Universidade Federal Fluminense

Instituto de Matemática e Estatística

Departamento de Estatística

Análise de Variância de Um Fator

Ana Maria Lima de Farias

Fábio Nogueira Demarqui

Departamento de Estatística

Novembro 2017

Sumário

Capítulo 1

Análise de variância de um fator

1.1 Introdução

No estudo da inferência para duas populações, vimos como estimar a diferença entre médias populacionais de variáveis quantitativas a partir de amostras independentes retiradas de *duas* populações. Mas, e se quisermos comparar mais de duas populações? Estudaremos, agora, o método da análise de variância ou ANOVA (do inglês ANalysis Of VAriance), que permite comparar médias de várias populações representadas por variáveis quantitativas. Assim como no caso de duas populações, algumas hipóteses sobre os dados devem ser satisfeitas. É interessante notar que, embora o método envolva comparação de variâncias, o objetivo é a comparação de médias, conforme será visto agora.

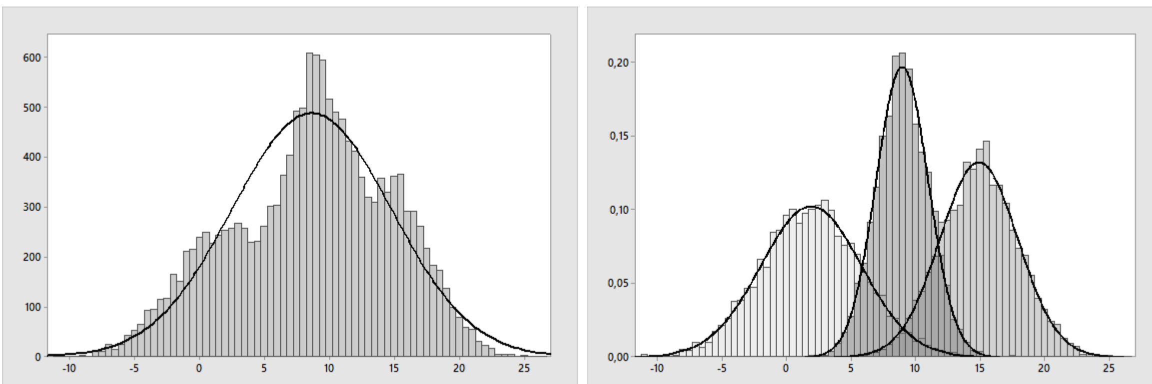
1.2 ANOVA de um fator - O Básico

Dois processos novos de produção de chaves devem ser comparados com o processo tradicional no intuito de se comparar o peso médio das chaves. Deseja-se comparar a acidez, medida pelo pH, da água de riachos em quatro grandes parques nacionais. Com o intuito de obter a maior produtividade, compara-se a produção de milho em lotes plantados sob quatro diferentes níveis de concentração de fertilizante. Em todos esses exemplos, temos uma população (chaves e seu peso, riachos e seu pH, lotes e produção de milho) categorizada segundo um fator (tipo de processo no caso das chaves, os parques nacionais no caso do pH da água e os níveis de concentração de fertilizante no caso da produção de milho). Esse é o contexto da **análise da variância de um fator**: uma população, representada por uma variável quantitativa X, categorizada por um único fator com k níveis. Amostras aleatórias simples independentes são retiradas para cada um dos níveis do fator. Os níveis do fator muitas vezes são chamados de tratamentos, grupos ou sub-populações.

Na Tabela 1.1 apresentamos um esquema das informações básicas para uma análise de variância. Temos amostras independentes dos diferentes tratamentos e nosso objetivo é determinar se essas observações vêm de uma única população (Figura 1.1a) ou de populações distintas (Figura 1.1b).

Tabela 1.1 – Dados típicos para uma Análise de Variância de um fator

Tratamento		Amostra				Estatísticas amostrais		
1	$X_1 \sim (\mu_1; \sigma_1^2)$	X_{11}	X_{12}	$\cdots$	X_{1n_1}	$\overline{X}_{1\cdot}$	S_1^2	n_1
2	$X_2 \sim (\mu_2; \sigma_2^2)$	X_{21}	X_{22}	$\cdots$	X_{2n_2}	$\overline{X}_{2\cdot}$	S_2^2	n_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	$X_i \sim (\mu_i; \sigma_i^2)$	X_{i1}	X_{i2}	$\cdots$	X_{in_i}	$\overline{X}_{i\cdot}$	S_i^2	n_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$X_k \sim (\mu_k; \sigma_k^2)$	X_{k1}	X_{k2}	$\cdots$	X_{kn_k}	$\overline{X}_{k\cdot}$	S_k^2	n_k



(a) Uma única população?

