-p)}{n_1} + \frac{p(1-p)}{n_2} = p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

e, sob H_0,

$$Z_0 = \frac{(\widehat{P}_1 - \widehat{P}_2)}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \approx N(0;1) \tag{1.14}$$

Como as amostras vêm de populações com a mesma proporção p, podemos usar as amostras combinadas para estimar p, definindo o estimador combinado

$$\widehat{P}_C = \frac{\text{número total de sucessos nas 2 amostras}}{n_1 + n_2} = \frac{U_1 + U_2}{n_1 + n_2} \tag{1.15}$$

em que $U_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$ é o número de sucessos na amostra i.

Esse estimador pode ser reescrito como

$$\widehat{P}_C = \frac{U_1 + U_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1\widehat{P}_1 + n_2\widehat{P}_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1}{n_1 + n_2}\widehat{P}_1 + \frac{n_2}{n_1 + n_2}\widehat{P}_2 \tag{1.16}$$

que é uma média ponderada das proporções amostrais $\widehat{P}_1$ e $\widehat{P}_2$.

Usando (1.14) e (1.16), chegamos às seguintes regras de decisão para um nível de significância α:

- Hipótese nula e estatística de teste

$$H_0 : p_1 - p_2 = 0$$

$$Z_0 = \frac{(\widehat{P}_1 - \widehat{P}_2)}{\sqrt{\widehat{P}_C(1 - \widehat{P}_C)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \approx N(0;1)$$

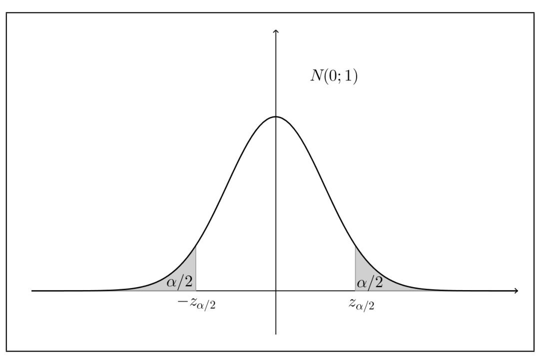
$$z_0 = \text{valor observado de } Z_0$$

- Teste bilateral

$H_1 : p_1 - p_2 \neq 0$

Região crítica:
$|Z_0| > z_{\alpha/2}$

Valor P :
$P = 2 \cdot \mathrm{P}(Z > |z_0|)$

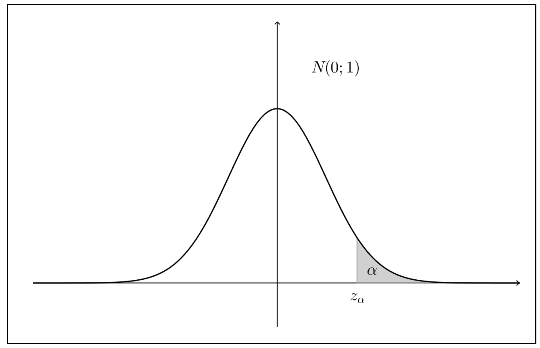


- Teste unilateral à direita

$H_1 : p_1 - p_2 > 0$

Região crítica:
$Z_0 > z_\alpha$

Valor P :
$P = \text{P}(Z > z_0)$

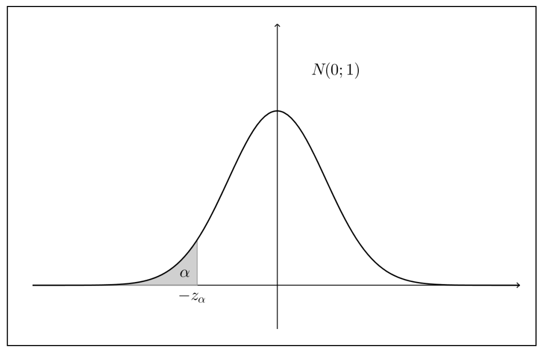


- Teste unilateral à esquerda

$H_1 : p_1 - p_2 < 0$

Região crítica:
$Z_0 < -z_\alpha$

Valor P :
$P = \text{P}(Z > |z_0|)$



Para o caso geral em que $H_0 : p_1 - p_2 = \Delta_0$, com $\Delta_0 \neq 0$, o teste se baseia na estatística

$$Z_0 = \frac{(\widehat{P}_1 - \widehat{P}_2) - \Delta_0}{\sqrt{\dfrac{\widehat{P}_1\left(1-\widehat{P}_1\right)}{n_1} + \dfrac{\widehat{P}_2\left(1-\widehat{P}_2\right)}{n_2}}} \approx N(0;1)$$

que leva à região crítica e ao valor P análogos aos vistos anteriormente. A diferença aqui é que não podemos usar o estimador combinado.

1.5 Inferência sobre variâncias de duas populações normais

1.5.1 A Distribuição F

No estudo comparativo de variâncias de populações normais, faremos uso da distribuição F, assim denominada em homenagem ao estatístico Ronald Fisher (1890-1962), e cuja função densidade é

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \frac{x^{\frac{\nu_1-2}{\nu_2}}}{\left(1+\dfrac{\nu_1 x}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}} \qquad x > 0 \tag{1.17}$$

Essa distribuição depende dos dois parâmetros, ν_1 e ν_2 e usaremos a notação $X \sim F_{\nu_1,\nu_2}$ para indicar que a variável aleatória X tem distribuição F com parâmetros ν_1 e ν_2. Os parâmetros da distribuição F

são chamados graus de liberdade do numerador e do denominador, respectivamente. Temos os seguintes resultados sobre a média e a variância dessa distribuição:

$$X \sim F_{\nu_1,\nu_2} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{E}(X) = \dfrac{\nu_2}{\nu_2 - 2} & \text{se } \nu_2 > 2 \\ \\ \mathrm{Var}(X) = \dfrac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)} & \text{se } \nu_2 > 4 \end{cases} \tag{1.18}$$

O teorema a seguir será fundamental na inferência sobre variâncias de duas populações normais.

TEOREMA 1.1 ***Sejam U e V duas variáveis aleatórias independentes tais que $U \sim \chi^2_n$ e $V \sim \chi^2_m$. Então***

$$W = \frac{U/n}{V/m} \sim F_{n,m} \tag{1.19}$$

Assim, os graus de liberdade da distribuição F referem-se aos graus de liberdade das duas variáveis qui-quadrado.

▼

Na Figura 1.1 temos o gráfico da distribuição F com $\nu_1 = 5$ graus de liberdade no numerador e $\nu_2 = 5, 10, 40$ graus de liberdade no denominador. Na Figura 1.2 fixa-se $\nu_2 = 5$ e varia-se $n_1 = 5, 10, 40$.

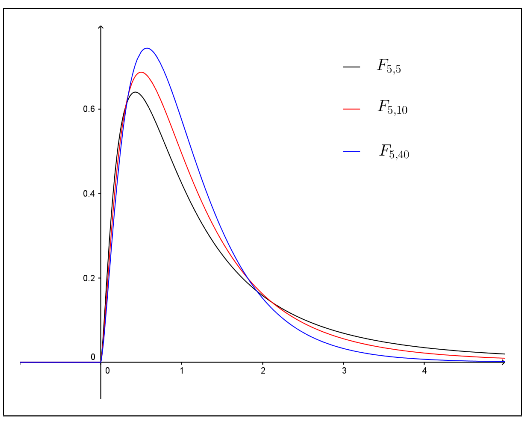


Figura 1.1 – F_{ν_1,ν_2} : $\nu_1 = 5$; $\nu_2 = 5, 10, 40$

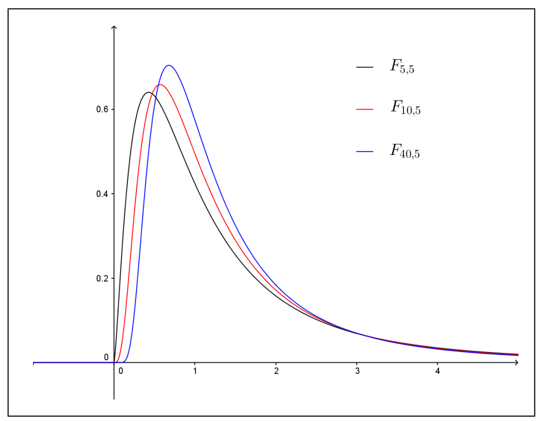


Figura 1.2 – F_{ν_1,ν_2} : $\nu_1 = 5, 10, 40$; $\nu_2 = 5$

Vamos denotar por $F_{n,m;\alpha}$ o valor crítico da distribuição $F_{n,m}$, isto é

$$\mathrm{P}(F_{n,m} \geq F_{n,m;\alpha}) = \alpha \tag{1.20}$$

Na Figura 1.3 ilustra-se o conceito do valor crítico de uma distribuição F e nas Tabelas 3 e 4 ao final dessa apostila exibem-se tais valores críticos para $\alpha = 0,05$ e $\alpha = 0,025$ com graus de liberdade específicos. Programas estatísticos devem ser usados para se calcular um valor crítico qualquer.

Uma propriedade importante dos valores críticos da distribuição F é a seguinte. Seja $k = F_{n,m;\alpha}$; logo,

$$\mathrm{P}(F_{n,m} > k) = \alpha \Leftrightarrow \mathrm{P}\left(\frac{1}{F_{n,m}} < \frac{1}{k}\right) = \alpha \Leftrightarrow \mathrm{P}\left(\frac{1}{F_{n,m}} \geq \frac{1}{k}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{\dfrac{\chi^2_n/n}{\chi^2_m/m}} \geq \frac{1}{k}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow \mathrm{P}\left(\frac{\chi^2_m/m}{\chi^2_n/n} \geq \frac{1}{k}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow \mathrm{P}\left(F_{m,n} \geq \frac{1}{k}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{k} = F_{m,n;1-\alpha}$$

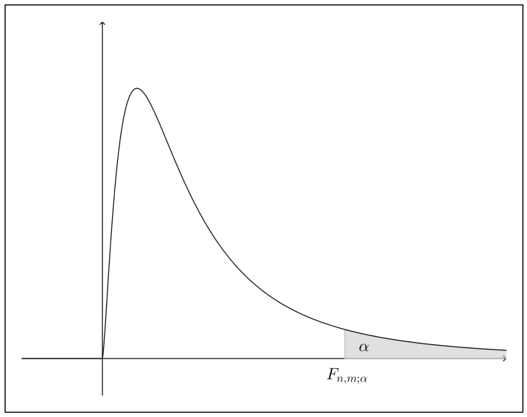


Figura 1.3 – Valor crítico da distribuição $F_{n,m}$

Resulta, assim, que

$$F_{n,m;\alpha} = \frac{1}{F_{m,n;1-\alpha}} \tag{1.21}$$

EXEMPLO 1.1

Vamos determinar k tal que $\mathrm{P}(F_{5,10} < k) = 0,05$.