(b) Ou 3 populações?

Figura 1.1 – Problema típico da análise de variância

1.2.1 Definições e propriedades básicas

Vamos, agora, estabelecer definições e propriedades básicas.

- Tamanho amostral total

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k \tag{1.1}$$

- Total e média amostrais para o tratamento i

$$X_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \tag{1.2}$$

$$\overline{X}_{i\cdot} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = \frac{1}{n_i} X_{i\cdot} \tag{1.3}$$

O primeiro subscrito em X_{ij} indica o tratamento e o segundo subscrito, o elemento da respectiva amostra. O ponto em $X_{i\cdot}$ indica que estamos somando ao longo de todos os elementos do tratamento i.

- Total e média amostrais gerais

$$X_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = \sum_{i=1}^{k} X_{i\cdot} \tag{1.4}$$

$$\overline{X}_{\cdot\cdot} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = \frac{1}{n} X_{\cdot\cdot} \tag{1.5}$$

Note que aqui estamos tratando todos os dados conjuntamente, como se fossem amostra de uma única população (Figura 1.1a).

- Desvios em torno de médias
  - ⋆ Observações em relação à média geral

$$X_{ij} - \overline{X}_{\cdot\cdot} \qquad \text{(segmentos em verde na Figura 1.2)} \tag{1.6}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_{\cdot\cdot}) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\overline{X}_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} - n\overline{X}_{\cdot\cdot} = 0 \tag{1.7}$$

  - ⋆ Médias dos tratamentos em relação à média geral

$$\overline{X}_{i\cdot} - \overline{X}_{\cdot\cdot} \qquad \text{(segmentos em vermelho na Figura 1.2)} \tag{1.8}$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{X}_{i\cdot} - \overline{X}_{\cdot\cdot}) = \sum_{i=1}^{k} n_i\overline{X}_{i\cdot} - \overline{X}_{\cdot\cdot}\sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{i=1}^{k} n_i\frac{X_{i\cdot}}{n_i} - \frac{X_{\cdot\cdot}}{n}n = \sum_{i=1}^{k} X_{i\cdot} - X_{\cdot\cdot} = 0 \tag{1.9}$$

Note que aqui levamos em consideração o número de observações em cada tratamento.

  - ⋆ Observações em relação à média do respectivo tratamento

$$X_{ij} - \overline{X}_{i\cdot} \qquad \text{(segmentos em azul na Figura 1.2)} \tag{1.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_{i\cdot}) = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} - \sum_{j=1}^{n_i}\overline{X}_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} - n_i\overline{X}_{i\cdot} = 0 \tag{1.11}$$

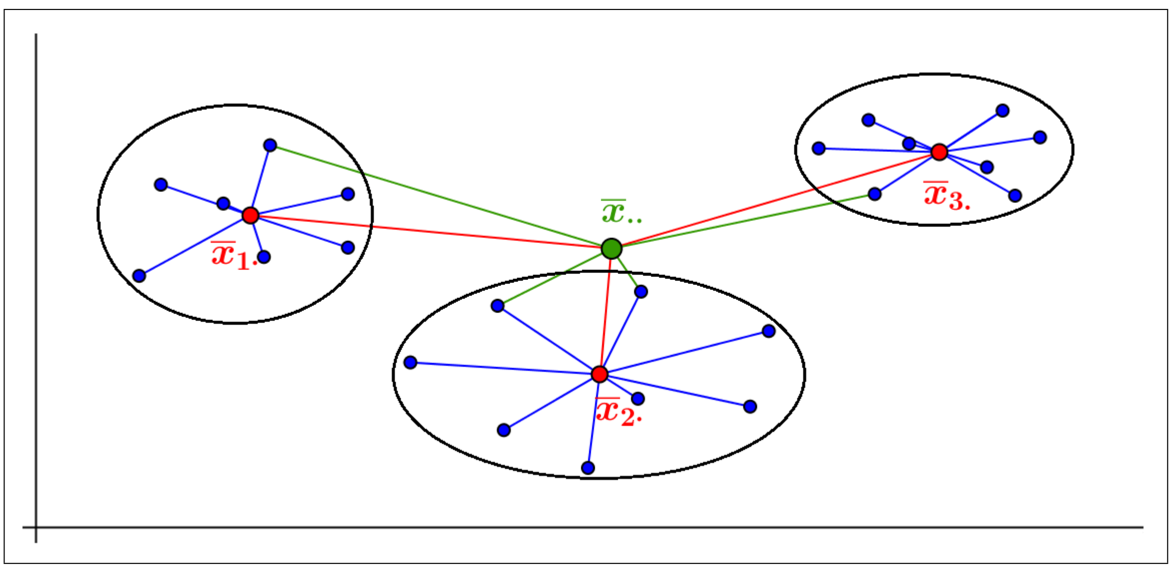


Figura 1.2 – Ilustração dos desvios em torno das médias

1.2.2 Decomposição da soma dos quadrados total

O método da análise de variância se baseia nas somas desses desvios, mas elevados ao quadrado – uma medida de variabilidade.