Solução

$$\mathrm{P}(F_{5,10} < k) = 0,05 \Leftrightarrow \mathrm{P}(F_{5,10} \geq k) = 0,95 \Leftrightarrow k = F_{5,10;0,95} = \frac{1}{F_{10,5;0,05}} = \frac{1}{4,735} = 0,21119$$

♦♦

1.5.2 Comparação das variâncias de duas populações normais

Consideremos, agora, a situação em que nosso interesse está na comparação das variâncias σ_1^2 e σ_2^2 de duas populações normais. Os estimadores não viesados para essas variâncias são S_1^2 e S_2^2 em que

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2 \qquad S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i} - \overline{X}_2)^2$$

Se as populações são normais, isto é, $X_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2; \sigma_2^2)$ então

$$U_1 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n_1-1} \qquad U_2 = \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{n_2-1}$$

Como estamos supondo que as amostras são independentes, as duas variáveis aleatórias U_1 e U_2 acima também são independentes e, portanto, pelo Teorema 1.1, resulta que

$$\frac{\dfrac{U_1}{n_1 - 1}}{\dfrac{U_2}{n_2 - 1}} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

ou seja,

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1} \tag{1.22}$$

1.5.3 Intervalo de confiança para σ_1^2/σ_2^2

Usando (1.22) e os valores críticos da distribuição F_{n_1-1,n_2-1} obtemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(F_{n_1-1,n_2-1;1-\alpha/2} < \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} < F_{n_1-1,n_2-1;\alpha/2}\right) &= 1-\alpha \Rightarrow \\
\mathrm{P}\left(\frac{F_{n_1-1,n_2-1;1-\alpha/2}}{S_1^2/S_2^2} < \frac{1}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} < \frac{F_{n_1-1,n_2-1;\alpha/2}}{S_1^2/S_2^2}\right) &= 1-\alpha \Rightarrow \\
\mathrm{P}\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{n_1-1,n_2-1;\alpha/2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{n_1-1,n_2-1;1-\alpha/2}}\right) &= 1-\alpha
\end{aligned}$$

e, portanto, o intervalo de confiança para $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ é

$$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{n_1-1,n_2-1;\alpha/2}};\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{n_1-1,n_2-1;1-\alpha/2}}\right) \tag{1.23}$$

ou

$$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{n_1-1,n_2-1;\alpha/2}};\frac{S_1^2/S_2^2}{\dfrac{1}{F_{n_2-1,n_1-1;\alpha/2}}}\right) \tag{1.24}$$

1.5.4 Teste de hipótese sobre σ_1^2/σ_2^2

Vamos, agora, estabelecer os procedimentos para o teste de hipóteses referentes à razão das variâncias de duas populações normais. Nosso objetivo, então, é testar

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \ (\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$$

contra uma das alternativas possíveis

$$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1 \ (\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2) \qquad H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1 \ (\sigma_1^2 > \sigma_2^2) \qquad H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1 \ (\sigma_1^2 < \sigma_2^2)$$

Lembrando que, sob H_0, $\sigma_1 = \sigma_2$, temos as seguintes regras de decisão para um nível de significância α:

- Hipótese nula e estatística de teste

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$$

$$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

$$f_0 = \text{valor observado de } F_0$$

- Teste bilateral

$$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1 \ (\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$$

Região crítica:

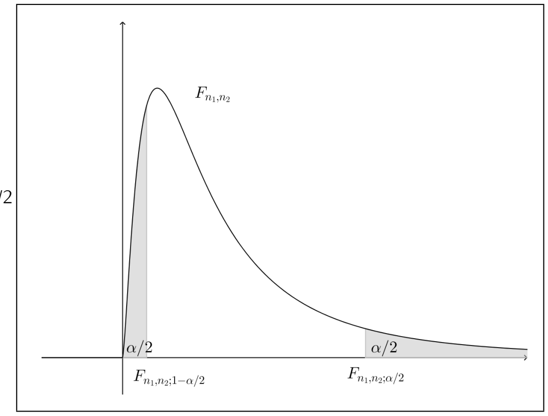
$F_0 < F_{n_1-1,n_2-1;1-\alpha/2}$ ou $F_0 > F_{n_1-1,n_2-1;\alpha/2}$

Valor P :

$P = 2 \cdot \mathrm{P}(F_{n_1-1,n_2-1} > f_0)$ se $f_0 > 1$

ou

$P = 2 \cdot \mathrm{P}(F_{n_1-1,n_2-1} < f_0)$ se $f_0 < 1$



- Teste unilateral à direita

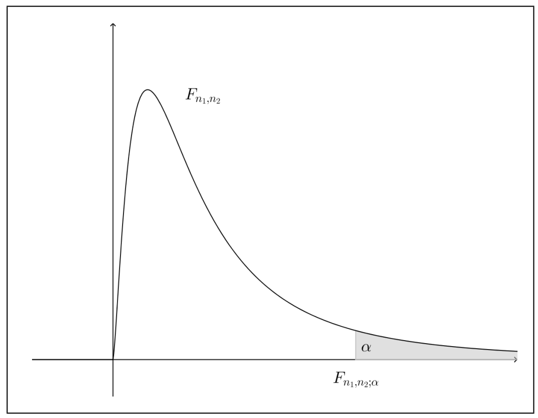
$$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1 \ (\sigma_1^2 > \sigma_2^2)$$

Região crítica:

$F_0 > F_{n_1-1,n_2-1;\alpha}$

Valor P :

$P = \mathrm{P}(F > f_0)$



- Teste unilateral à esquerda

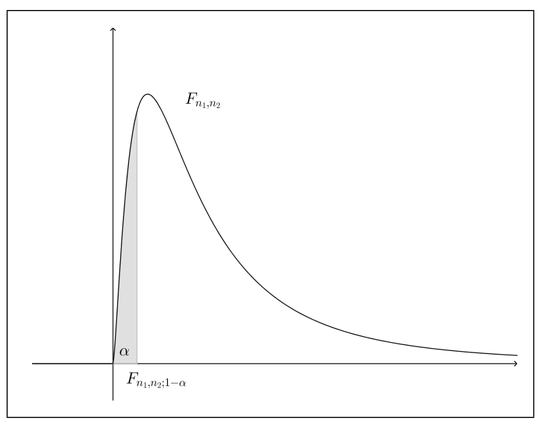
$$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1 \ (\sigma_1^2 < \sigma_2^2)$$

Região crítica:

$$F_0 < F_{n_1-1,n_2-1;1-\alpha} = \frac{1}{F_{n_2-1,n_1-1;\alpha}}$$

Valor P :

$P = \mathrm{P}(F < f_0)$



1.6 Inferência sobre médias de duas populações normais com variâncias desconhecidas

1.6.1 Variâncias populacionais iguais

Suponhamos, agora, que $X_1 \sim N(\mu_1; \sigma^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2; \sigma^2)$ e que σ^2, a variância comum, seja desconhecida. Dos resultados já vistos sobre as distribuições da média e da variância amostrais de uma população normal, temos que

$$\overline{X}_1 \sim N\left(\mu_1; \frac{\sigma^2}{n_1}\right) \qquad \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_1-1} \qquad \overline{X}_1\,,\; S_1^2 \text{ independentes} \tag{1.25}$$

$$\overline{X}_2 \sim N\left(\mu_2; \frac{\sigma^2}{n_2}\right) \qquad \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_2-1} \qquad \overline{X}_2\,,\; S_2^2 \text{ independentes} \tag{1.26}$$

Como estamos supondo que as amostras são independentes, resulta que

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2; \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}\right) \tag{1.27}$$

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} + \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_1+n_2-2} \tag{1.28}$$

$$\overline{X}_1 \text{ independente de } \overline{X}_2, S_2^2 \tag{1.29}$$

$$S_1^2 \text{ independente de } \overline{X}_2, S_2^2 \tag{1.30}$$

$$\tag{1.31}$$

De (1.25) e (1.29) resulta que $\overline{X}_1$ é independente de S_1^2 e S_2^2) e de (1.26) e (1.30) resulta que $\overline{X}_2$ é independente de S_1^2 e S_2^2). Obtemos, então, que as variáveis dadas em (1.27) e 1.28) são independentes e, portanto

$$T = \frac{\dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}}{n_1+n_2-2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

ou seja

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_C^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1+n_2-2} \tag{1.32}$$

em que

$$S_C^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 - 1 + n_2 - 1} \tag{1.33}$$

é um estimador não viesado para σ^2, obtido como média ponderada dos estimadores não viesados S_1^2 e S_2^2, com os pesos sendo definidos pelos graus de liberdade.

A estatística dada em (1.32) será utilizada na construção de testes de hipóteses e intervalos de confiança para a diferença entre as médias.

Intervalo de confiança para $\mu_1 - \mu_2$

Temos, a partir de (1.32), que

$$\mathrm{P}\left(-t_{n_1+n_2-2;\alpha/2} < \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} < t_{n_1+n_2-2;\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left((\overline{X}_1-\overline{X}_2)-t_{n_1+n_2-2;\alpha/2}\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}<(\mu_1-\mu_2)\right.\\
<\quad&\left.(\overline{X}_1-\overline{X}_2)+t_{n_1+n_2-2;\alpha/2}\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\right)=1-\alpha
\end{aligned}$$

o que nos dá o seguinte intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para $\mu_1-\mu_2$.

$$\left((\overline{X}_1-\overline{X}_2)-t_{n_1+n_2-2;\alpha/2}\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)};(\overline{X}_1-\overline{X}_2)+t_{n_1+n_2-2;\alpha/2}\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\right) \tag{1.34}$$

Como antes, os limites são variáveis aleatórias e, assim, faz sentido falar que a probabilidade é $1-\alpha$. Isso significa que se repetirmos várias vezes o processo de amostragem e subsequente construção do intervalo de confiança correspondente, "acertaremos" em $100(1-\alpha)\%$ das vezes, ou seja, o intervalo conterá o verdadeiro parâmetro $\mu_1-\mu_2$.

Para uma amostra específica, o intervalo de confiança é

$$\left((\overline{x}_1-\overline{x}_2)-t_{n_1+n_2-2;\alpha/2}\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)};(\overline{x}_1-\overline{x}_2)+t_{n_1+n_2-2;\alpha/2}\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\right) \tag{1.35}$$

e esse intervalo ou contém, ou não contém o verdadeiro parâmetro. O que podemos dizer é que o método de obtenção dos intervalos garante uma probabilidade de acerto de $100(1-\alpha)\%$.

Teste de hipótese sobre $\mu_1-\mu_2$

Vamos estabelecer, agora, os procedimentos para o teste de hipóteses referentes à diferença entre as médias, ou seja, nosso objetivo é testar

$$H_0:\mu_1=\mu_2 \qquad \text{ou} \qquad H_0:\mu_1-\mu_2=\Delta_0$$

Como antes, o procedimento de teste consiste em rejeitar a veracidade da hipótese nula H_0 sempre que obtivermos valores da estatística de teste com pequenas probabilidades de ocorrência sob H_0. Na distribuição t, assim como na normal, probabilidades pequenas correspondem às caudas da distribuição e isso nos leva aos seguintes procedimentos.

- Hipótese nula e estatística de teste

$$H_0:\mu_1-\mu_2=\Delta_0$$

$$T_0=\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-\Delta_0}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}\sim t_{n_1+n_2-2}$$

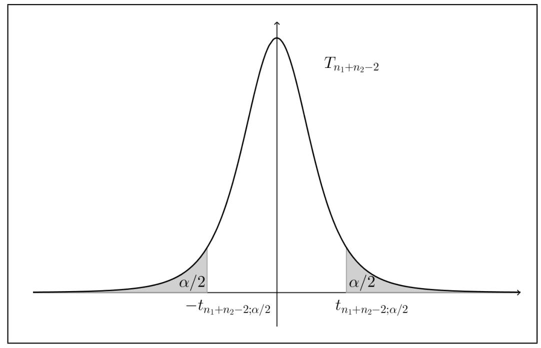
$$t_0= \text{ valor observado de } T_0$$

- Teste bilateral

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$

Região crítica:
$|T_0| > t_{n_1+n_2-2;\alpha/2}$

Valor P :
$P = 2 \cdot \mathrm{P}(T_{n_1+n_2-2} > |t_0|)$

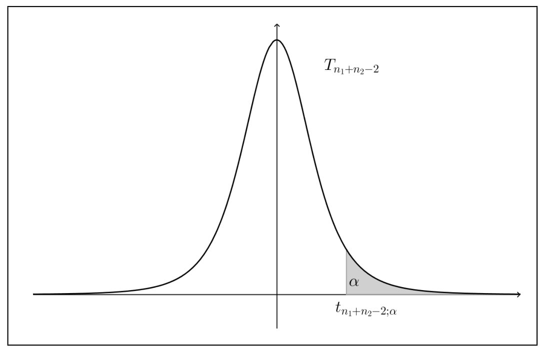


- Teste unilateral à direita

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$

Região crítica:
$T_0 > t_{n_1+n_2-2;\alpha}$

Valor P :
$P = \mathrm{P}(T_{n_1+n_2-2} > t_0)$

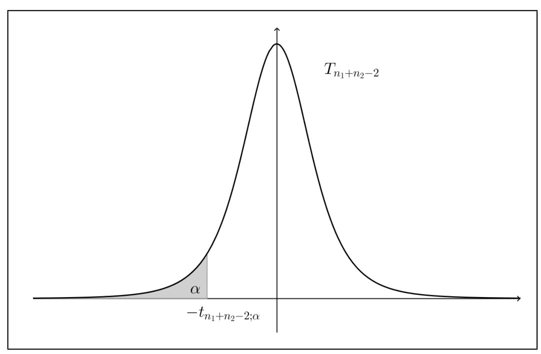


- Teste unilateral à esquerda

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$

Região crítica:
$T_0 < -t_{n_1+n_2-2;\alpha}$

Valor P :
$P = \mathrm{P}(T_{n_1+n_2-2} > |t_0|)$



1.6.2 Variâncias populacionais diferentes

Consideremos, agora, o caso mais geral em que $X_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2; \sigma_2^2)$ e que ambas as variâncias são desconhecidas. Cada uma das variâncias amostrais S_1^2 e S_2^2 estima a variância populacional correspondente, mas a padronização fornece apenas uma estatística de teste aproximadamente distribuída como uma t de Student. Mais precisamente

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} \approx t_\nu \tag{1.36}$$

em que o número de graus de liberdade ν é dado por

$$\nu = \frac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} \tag{1.37}$$

Uma expressão alternativa,que é mais fácil e fornece resultados mais precisos numericamente, é

$$\nu = \frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1)}{(n_2 - 1)C^2 + (n_1 - 1)(1 - C)^2} \qquad \text{em que} \qquad C = \frac{\dfrac{s_1^2}{n_1}}{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}} \tag{1.38}$$

Uma abordagem conservadora é considerar

$$\nu = \min(n_1 - 1, n_2 - 1) \tag{1.39}$$

Em qualquer dos casos, a construção de testes de hipóteses e intervalos de confiança se faz de maneira análoga com base na distribuição t_ν.

Intervalo de confiança para $\mu_1 - \mu_2$

Temos, a partir de (1.32), que

$$P\left(-t_{\nu;\alpha/2} < \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} < t_{\nu;\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha$$

Logo,

$$P\left((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t_{\nu;\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + t_{\nu;\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

o que nos dá o seguinte intervalo de confiança de $100(1 - \alpha)\%$ para $\mu_1 - \mu_2$.

$$\left((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t_{\nu;\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}; (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + t_{\nu;\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\right) \tag{1.40}$$

Para uma amostra específica, o intervalo de confiança é

$$\left((\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - t_{\nu;\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}; (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + t_{\nu;\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}\right) \tag{1.41}$$

e esse intervalo ou contém, ou não contém o verdadeiro parâmetro. O que podemos dizer é que o método de obtenção dos intervalos garante uma probabilidade de acerto de $100(1 - \alpha)\%$.

Observação: Quando ambos os tamanhos amostrais n_1 e n_2 são grandes, $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ é aproximadamente normal e podemos usar a distribuição normal como aproximação das distribuições amostrais acima.

Teste de hipótese sobre $\mu_1 - \mu_2$

- Hipótese nula e estatística de teste

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$$

$$T_0 = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - \Delta_0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} \approx t_\nu$$

$$\nu = \frac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} \text{ ou } \nu = \min(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

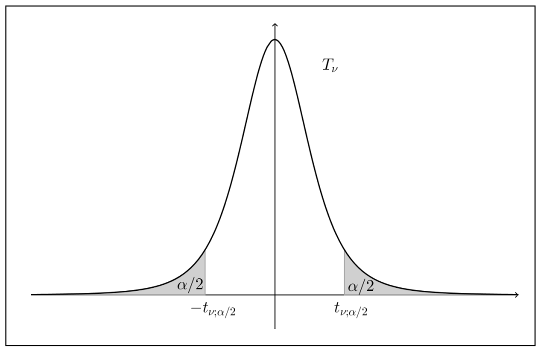
$$t_0 = \text{ valor observado de } T_0$$

- Teste bilateral

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$

Região crítica:
$|T_0| > t_{\nu;\alpha/2}$

Valor P :
$P = 2 \cdot \mathrm{P}(T_\nu > |t_0|)$

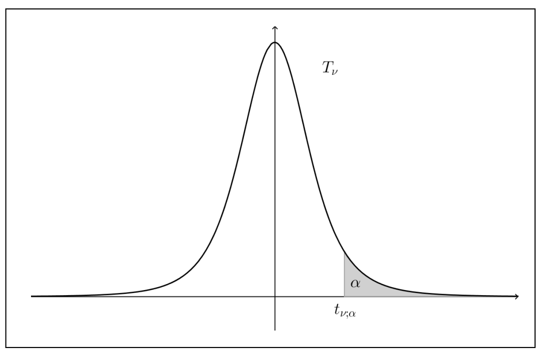


- Teste unilateral à direita

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$

Região crítica:
$T_0 > t_{\nu;\alpha}$

Valor P :
$P = \mathrm{P}(T_\nu > t_0)$

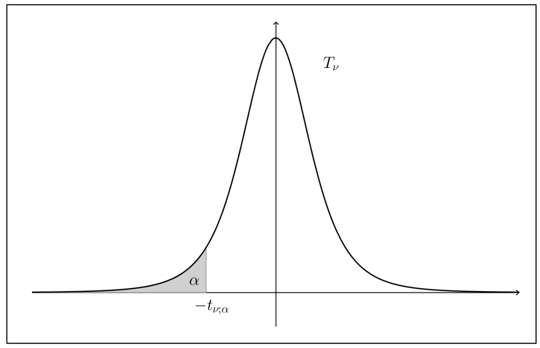


- Teste unilateral à esquerda

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$

Região crítica:
$T_0 < -t_{\nu;\alpha}$

Valor P :
$P = \mathrm{P}(T_\nu > |t_0|)$



EXEMPLO 1.2

Em muitos estados americanos, os advogados são encorajados a realizar trabalhos *pro bono*, tanto por suas firmas quanto pelos conselhos de assessoramento judicial. No entanto, em anos recentes, os advogados têm dedicado mais tempo a clientes particulares e menos tempo a ajuda legal *pro bono*. Obtiveram-se amostras aleatórias independentes de advogados de duas grandes firmas, e o número de horas *pro bono* durante o ano anterior foi registrado para cada advogado. As estatísticas-resumo são apresentadas na tabela que segue. Admita que as populações subjacentes sejam normais.

Firma	Dados da amostra		
	Tamanho	Média	Variância
A	18	75,1	5,92
B	14	80,9	5,65

(a) Há alguma evidência que sugira que o número médio de horas anuais *pro bono* seja diferente nessas duas firmas de advocacia? Use $\alpha = 0,05$.

(b) Construa um intervalo de confiança de 95% para a diferença nas horas médias *pro bono*. Esse intervalo de confiança apoia sua conclusão da parte (a)? Explique.

Solução

(a) Para decidir qual teste usar para a comparação das médias, temos, inicialmente, que testar a igualdade das variâncias.

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{17,13} \\ F_{17,13;0,025} &= 2,983 \\ F_{17,13;0,975} &= \frac{1}{F_{13,17;0,025}} = \frac{1}{2,753} = 0,3632 \end{aligned}$$

A região crítica é $F_0 > 2,983$ ou $F_0 < 0,3632$. O valor observado da estatística de teste é $f_0 = \dfrac{5,92}{5,65} = 1,048$, que não pertence à região crítica. Logo, não rejeitamos a hipótese de igualdade das variâncias e passamos a realizar o teste para comparação de médias com base na hipótese de igualdade de variâncias populacionais.

O estimador combinado da variância é

$$S_p^2 = \frac{n_1 - 1}{n_1 + n_2 - 2} S_1^2 + \frac{n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2} S_2^2 = \frac{17}{30} \times 5,92 + \frac{13}{30} \times 5,65 = 5,803$$

Queremos testar

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

e a estatística de teste é

$$T_0 = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \sim t_{30}$$

O valor crítico é $t_{30,0,025} = 2,042$ e rejeitamos H_0 se $|t_0| > 2,042$. Os dados fornecem

$$t_0 = \frac{75,1 - 80,9}{\sqrt{5,803 \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{14} \right)}} = -6,7566$$

que está na região crítica. Assim, rejeita-se a hipótese de que o número médio de horas *pro bono* seja o mesmo para as duas firmas.

Na Tabela 2, vemos que, para 30 graus de liberdade, a maior abscissa é 3,385, que é menor que $|t_0| = 6,7566$. Assim, podemos afirmar que o valor P é menor que 0,001.

(b) O intervalo de confiança é

$$(75,1 - 80,9) \pm 2,042 \sqrt{5,803 \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{14} \right)} = (-7,5529\,; -4,0471)$$

que não contém o 0, o que corrobora a rejeição da hipótese de igualdade das médias no item anterior.

♦♦

1.7 Exercícios Propostos

1. O peso total (com a caixa) de uma máquina de costura portátil é uma consideração importante. Suponha que Singer afirme ter a máquina mais leve, com menos 5 libras (2,77 kg) em relação às demais. Obtiveram-se amostras aleatórias independentes de uma Singer e de uma máquina comparável Simplicity, e os pesos (em libras) de cada uma foi registrado. As estatísticas-resumo e as variâncias conhecidas são apresentadas na tabela que segue.

Máquina de costura	Tamanho amostral	Média amostral	Variância populacional
Simplicity	42	17,99	2,89
Singer	38	13,26	2,25

   (a) Há alguma evidência para se refutar a afirmativa da Singer? Use $\alpha = 0,01$.

   (b) Ache o valor P associado a esse teste.