Note que é válida a seguinte igualdade:

$$X_{ij} - \overline{X}_{\cdot\cdot} = X_{ij} - \overline{X}_{i\cdot} + \overline{X}_{i\cdot} - \overline{X}_{\cdot\cdot}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e somando ao longo de todas as observações, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_{\cdot\cdot})^2 &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot}+\overline{X}_{i\cdot}-\overline{X}_{\cdot\cdot})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(\overline{X}_{i\cdot}-\overline{X}_{\cdot\cdot})^2+2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})(\overline{X}_{i\cdot}-\overline{X}_{\cdot\cdot}) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})^2+\sum_{i=1}^{k}(\overline{X}_{i\cdot}-\overline{X}_{\cdot\cdot})^2\sum_{j=1}^{n_i}1+2\sum_{i=1}^{k}(\overline{X}_{i\cdot}-\overline{X}_{\cdot\cdot})\underbrace{\cancel{\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})}}_{0 \text{ por } 1.11}
\end{aligned}$$

Resulta que

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_{\cdot\cdot})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})^2+\sum_{i=1}^{k}n_i(\overline{X}_{i\cdot}-\overline{X}_{\cdot\cdot})^2$$

ou equivalentemente

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_{\cdot\cdot})^2 = \sum_{i=1}^{k}n_i(\overline{X}_{i\cdot}-\overline{X}_{\cdot\cdot})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})^2 \tag{1.12}$$

O membro no lado esquerdo de (1.12) é a soma dos quadrados dos desvios de todas as observações em torno da média geral, uma medida de variabilidade geral dos dados, que é chamada *soma dos quadrados total* (SQT), isto é:

$$\text{SQT} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_{\cdot\cdot})^2 \tag{1.13}$$

O primeiro somatório no lado direito de (1.12) é uma medida de variação entre as médias dos tratamentos e a média geral (segmentos em vermelho na Figura 1.2); sendo assim, ele é chamado de **soma de quadrados devida ao tratamento** ou **soma de quadrados entre grupos**. Vamos denotá-la por SQG.

$$\text{SQG} = \sum_{i=1}^{k}n_i(\overline{X}_{i\cdot}-\overline{X}_{\cdot\cdot})^2 \tag{1.14}$$

No segundo somatório no lado direito de (1.12) temos uma medida de variação entre elementos do mesmo grupo, uma vez que são considerados os desvios de cada elemento e a média do seu grupo (segmentos em azul na Figura 1.2). Essa soma representa o que deixou de ser explicado pelo fator A e representa uma variabilidade dentro dos grupos. Assim, é chamada de **soma de quadrados dos erros** ou **soma de quadrado dentro dos grupos** e a denotaremos por SQE.

$$\text{SQE} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})^2 = \sum_{i=1}^{k}(n_i-1)S_i^2 \tag{1.15}$$

Temos, assim, a decomposição

$$\text{SQT} = \text{SQG} + \text{SQE} \tag{1.16}$$

1.2.3 Graus de liberdade

A cada soma de quadrados está associado um número de graus de liberdade, que pode ser pensado como o número de parcelas independentes no somatório.

- Soma de quadrados total

  Sabemos, por (1.7), que a soma de todos os desvios em torno da média geral é 0; sendo assim, se conhecermos $n-1$ dos n desvios $X_{ij} - \overline{X}_{..}$, o n-ésimo fica determinado, ou seja, há $n-1$ parcelas independentes no somatório. Logo, a soma de quadrados total tem $n-1$ graus de liberdade:

  $$\text{SQT} \to \text{gl} = n-1$$

  Podemos pensar nos graus de liberdade da seguinte forma também: temos n observações para estimar a média geral; sendo assim, "sobram" $n-1$ graus de liberdade.