   (c) A hipótese de normalidade é necessária nesse problema? Por que ou por que não?

2. Magnésio é usado por todas as células de seu corpo e ajuda os nervos a funcionarem adequadamente. De acordo com a Base de Dados sobre Nutrientes do Departamento de Agricultura dos Estados Unidos, meia xícara de feijão vegetariano cozido e uma batata média cozida sem a casca têm a mesma quantidade de magnésio (40 miligramas). Para verificar essa afirmação, obtiveram-se amostras aleatórias independentes de feijão cozido e batatas cozidas, e mediu-se a quantidade de magnésio em cada porção (em miligramas). As estatísticas-resumo e as variâncias conhecidas são apresentadas na tabela que segue.

Alimento	Tamanho amostral	Média amostral	Variância populacional
Feijão vegetariano cozido	18	39,58	2,47
Batata cozida	18	40,12	0,87

(a) Admita que as distribuições subjacentes sejam normais. Há alguma evidência para se refutar a afirmativa? Use $\alpha = 0,01$. Ache o valor P para esse teste de hipótese.

(b) Suponha que os tamanhos amostrais sejam $n_1 = n_2 = 38$. Agora, há alguma evidência para se refutar a afirmativa? Ache o valor P para esse teste de hipótese.

(c) Quais devem ser os tamanhos amostrais ($n_1 = n_2$) para que o teste de hipótese seja significante ao nível $\alpha = 0,01$?

3. Latas de alumínio são feitas a partir de grandes lingotes sólidos, prensados sob rolos de alta pressão e cortados como biscoitos a partir de folhas finas. O alumínio é ideal para latas porque é leve, forte e reciclável. Uma companhia afirma que um novo processo de fabricação diminui a quantidade de alumínio necessária para se fazer uma lata e, portanto, diminui o peso. Obtiveram-se amostras aleatórias independentes de latas de alumínio feitas pelos processos velho e novo, e o peso (em onças) de cada uma é dado na tabela que segue.

Processo antigo (1)										
0,52	0,49	0,47	0,47	0,48	0,52	0,55	0,49	0,52	0,50	0,50
0,50	0,51	0,51	0,50	0,53	0,49	0,51	0,52	0,51	0,51	
Processo novo (2)										
0,51	0,51	0,50	0,48	0,47	0,49	0,46	0,46	0,52	0,50	0,48
0,51	0,50	0,48	0,51	0,44	0,48	0,47	0,50	0,51	0,48	

Há alguma evidência de que as latas de alumínio feitas pelo novo processo tenham um peso médio populacional menor? Admita que as populações sejam normais, com variâncias iguais, e use $\alpha = 0,01$. Por que você acha que um nível de significância pequeno seja importante aqui?

4. Para ajudar os lojistas em seu planejamento, a cada ano se realiza um estudo para se determinar quanto as pessoas pretendem gastar com presentes nas festas de fim de ano. Em uma pesquisa de novembro de 2008, obteve-se uma amostra de compradores e lhes foi pedido que estimassem a quantia que pretendiam gastar (em dólares) com presentes. A média amostral dos gastos antecipada foi relatada por gênero, grupo de idade, e nível de renda. Considere as estatísticas-resumo dadas na tabela que segue.

Grupo de	Tamanho amostral	Média amostral	Desvio padrão amostral
Homens	21	784,00	37,50
Mulheres	19	652,00	17,01

Historicamente, os homens relatam gastos maiores do que os das mulheres. Com base nos dados de 2008, há alguma evidência que sugira que a quantidade média que os homens pretendem gastar seja maior do que a quantidade média que as mulheres pretendem gastar? Use $\alpha = 0,10$, e admita que as populações sejam normais.

5. Em 2008, Minnesota e Carolina do Norte criaram a maioria dos perus dos Estados Unidos, aproximadamente 49 milhões e 39 milhões de aves, respectivamente. Obtiveram-se amostras aleatórias independentes de perus congelados de cada estado, e cada peru foi pesado. Os dados resultantes (em libras) são apresentados nas tabela que segue.

Minnesota							
10,1	11,5	17,1	13,4	15,9	17,9	14,9	9,5
14,5	12,5	14,2	16,8	13,7	16,0	19,4	11,4
Carolina do Norte							
19,9	14,0	19,9	12,3	17,0	25,2	23,9	7,8
15,8	21,2	13,8	7,4	15,1	10,1	3,2	17,2

Há alguma evidência que sugira que haja maior variabilidade no peso de perus congelados da Carolina do Norte do que de Minnesota? Use $\alpha = 0,01$ e admita normalidade.

Capítulo 2

Inferência com Amostras Dependentes

Em vários estudos de duas populações, não é possível assumir independência entre as amostras. Experimentos que envolvem medidas de cada indivíduo ou objeto antes e depois de algum evento resultam em dados emparelhados – cada observação antes está associada a, ou emparelhada com uma observação depois. Aqui as variáveis X_1 e X_2 são medidas no mesmo sujeito. Outros exemplos podem envolver marido/mulher ou irmãos gêmeos, casos em que temos n pares de indivíduos e as variáveis X_1 e X_2 são medidas em cada um dos indivíduos do par. Embora as variáveis se refiram a sujeitos diferentes, não é razoável supor independência.

DEFINIÇÃO **Amostras Dependentes ou Emparelhadas**

Em um conjunto de dados emparelhados, cada indivíduo ou objeto na amostra 1 está associado com um indivíduo ou objeto semelhante na amostra 2. *Semelhante* significa que os indivíduos ou objetos compartilham alguma característica fundamental, comum, podendo, ou não, ser o mesmo indivíduo ou objeto.

Consideremos, agora, o caso de amostras emparelhadas, em que duas variáveis X_1 e X_2 são medidas em um mesmo indivíduo da amostra ou nos indivíduos de cada par da amostra. Como antes, vamos supor que $X_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2; \sigma_2^2)$. Nosso interesse continua sendo a diferença $\mu_1 - \mu_2$. O que muda agora é que $\overline{X}_1$ e $\overline{X}_2$ não são mais independentes.

Podemos, então, pensar na nossa amostra como sendo uma amostra de pares $(X_{11}, X_{21}), (X_{12}, X_{22}), \dots, (X_{1n}, X_{2n})$ de observações retiradas das populações X_1 e X_2, respectivamente. Para cada par definimos uma nova variável

$$D_i = X_{1i} - X_{2i}$$

Segue que $D_1, D_2, \dots, D_n$ formam uma amostra aleatória simples da variável $D = X_1 - X_2$, pois cada uma delas se refere a um indivíduo/objeto ou par diferente e, portanto, são independentes. Como X_1 e X_2 têm distribuição normal, D também tem distribuição normal com média $\mu_1 - \mu_2$. A variância de D pode ser estimada a partir da amostra $D_1, D_2, \ldots, D_n$ como

$$S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} D_i^2 - n\overline{D}^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} D_i^2 - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} D_i\right)^2}{n}\right) \tag{2.1}$$

em que

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i = \overline{X}_1 - \overline{X}_2 \tag{2.2}$$

2.1 Intervalo de confiança para $\mu_1 - \mu_2$

Sabemos que

$$\sqrt{n}\frac{\overline{D} - \mu_D}{S_D} \sim t_{n-1}$$

e, portanto, o intervalo de confiança para $\mu_1 - \mu_2$ é

$$\left((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t_{n-1;\alpha/2}\frac{S_D}{\sqrt{n}}\,;\,(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + t_{n-1;\alpha/2}\frac{S_D}{\sqrt{n}}\right) \tag{2.3}$$

2.2 Teste de hipótese sobre $\mu_1 - \mu_2$

Os procedimentos de inferência sobre $\mu_1 - \mu_2$ se basearão na distribuição t de Student com $n-1$ graus de liberdade.

- Hipótese nula e estatística de teste

$$H_0 : \mu_D = \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$$

$$T_{D_0} = \frac{\overline{D} - \Delta_0}{S_D/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \text{ sob } H_0$$

$$t_{D_0} = \text{ valor observado de } T_{D_0}$$

- Teste bilateral

$$H_1 : \mu_D \neq \Delta_0$$

$$\text{Região crítica : } \quad |T_{D_0}| > t_{n-1;\alpha/2}$$

$$\text{Valor } P : \quad P = 2 \cdot \mathrm{P}(T_{n-1} > |t_{D_0}|)$$

- Teste unilateral à direita

$$H_1 : \mu_D > \Delta_0$$

$$\text{Região crítica : } \quad T_{D_0} > t_{n-1;\alpha}$$

$$\text{Valor } P : \quad P = \mathrm{P}(T_{n-1} > t_{D_0})$$

- Teste unilateral à esquerda

$$H_1 : \mu_D < \Delta_0$$

$$\text{Região crítica} \quad T_{D_0} < -t_{n-1;\alpha}$$

$$\text{Valor } P: \quad P = \mathrm{P}(T_{n-1} > |t_{D_0}|)$$

EXEMPLO 2.1

O gerente de uma loja de conveniências loja está considerando colocar novas caixas registradoras visando aumentar a precisão e diminuir o tempo de saída. Reuniu-se uma amostra aleatória de sete compras típicas de itens da loja. Cada sacola de compras dos itens foi totalizada por um operador de caixa usando a máquina antiga e, depois, pelo mesmo operador usando a máquina nova. Os tempos (em segundos) são apresentados na tabela que segue. Há alguma evidência que sugira que os tempos de saída sejam diferentes com as duas registradoras? Use $\alpha = 0,01$, e encontre limites para o valor P associado a esse teste de hipótese.

Sacola de compras	1	2	3	4	5	6	7
Registradora antiga	45	83	62	65	39	66	62
Registradora nova	42	55	45	44	17	66	69

Solução

Note que, nesse exemplo, a característica comum, que emparelha os dados, é o operador de caixa. Vamos tomar os tempos associados à registradora antiga como a população 1 e os tempos associados à registradora nova como população 2. Nas Figuras 2.2 e 2.1 temos a saida do Minitab para o teste de Anderson-Darling, que mostra que evidência de normalidade dos dados. Podemos, então, seguir para realizar o teste t de dados emparelhados.

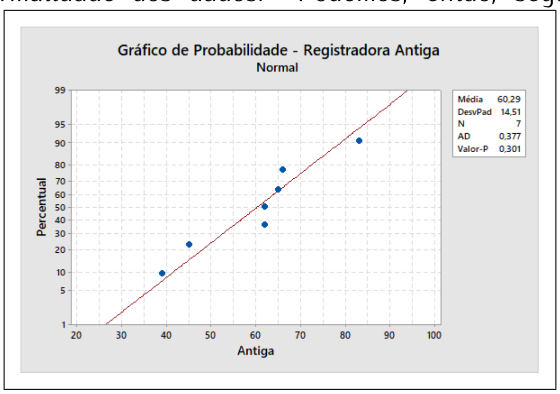


Figura 2.1 – Registradora Antiga

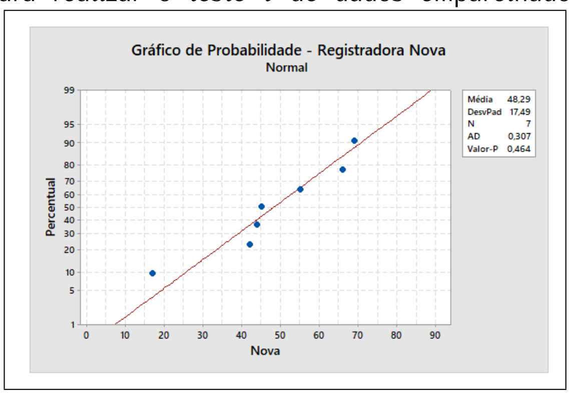


Figura 2.2 – Registradora Nova

Sacola de compras	1	2	3	4	5	6	7
Registradora antiga X_1	45	83	62	65	39	66	62
Registradora nova X_2	42	55	45	44	17	66	69
Diferença $D = X_1 - X_2$	3	28	17	21	22	0	-7

Queremos testar

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad (\mu_1 = \mu_2)$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \quad (\mu_1 \neq \mu_2)$$

A estatística de teste é

$$T = \frac{\overline{D}}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_6$$

e o valor crítico é $t_{6;0,005} = 3,707$. Os dados nos fornecem a média amostral

$$\overline{d} = \frac{3 + 28 + 17 + 21 + 22 + 0 - 7}{7} = \frac{84}{7} = 12$$

e a variância amostral (note a fórmula de cálculo mais simples)

$$\begin{aligned} s_D^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \overline{d})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - n\overline{d}^2\right) \\ &= \frac{1}{6}(9 + 784 + 289 + 441 + 484 + 0 + 49 - 7 \times 144) = \frac{1048}{6} = 174,6667 \end{aligned}$$

Logo, o valor observado da estatística de teste é

$$t_0 = \frac{12}{\sqrt{\frac{174,6667}{7}}} = 2,4023 < 3,707$$

Sendo assim, não se rejeita a hipótese nula, ou seja, os dados indicam que os tempos gastos com as registradoras novas não são, em média, diferentes dos tempos gastos com as registradoras antigas.

Olhando na Tabela 2, na linha correspondente a 6 graus de liberdade, vemos que o valor observado $t_0 = 2,4023$ está entre os valores 2,313 e 2,612, que correspondem às probabilidades 0,03 e 0,02. Assim, podemos dizer que a probabilidade na cauda direita, acima de 2,4023, está no intervalo $(0,02; 0,03)$. Como o teste é bilateral, o valor P estará no intervalo $(0,04; 0,06)$. Minitab nos fornece $P = 2 \times 0,0265641 = 0,0531282$.

♦♦

2.3 Exercícios Propostos

1. Vinte e um programadores de computador de firmas TI (Tecnologia da Informação) em todo o país foram selecionados aleatoriamente. Pediu-se a cada um para escrever um código em C++ e em Java para uma aplicação específica. O tempo de execução (em segundos) de cada programa, por linguagem de computador, é dado a seguir.

C++										
44,4	43,0	46,6	41,2	44,6	44,3	47,3	49,5	46,5	46,2	42,8
47,5	43,3	41,5	45,3	45,2	48,7	47,1	44,1	43,6	45,1	
Java										
52,0	52,6	41,8	51,4	64,3	62,1	41,2	58,0	49,9	51,1	50,6
54,9	50,6	54,0	44,1	59,4	56,0	31,3	49,6	49,4	48,8	

   (a) Qual é a característica comum que torna esses dados emparelhados?

   (b) Admita normalidade. Realize o teste de hipótese apropriado para determinar se há alguma evidência de que o tempo médio de execução seja maior para programas Java do que para programas C++. Use $\alpha = 0,001$.

   (c) Ache limites para o valor P associado a esse teste de hipótese.

2. Um consultor que trabalha para o quartel da Polícia Estadual afirma que as armas de serviço dispararão com uma velocidade de boca maior se o cano estiver adequadamente limpo. Obteve-se uma amostra aleatória de armas de 9 mm, e mediu-se a velocidade de boca (em pés por segundo) de um único tiro de cada arma. Cada arma foi profissionalmente limpa e a velocidade de boca de um segundo tiro (com o mesmo tipo de bala) foi medida. Os dados são apresentados na tabela que segue.

Arma	1	2	3	4	5	6
Antes	1505	1419	1504	1494	1510	1506
Depois	1625	1511	1459	1441	1472	1521

(a) Qual é a característica comum que torna esses dados emparelhados?

(b) Admita normalidade. Realize o teste de hipótese apropriado para determinar se há alguma evidência de que uma arma limpa dispara com velocidade de boca maior. Use $\alpha = 0,01$.

(c) Ache limites para o valor P associado a esse teste de hipótese.

Capítulo 3

Solução dos exercícios

3.1 Capítulo 1

1. Contexto do problema: amostras independentes de duas populações com variâncias conhecidas. Ambas as amostras são grandes, o que nos permite aplicar o Teorema Limite Central.

   (a)
   - População 1: Simplicity (μ_P)
   - População 2: Singer (μ_G)
   - Afirmativa da Singer: $\mu_P - \mu_G < 5$
   - Negação: $\mu_P - \mu_G \geq 5$

   $$\begin{aligned} H_0 &: \mu_P - \mu_G = 5 \\ H_1 &: \mu_P - \mu_G < 5 \end{aligned}$$

   Teste unilateral à esquerda – $\alpha = 0,01 \Rightarrow z_{0,01} = -2,33$
   Estatística de teste:

   $$Z_0 = \frac{\overline{X}_P - \overline{X}_G - \Delta_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_P^2}{n_P} + \dfrac{\sigma_G^2}{n_G}}} \approx N(0;1) \quad \text{sob } H_0$$

   Região crítica: $Z_0 < -2,33$
   Valor observado da estatística de teste:

   $$z_0 = \frac{(17,99 - 13,26) - 5}{\sqrt{\dfrac{2,89}{42} + \dfrac{2,25}{38}}} = -0,75461 > -2,33$$

   Não se rejeita H_0; não há evidências de que as máquinas da Singer sejam mais leves por 5 kg.

   (b) $P = \mathrm{P}(Z \leq -0,75461) = 0,5 - 0,2734 = 0,2266$

   (c) Como as amostras são grandes, podemos usar a aproximação normal dada pelo Teorema Limite Central.

2. Contexto do problema: amostras independentes de duas populações com variâncias conhecidas. Pelo enunciado, podemos supor que as populações sejam normais.

(a)
- População 1: Feijão (μ_F)
- População 2: Batata (μ_B)
- Afirmativa dada: $\mu_F = \mu_B$
- Negação: $\mu_F \neq \mu_B$

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \mu_F = \mu_B \\
H_1 &: \mu_F \neq \mu_B
\end{aligned}
$$

Teste bilateral – $\alpha = 0,01 \Rightarrow z_{0,005} = 2,58$
Estatística de teste:

$$Z_0 = \frac{\overline{X}_F - \overline{X}_B}{\sqrt{\dfrac{\sigma_F^2 + \sigma_B^2}{n}}} \approx N(0;1) \quad \text{sob } H_0$$

Região crítica: $|Z_0| > 2,58$
Valor observado da estatística de teste:

$$z_0 = \frac{39,58 - 40,12}{\sqrt{\dfrac{2,47 + 0,87}{18}}} = -1,2536$$

Não se rejeita H_0, ou seja não há evidências para se refutar a afirmativa do Departamento de Agricultura.

(b) Valor observado da estatística de teste:

$$z_0 = \frac{39,58 - 40,12}{\sqrt{\dfrac{2,47 + 0,87}{38}}} = -1,82143$$

Ainda não se rejeita H_0.

(c) Para se rejeitar H_0 temos que ter

$$z_0 = \frac{39,58 - 40,12}{\sqrt{\dfrac{2,47 + 0,87}{n}}} < -2,58 \Rightarrow \sqrt{n} \cdot (-0,29547) < -2,58 \Rightarrow \sqrt{n} > \frac{2,58}{0,29547} = 8,73171 \Rightarrow n \geq 77$$

3. Embora não tenha sido solicitado, vamos verificar se as suposições feitas no enunciado são válidas.

- Normalidade – Nas Figuras 3.1 e 3.2 temos os gráficos de probabilidade normal e os valores P do teste de Anderson-Darling. Para as duas populações, não se rejeita a hipótese de normalidade.

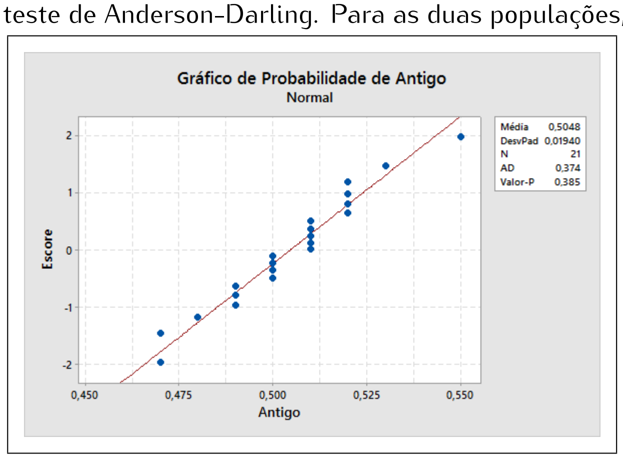


Figura 3.1 – Processo antigo

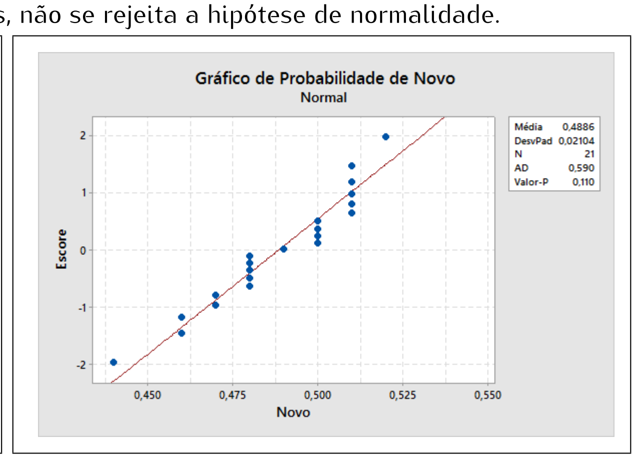


Figura 3.2 – Processo novo

- Variâncias iguais

  Sob a hipótese de variâncias iguais de populações normais, $F_0 = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{20,20}$

  $S_1^2 = 0,00037619 \qquad S_2^2 = 0,00044286$

  $P = 2.\,\mathrm{P}\left(F_{20,20} < \dfrac{0,00037619}{0,00044286}\right) = 2 \cdot 0,359389 = 0,719$

  Não se rejeita a hipótese de variâncias iguais. Veja a saída do Minitab na Figura 3.3.

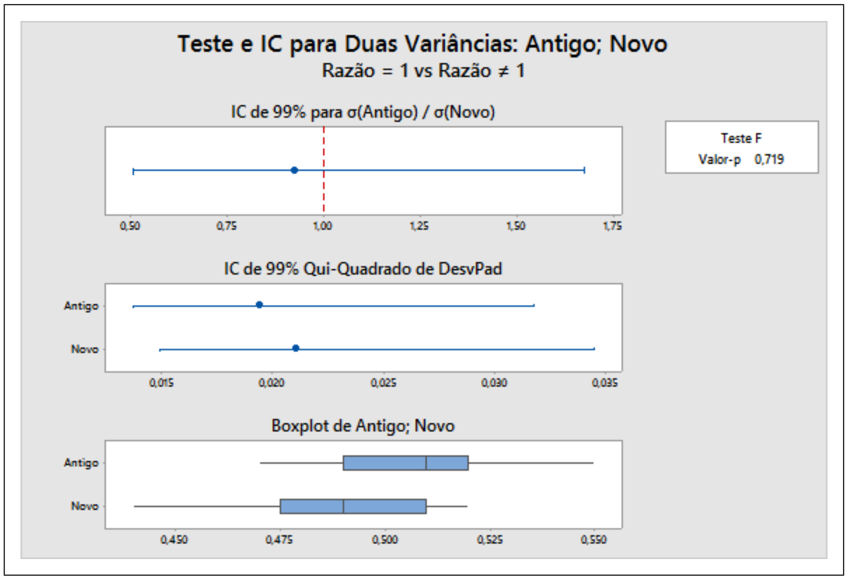


Figura 3.3 – Comparação das duas variâncias

Seguimos, agora, com o teste para comparação das médias, baseado na hipótese de populações normais com a mesma variância. Como os tamanhos amostrais são iguais, o estimador combinado da variância será a média aritmética das variâncias amostrais:

$$S_p^2 = \frac{0,00037619 + 0,00044286}{2} = 0,00040953$$

$$H_0 : \mu_N = \mu_A$$
$$H_0 : \mu_N < \mu_A$$

Estatística de teste $T_0 = \dfrac{\mu_N - \mu_A}{\sqrt{S_p^2\left(\dfrac{1}{21} + \dfrac{1}{21}\right)}} \sim t_{21+21-2} \qquad \text{sob } H_0$

Região crítica $T_0 < -t_{40;0,01} = -2,42326$ com software ou $-2,33$ pela aproximação normal.

Valor observado da estatística de teste $t_0 = \dfrac{\dfrac{10,26 - 10,6}{21}}{\sqrt{0,00040953\left(\dfrac{1}{21} + \dfrac{1}{21}\right)}} = -2,5925 < -2,42326$

Rejeita-se H_0; há evidências de que o processo novo resulta em peso menor.

4. Com base nas informações dadas, temos amostras pequenas e independentes de duas populações normais com variâncias desconhecidas quaisquer.

$$H_0 : \mu_H = \mu_M$$
$$H_0 : \mu_H > \mu_M$$

Estatística de teste

$$T_0 = \frac{\mu_H - \mu_M}{\sqrt{\dfrac{S_H^2}{n_H} + \dfrac{S_M^2}{n_M}}} \approx t_\nu \qquad \text{sob } H_0$$

Graus de liberdade

$$\nu = \frac{\left(\dfrac{37,50^2}{21} + \dfrac{17,01^2}{19}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{37,50^2}{21}\right)^2}{20} + \dfrac{\left(\dfrac{17,01^2}{19}\right)^2}{18}} = 28,49347041 \approx 29$$

Abordagem conservadora: $\nu = \min(21-1, 19-1) = 18$

Região crítica

$T_0 > t_{29;0,10} = 1,311 \qquad$ ou $\qquad T_0 > t_{18;0,10} = 1,067$

Valor observado da estatística de teste

$$t_0 = \frac{784 - 652}{\sqrt{\dfrac{37,50^2}{21} + \dfrac{17,01^2}{19}}} = 14,56$$

Rejeita-se H_0; há evidências de que os homens relatam gastos maiores do que as mulheres.

5. Veja a saída do Minitab para o teste de Anderson-Darling para normalidade das duas populações (Figuras 3.4 e 3.5). Não se rejeita a hipótese de normalidade das populações.

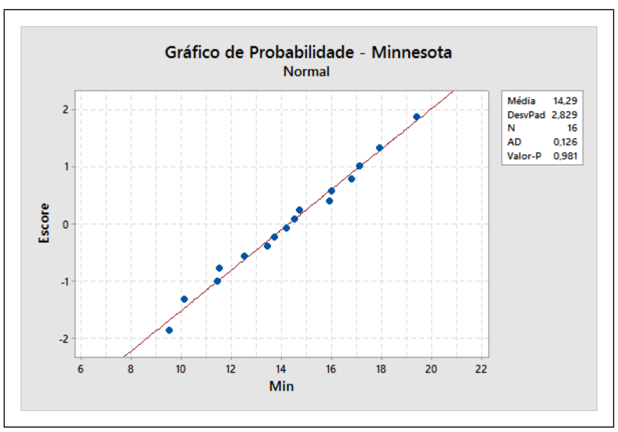


Figura 3.4 – Minnesota

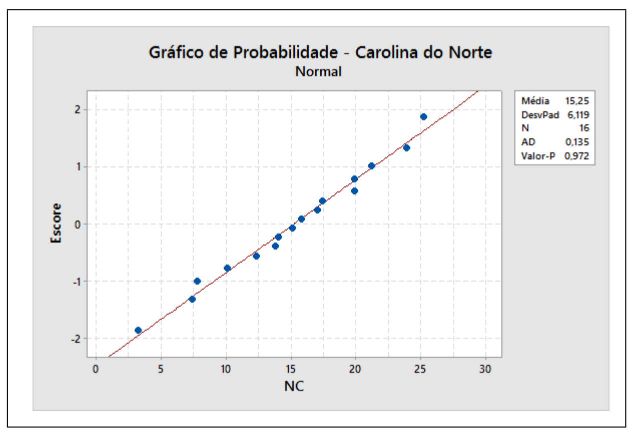


Figura 3.5 – Carolina do Norte

$$H_0 : \sigma_M^2 = \sigma_C^2$$
$$H_1 : \sigma_M^2 < \sigma_C^2$$

ou

$$H_0 : \frac{\sigma_C^2}{\sigma_M^2} = 1$$

$$H_1 : \frac{\sigma_C^2}{\sigma_M^2} > 1$$

Estatística de teste

$F_0 = \frac{S^2_{\text{CN}}}{S^2_{\text{Min}}} \sim F_{15,15} \qquad \text{sob } H_0$

Região crítica: $F_0 > F_{15,15;0,01} = 3,52219$ (por software).

Valor da estatística de teste: $f_0 = \frac{s^2_C}{s^2_M} = \frac{37,44667}{8,00383} = 4,67859$

Rejeita-se H_0; há evidência de maior variabilidade no peso dos perus da Carolina do Norte.

A título de exercício, vamos construir o intervalo de confiança de 98% para a razão $\frac{\sigma^2_C}{\sigma^2_M}$.

$F_{15,15;0,01} = 3,52219 \Rightarrow F_{15,15;0,99} = \frac{1}{3,52219} = 0,28391$

Sabemos que

$$\frac{\frac{S^2_C}{\sigma^2_C}}{\frac{S^2_M}{\sigma^2_M}} \sim F_{15,15}$$

.

Logo,

$$P\left(0,28391 \leq \frac{\frac{S^2_C}{\sigma^2_C}}{\frac{S^2_M}{\sigma^2_M}} \leq 3,52219\right) = 0,98 \Rightarrow$$
$$P\left(0,28391 \leq \frac{S^2_C}{S^2_M} \cdot \frac{\sigma^2_M}{\sigma^2_C} \leq 3,52219\right) = 0,98 \Rightarrow$$
$$P\left(0,28391 \cdot \frac{S^2_M}{S^2_C} \leq \frac{\sigma^2_M}{\sigma^2_C} \leq 3,52219 \cdot \frac{S^2_M}{S^2_C}\right) = 0,98 \Rightarrow$$
$$P\left(\frac{1}{3,52219} \cdot \frac{S^2_C}{S^2_M} \leq \frac{\sigma^2_C}{\sigma^2_M} \leq \frac{1}{0,2839171} \cdot \frac{S^2_C}{S^2_M}\right) = 0,98$$

O intervalo de confiança é

$$\left(\frac{4,67859}{3,52219} ; \frac{4,67859}{0,28391}\right) = (1,32832 ; 16,47913)$$

Note que ambos os limites são maiores que 1, comprovando que há maior variabilidade na Carolina do Norte.

3.2 Capítulo 2

1. Nas Figuras 3.6 e 3.7 temos a saída o Minitab para o teste de Anderson-Darling. Não se rejeita a hipótese de normalidade.

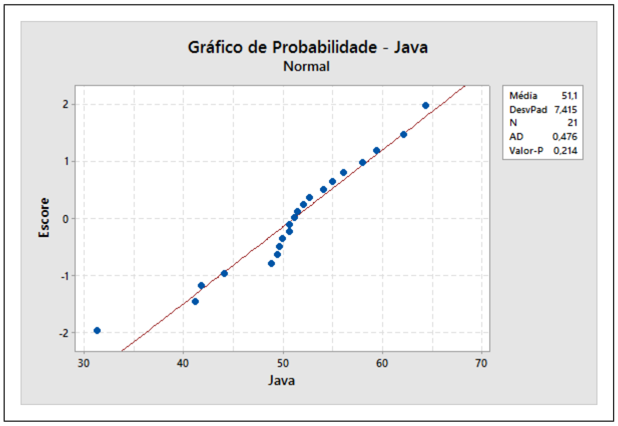


Figura 3.6 – Java

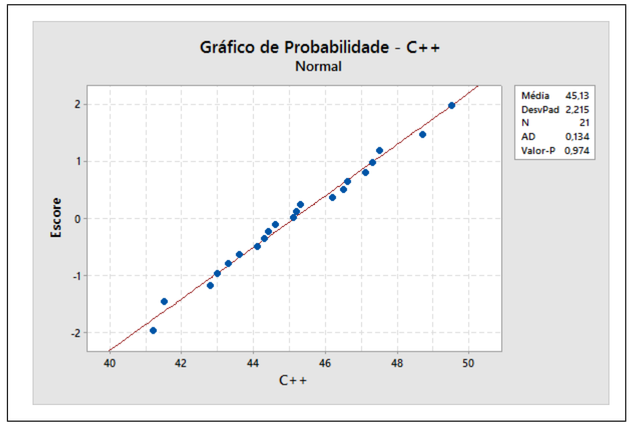


Figura 3.7 – C++

(a) Os dados são emparelhados porque o *mesmo programador* fez os dois programas.

(b)

$$H_0 : \mu_J = \mu_C$$
$$H_0 : \mu_J > \mu_C$$

As diferenças $d_i = x_{iJ} - x_{iC}$ são dadas na tabela a seguir:

7,6	9,6	-4,8	10,2	19,7	17,8	-6,1	8,5	3,4	4,9	7,8
7,4	7,3	12,5	-1,2	14,2	7,3	-15,8	5,5	5,8	3,7	

$\sum_{i=1}^{21} d_i = 135,3 \qquad \sum_{i=1}^{21} d_i^2 = 2039,69$

$\overline{d} = 6,44286 \qquad s_d^2 = \frac{1}{20}\left(2039,69 - \frac{135,3^2}{21}\right) = 58,39857$

Estatística de teste: $T_0 = \dfrac{\overline{X}_J - \overline{X}_C}{\sqrt{\dfrac{S_d^2}{n}}} \sim t_{20}$ sob H_0

Região crítica: $T_0 > t_{20;0,001} = 3,552$

Valor da estatística de teste: $t_0 = \dfrac{6,44286}{\sqrt{\dfrac{58,39857}{21}}} = 3,8635 > 3,552$

Rejeita-se H_0; há evidência de que o tempo de execução com Java é maior do que o tempo de execução com C++.

(c) $P = \mathrm{P}(t_{20} > 3,8635) = 0,000484$ (com software)

Pela tabela, podemos dizer apenas que $P < 0,001$, uma vez que 3,552 é o maior valor disponível para $gl = 20$ e corresponde a $\alpha = 0,001$.

2. (a) Os dados são emparelhados porque a *mesma arma* é usada para dar os 2 tiros, antes e depois da limpeza.

(b)

$$H_0 : \mu_D = \mu_A$$
$$H_0 : \mu_D > \mu_A$$

As diferenças $d_i = x_{iD} - x_{iA}$ são dadas na tabela a seguir:

120	92	-45	-53	-38	15

$$\sum_{i=1}^{21} d_i = 91 \qquad \sum_{i=1}^{21} d_i^2 = 29367$$

$$\overline{d} = 15,16667 \qquad s_d^2 = \frac{1}{5}\left(29367 - \frac{91^2}{6}\right) = 5597,36667$$

Estatística de teste: $T_0 = \dfrac{\overline{X}_D - \overline{X}_A}{\sqrt{\dfrac{S_d^2}{6}}} \sim t_5 \quad \text{sob } H_0$

Região crítica: $T_0 > t_{5;0,01} = 3,365$

Valor da estatística de teste: $t_0 = \dfrac{15,16667}{\sqrt{\dfrac{5597,36667}{6}}} = 0,4966$

Não se rejeita H_0; há evidências de que a limpeza da arma não aumenta a velocidade de boca.

(c) $P = \mathrm{P}(t_5 > 0,4966) = 0,320265$ (com software)

Pela tabela, podemos dizer apenas que $P > 0,15$, uma vez que 1,156 é o menor valor disponível para $gl = 5$ e corresponde a $\alpha = 0,15$.

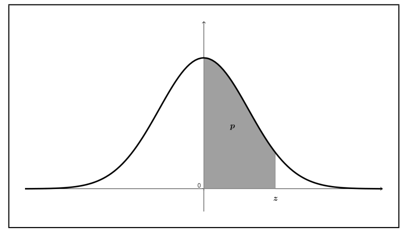
Apêndice A

Tabelas

- Tabela 1: Tabela da distribuição normal padrão – $p = \mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
- Tabela 2: Tabela da distribuição acumulada da normal padrão – $\Phi(z) = \mathrm{P}(Z \leq z),\ z \geq 0$
- Tabela 3: Valores críticos $\chi^2_{n,\alpha}$ da qui-quadrado – $\mathrm{P}(\chi^2_n > \chi^2_{n,\alpha}) = \alpha)$
- Tabela 4: Valores críticos da distribuição t

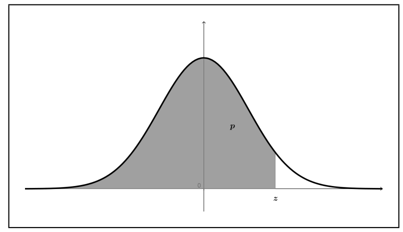
.

Tabela 1
Distribuição normal padrão
$p = \mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$



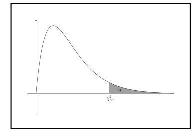
Casa inteira e 1a.decimal	2a. casa decimal									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Tabela 2
Distribuição acumulada da normal padrão
$p = \mathrm{P}(Z \leq z)$



Casa inteira e 1a.decimal	2a. casa decimal 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabela 3 – Valores críticos $\chi^2_{n,\alpha}$ da qui-quadrado: $\alpha = P(\chi^2_n > \chi^2_{n,\alpha})$



gl	Área α na cauda superior															
n	0,999	0,995	0,990	0,980	0,975	0,950	0,900	0,800	0,200	0,100	0,050	0,025	0,020	0,010	0,005	0,001
1	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,004	0,016	0,064	1,642	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635	7,879	10,828
2	0,002	0,010	0,020	0,040	0,051	0,103	0,211	0,446	3,219	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210	10,597	13,816
3	0,024	0,072	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	1,005	4,642	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345	12,838	16,266
4	0,091	0,207	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	1,649	5,989	7,779	9,488	11,143	11,668	13,277	14,860	18,467
5	0,210	0,412	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	2,343	7,289	9,236	11,070	12,833	13,388	15,086	16,750	20,515
6	0,381	0,676	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	3,070	8,558	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812	18,548	22,458
7	0,598	0,989	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	3,822	9,803	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475	20,278	24,322
8	0,857	1,344	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	4,594	11,030	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090	21,955	26,124
9	1,152	1,735	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	5,380	12,242	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666	23,589	27,877
10	1,479	2,156	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865	6,179	13,442	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209	25,188	29,588
11	1,834	2,603	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578	6,989	14,631	17,275	19,675	21,920	22,618	24,725	26,757	31,264
12	2,214	3,074	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304	7,807	15,812	18,549	21,026	23,337	24,054	26,217	28,300	32,909
13	2,617	3,565	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042	8,634	16,985	19,812	22,362	24,736	25,472	27,688	29,819	34,528
14	3,041	4,075	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790	9,467	18,151	21,064	23,685	26,119	26,873	29,141	31,319	36,123
15	3,483	4,601	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547	10,307	19,311	22,307	24,996	27,488	28,259	30,578	32,801	37,697
16	3,942	5,142	5,812	6,614	6,908	7,962	9,312	11,152	20,465	23,542	26,296	28,845	29,633	32,000	34,267	39,252
17	4,416	5,697	6,408	7,255	7,564	8,672	10,085	12,002	21,615	24,769	27,587	30,191	30,995	33,409	35,718	40,790
18	4,905	6,265	7,015	7,906	8,231	9,390	10,865	12,857	22,760	25,989	28,869	31,526	32,346	34,805	37,156	42,312
19	5,407	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651	13,716	23,900	27,204	30,144	32,852	33,687	36,191	38,582	43,820
20	5,921	7,434	8,260	9,237	9,591	10,851	12,443	14,578	25,038	28,412	31,410	34,170	35,020	37,566	39,997	45,315
21	6,447	8,034	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240	15,445	26,171	29,615	32,671	35,479	36,343	38,932	41,401	46,797
22	6,983	8,643	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041	16,314	27,301	30,813	33,924	36,781	37,659	40,289	42,796	48,268
23	7,529	9,260	10,196	11,293	11,689	13,091	14,848	17,187	28,429	32,007	35,172	38,076	38,968	41,638	44,181	49,728
24	8,085	9,886	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659	18,062	29,553	33,196	36,415	39,364	40,270	42,980	45,559	51,179
25	8,649	10,520	11,524	12,697	13,120	14,611	16,473	18,940	30,675	34,382	37,652	40,646	41,566	44,314	46,928	52,620
26	9,222	11,160	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292	19,820	31,795	35,563	38,885	41,923	42,856	45,642	48,290	54,052
27	9,803	11,808	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114	20,703	32,912	36,741	40,113	43,195	44,140	46,963	49,645	55,476
28	10,391	12,461	13,565	14,847	15,308	16,928	18,939	21,588	34,027	37,916	41,337	44,461	45,419	48,278	50,993	56,892
29	10,986	13,121	14,256	15,574	16,047	17,708	19,768	22,475	35,139	39,087	42,557	45,722	46,693	49,588	52,336	58,301
30	11,588	13,787	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599	23,364	36,250	40,256	43,773	46,979	47,962	50,892	53,672	59,703

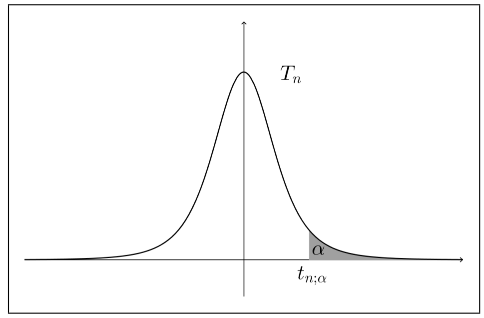


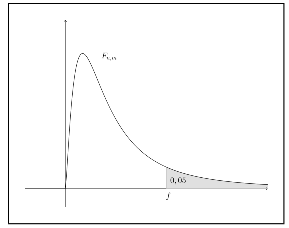
Tabela 4

Valores críticos $t_{n;\alpha}$ da t-Student

$\alpha = \mathrm{P}(T_n > t_{n;\alpha})$

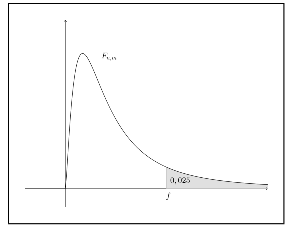
gl	Área α na cauda superior												
n	0,150	0,100	0,060	0,050	0,040	0,030	0,025	0,020	0,010	0,005	0,0025	0,002	0,001
1	1,963	3,078	5,242	6,314	7,916	10,579	12,706	15,895	31,821	63,657	127,321	159,153	318,309
2	1,386	1,886	2,620	2,920	3,320	3,896	4,303	4,849	6,965	9,925	14,089	15,764	22,327
3	1,250	1,638	2,156	2,353	2,605	2,951	3,182	3,482	4,541	5,841	7,453	8,053	10,215
4	1,190	1,533	1,971	2,132	2,333	2,601	2,776	2,999	3,747	4,604	5,598	5,951	7,173
5	1,156	1,476	1,873	2,015	2,191	2,422	2,571	2,757	3,365	4,032	4,773	5,030	5,893
6	1,134	1,440	1,812	1,943	2,104	2,313	2,447	2,612	3,143	3,707	4,317	4,524	5,208
7	1,119	1,415	1,770	1,895	2,046	2,241	2,365	2,517	2,998	3,499	4,029	4,207	4,785
8	1,108	1,397	1,740	1,860	2,004	2,189	2,306	2,449	2,896	3,355	3,833	3,991	4,501
9	1,100	1,383	1,718	1,833	1,973	2,150	2,262	2,398	2,821	3,250	3,690	3,835	4,297
10	1,093	1,372	1,700	1,812	1,948	2,120	2,228	2,359	2,764	3,169	3,581	3,716	4,144
11	1,088	1,363	1,686	1,796	1,928	2,096	2,201	2,328	2,718	3,106	3,497	3,624	4,025
12	1,083	1,356	1,674	1,782	1,912	2,076	2,179	2,303	2,681	3,055	3,428	3,550	3,930
13	1,079	1,350	1,664	1,771	1,899	2,060	2,160	2,282	2,650	3,012	3,372	3,489	3,852
14	1,076	1,345	1,656	1,761	1,887	2,046	2,145	2,264	2,624	2,977	3,326	3,438	3,787
15	1,074	1,341	1,649	1,753	1,878	2,034	2,131	2,249	2,602	2,947	3,286	3,395	3,733
16	1,071	1,337	1,642	1,746	1,869	2,024	2,120	2,235	2,583	2,921	3,252	3,358	3,686
17	1,069	1,333	1,637	1,740	1,862	2,015	2,110	2,224	2,567	2,898	3,222	3,326	3,646
18	1,067	1,330	1,632	1,734	1,855	2,007	2,101	2,214	2,552	2,878	3,197	3,298	3,610
19	1,066	1,328	1,628	1,729	1,850	2,000	2,093	2,205	2,539	2,861	3,174	3,273	3,579
20	1,064	1,325	1,624	1,725	1,844	1,994	2,086	2,197	2,528	2,845	3,153	3,251	3,552
21	1,063	1,323	1,621	1,721	1,840	1,988	2,080	2,189	2,518	2,831	3,135	3,231	3,527
22	1,061	1,321	1,618	1,717	1,835	1,983	2,074	2,183	2,508	2,819	3,119	3,214	3,505
23	1,060	1,319	1,615	1,714	1,832	1,978	2,069	2,177	2,500	2,807	3,104	3,198	3,485
24	1,059	1,318	1,612	1,711	1,828	1,974	2,064	2,172	2,492	2,797	3,091	3,183	3,467
25	1,058	1,316	1,610	1,708	1,825	1,970	2,060	2,167	2,485	2,787	3,078	3,170	3,450
26	1,058	1,315	1,608	1,706	1,822	1,967	2,056	2,162	2,479	2,779	3,067	3,158	3,435
27	1,057	1,314	1,606	1,703	1,819	1,963	2,052	2,158	2,473	2,771	3,057	3,147	3,421
28	1,056	1,313	1,604	1,701	1,817	1,960	2,048	2,154	2,467	2,763	3,047	3,136	3,408
29	1,055	1,311	1,602	1,699	1,814	1,957	2,045	2,150	2,462	2,756	3,038	3,127	3,396
30	1,055	1,310	1,600	1,697	1,812	1,955	2,042	2,147	2,457	2,750	3,030	3,118	3,385
31	1,054	1,309	1,599	1,696	1,810	1,952	2,040	2,144	2,453	2,744	3,022	3,109	3,375
32	1,054	1,309	1,597	1,694	1,808	1,950	2,037	2,141	2,449	2,738	3,015	3,102	3,365
33	1,053	1,308	1,596	1,692	1,806	1,948	2,035	2,138	2,445	2,733	3,008	3,094	3,356
34	1,052	1,307	1,595	1,691	1,805	1,946	2,032	2,136	2,441	2,728	3,002	3,088	3,348
35	1,052	1,306	1,594	1,690	1,803	1,944	2,030	2,133	2,438	2,724	2,996	3,081	3,340

Tabela 5
Valores críticos f da distribuição $F_{n,m}$
$P(F_{n,m} > f) = 0,05)$



		GL numerador																	
$\alpha = 0,05$		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	0,05	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	3	9,277	9,117	9,013	8,941	8,887	8,845	8,812	8,786	8,763	8,745	8,729	8,715	8,703	8,692	8,683	8,675	8,667	8,66
	4	6,591	6,388	6,256	6,163	6,094	6,041	5,999	5,964	5,936	5,912	5,891	5,873	5,858	5,844	5,832	5,821	5,811	5,803
	5	5,409	5,192	5,05	4,95	4,876	4,818	4,772	4,735	4,704	4,678	4,655	4,636	4,619	4,604	4,59	4,579	4,568	4,558
	6	4,757	4,534	4,387	4,284	4,207	4,147	4,099	4,06	4,027	4	3,976	3,956	3,938	3,922	3,908	3,896	3,884	3,874
GL	7	4,347	4,12	3,972	3,866	3,787	3,726	3,677	3,637	3,603	3,575	3,55	3,529	3,511	3,494	3,48	3,467	3,455	3,445
	8	4,066	3,838	3,687	3,581	3,5	3,438	3,388	3,347	3,313	3,284	3,259	3,237	3,218	3,202	3,187	3,173	3,161	3,15
d	9	3,863	3,633	3,482	3,374	3,293	3,23	3,179	3,137	3,102	3,073	3,048	3,025	3,006	2,989	2,974	2,96	2,948	2,936
e	10	3,708	3,478	3,326	3,217	3,135	3,072	3,02	2,978	2,943	2,913	2,887	2,865	2,845	2,828	2,812	2,798	2,785	2,774
n	11	3,587	3,357	3,204	3,095	3,012	2,948	2,896	2,854	2,818	2,788	2,761	2,739	2,719	2,701	2,685	2,671	2,658	2,646
o	12	3,49	3,259	3,106	2,996	2,913	2,849	2,796	2,753	2,717	2,687	2,66	2,637	2,617	2,599	2,583	2,568	2,555	2,544
m	13	3,411	3,179	3,025	2,915	2,832	2,767	2,714	2,671	2,635	2,604	2,577	2,554	2,533	2,515	2,499	2,484	2,471	2,459
i	14	3,344	3,112	2,958	2,848	2,764	2,699	2,646	2,602	2,565	2,534	2,507	2,484	2,463	2,445	2,428	2,413	2,4	2,388
n	15	3,287	3,056	2,901	2,79	2,707	2,641	2,588	2,544	2,507	2,475	2,448	2,424	2,403	2,385	2,368	2,353	2,34	2,328
a	16	3,239	3,007	2,852	2,741	2,657	2,591	2,538	2,494	2,456	2,425	2,397	2,373	2,352	2,333	2,317	2,302	2,288	2,276
d	17	3,197	2,965	2,81	2,699	2,614	2,548	2,494	2,45	2,413	2,381	2,353	2,329	2,308	2,289	2,272	2,257	2,243	2,23
o	18	3,16	2,928	2,773	2,661	2,577	2,51	2,456	2,412	2,374	2,342	2,314	2,29	2,269	2,25	2,233	2,217	2,203	2,191
r	19	3,127	2,895	2,74	2,628	2,544	2,477	2,423	2,378	2,34	2,308	2,28	2,256	2,234	2,215	2,198	2,182	2,168	2,155
	20	3,098	2,866	2,711	2,599	2,514	2,447	2,393	2,348	2,31	2,278	2,25	2,225	2,203	2,184	2,167	2,151	2,137	2,124
	21	3,072	2,84	2,685	2,573	2,488	2,42	2,366	2,321	2,283	2,25	2,222	2,197	2,176	2,156	2,139	2,123	2,109	2,096
	22	3,049	2,817	2,661	2,549	2,464	2,397	2,342	2,297	2,259	2,226	2,198	2,173	2,151	2,131	2,114	2,098	2,084	2,071
	23	3,028	2,796	2,64	2,528	2,442	2,375	2,32	2,275	2,236	2,204	2,175	2,15	2,128	2,109	2,091	2,075	2,061	2,048
	24	3,009	2,776	2,621	2,508	2,423	2,355	2,3	2,255	2,216	2,183	2,155	2,13	2,108	2,088	2,07	2,054	2,04	2,027
	25	2,991	2,759	2,603	2,49	2,405	2,337	2,282	2,236	2,198	2,165	2,136	2,111	2,089	2,069	2,051	2,035	2,021	2,007

Tabela 6
Valores críticos f da distribuição $F_{n,m}$
$P(F_{n,m} > f) = 0,05)$



		GL numerador																	
$\alpha = 0,025$		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	3	15,101	14,885	14,735	14,624	14,54	14,473	14,419	14,374	14,337	14,304	14,277	14,253	14,232	14,213	14,196	14,181	14,167	8,66
	4	9,605	9,364	9,197	9,074	8,98	8,905	8,844	8,794	8,751	8,715	8,684	8,657	8,633	8,611	8,592	8,575	8,56	5,803
	5	7,388	7,146	6,978	6,853	6,757	6,681	6,619	6,568	6,525	6,488	6,456	6,428	6,403	6,381	6,362	6,344	6,329	4,558
	6	6,227	5,988	5,82	5,695	5,6	5,523	5,461	5,41	5,366	5,329	5,297	5,269	5,244	5,222	5,202	5,184	5,168	3,874
GL	7	5,523	5,285	5,119	4,995	4,899	4,823	4,761	4,709	4,666	4,628	4,596	4,568	4,543	4,521	4,501	4,483	4,467	3,445
	8	5,053	4,817	4,652	4,529	4,433	4,357	4,295	4,243	4,2	4,162	4,13	4,101	4,076	4,054	4,034	4,016	3,999	3,15
d	9	4,718	4,484	4,32	4,197	4,102	4,026	3,964	3,912	3,868	3,831	3,798	3,769	3,744	3,722	3,701	3,683	3,667	2,936
e	10	4,468	4,236	4,072	3,95	3,855	3,779	3,717	3,665	3,621	3,583	3,55	3,522	3,496	3,474	3,453	3,435	3,419	2,774
n	11	4,275	4,044	3,881	3,759	3,664	3,588	3,526	3,474	3,43	3,392	3,359	3,33	3,304	3,282	3,261	3,243	3,226	2,646
o	12	4,121	3,891	3,728	3,607	3,512	3,436	3,374	3,321	3,277	3,239	3,206	3,177	3,152	3,129	3,108	3,09	3,073	2,544
m	13	3,996	3,767	3,604	3,483	3,388	3,312	3,25	3,197	3,153	3,115	3,082	3,053	3,027	3,004	2,983	2,965	2,948	2,459
i	14	3,892	3,663	3,501	3,38	3,285	3,209	3,147	3,095	3,05	3,012	2,979	2,949	2,923	2,9	2,879	2,861	2,844	2,388
n	15	3,804	3,576	3,415	3,293	3,199	3,123	3,06	3,008	2,963	2,925	2,891	2,862	2,836	2,813	2,792	2,773	2,756	2,328
a	16	3,729	3,502	3,341	3,219	3,125	3,049	2,986	2,934	2,889	2,851	2,817	2,788	2,761	2,738	2,717	2,698	2,681	2,276
d	17	3,665	3,438	3,277	3,156	3,061	2,985	2,922	2,87	2,825	2,786	2,753	2,723	2,697	2,673	2,652	2,633	2,616	2,23
o	18	3,608	3,382	3,221	3,1	3,005	2,929	2,866	2,814	2,769	2,73	2,696	2,667	2,64	2,617	2,596	2,576	2,559	2,191
r	19	3,559	3,333	3,172	3,051	2,956	2,88	2,817	2,765	2,72	2,681	2,647	2,617	2,591	2,567	2,546	2,526	2,509	2,155
	20	3,515	3,289	3,128	3,007	2,913	2,837	2,774	2,721	2,676	2,637	2,603	2,573	2,547	2,523	2,501	2,482	2,464	2,124
	21	3,475	3,25	3,09	2,969	2,874	2,798	2,735	2,682	2,637	2,598	2,564	2,534	2,507	2,483	2,462	2,442	2,425	2,096
	22	3,44	3,215	3,055	2,934	2,839	2,763	2,7	2,647	2,602	2,563	2,528	2,498	2,472	2,448	2,426	2,407	2,389	2,071
	23	3,408	3,183	3,023	2,902	2,808	2,731	2,668	2,615	2,57	2,531	2,497	2,466	2,44	2,416	2,394	2,374	2,357	2,048
	24	3,379	3,155	2,995	2,874	2,779	2,703	2,64	2,586	2,541	2,502	2,468	2,437	2,411	2,386	2,365	2,345	2,327	2,027
	25	3,353	3,129	2,969	2,848	2,753	2,677	2,613	2,56	2,515	2,476	2,441	2,411	2,384	2,36	2,338	2,318	2,3	2,007