- Soma de quadrados devida ao tratamento

  De maneira análoga, sabemos, por (1.9), que a soma das k parcelas $n_i(\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..})$ é zero, e assim, há $k-1$ parcelas independentes, o que leva a $k-1$ graus de liberdade.

  $$\text{SQG} \to \text{gl} = k-1$$

- Soma de quadrados dos erros

  Podemos ver, por (1.11) que, para cada tratamento i, a soma dos desvios das observações em torno da média do respectivo grupo é 0; sendo assim, se conhecermos $n_i - 1$ dos n_i desvios $X_{ij} - \overline{X}_{i.}$, o n_i-ésimo fica determinado. Logo, cada soma de quadrados $\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_{i.})^2$ tem $n_i - 1$ graus de liberdade e, portanto, a soma de quadrados devida aos erros tem $(n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_k-1) = n-k$ graus de liberdade.

  $$\text{SQE} \to \text{gl} = n-k$$

  Podemos pensar nos graus de liberdade da seguinte forma também: temos n observações para estimar k médias; sendo assim, "sobram" $n-k$ graus de liberdade.

Note que a igualdade das somas de quadrados vale também para o número de graus de liberdade:

$$\text{SQT} = \text{SQG} + \text{SQE} \Rightarrow \text{gl}_{\text{SQT}} = \text{gl}_{\text{SQG}} + \text{gl}_{\text{SQE}}$$

1.2.4 Médias quadráticas

A divisão de uma soma de quadrados pelo seu número de graus de liberdade resulta em uma *média quadrática*. Sendo assim, temos

$$\text{MQG} = \frac{\text{SQG}}{k-1} \tag{1.17}$$

$$\text{MQE} = \frac{\text{SQE}}{n-k} \tag{1.18}$$

Note que a média quadrática total nada mais é que a variância S_X^2 dos dados; sendo assim, ela não recebe um outro nome especial. COm relação à MQE, temos

$$\text{MQE} = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)S_i^2 = S_p^2 \tag{1.19}$$

ou seja, a MQE nada mais é que a média ponderada (pelos graus de liberdade) das variâncias dos k grupos, resultado análogo ao visto no caso de duas populações com variâncias iguais..

1.2.5 Tabela da ANOVA

As informações acima costumam ser resumidas em uma tabela, chamada de tabela da ANOVA, cuja forma geral é

Tabela 1.2 – Tabela da ANOVA de um fator

Fonte de variação	SQ	GL	MQ
Fator ou Grupo	SQG	$k-1$	MQG
Erro	SQE	$n-k$	MQE
Total	SQT	$n-1$	

Na próxima seção veremos como usar essas informações para testar a hipótese de igualdade das médias.

1.2.6 Fórmulas computacionais

Assim como no cálculo da variância S^2, vamos apresentar fórmulas alternativas que, além de serem numericamente mais precisas, são mais fáceis de serem obtidas em cálculos manuais. Tais fórmulas são completamente análogas à fórmula já vista para S^2.

- SQT

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_{..})^2 &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}^2-2X_{ij}\overline{X}_{..}+\overline{X}_{..}^2) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}^2-2\overline{X}_{..}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}+\overline{X}_{..}^2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}1 \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}^2-2n\overline{X}_{..}^2+n\overline{X}_{..}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}^2-n\overline{X}_{..}^2
\end{aligned}$$

$$\text{SQT}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_{..})^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}^2-n\overline{X}_{..}^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}^2-\frac{X_{..}^2}{n} \tag{1.20}$$

- SQG

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..})^2 &= \sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{X}_{i.}^2 - 2\overline{X}_{i.}\overline{X}_{..} + \overline{X}_{..}^2) \\
&= \sum_{i=1}^{k} n_i\overline{X}_{i.}^2 - 2\overline{X}_{..}\sum_{i=1}^{k} n_i\overline{X}_{i.} + \overline{X}_{..}^2\sum_{i=1}^{k} n_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{X_{i.}^2}{n_i} - 2\overline{X}_{..}\sum_{i=1}^{k} X_{i.} + n\overline{X}_{..}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{X_{i.}^2}{n_i} - 2\overline{X}_{..}n\overline{X}_{..} + n\overline{X}_{..}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{X_{i.}^2}{n_i} - n\overline{X}_{..}^2
\end{aligned}$$

Logo,

$$SQG = \sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{X_{i.}^2}{n_i} - n\overline{X}_{..}^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{X_{i.}^2}{n_i} - \frac{X_{..}^2}{n} \tag{1.21}$$

- SQE

$$SQE = SQT - SQG = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{k} \frac{X_{i.}^2}{n_i} \tag{1.22}$$

Com essas fórmulas mais simples, a tabela da ANOVA se torna

Tabela 1.3 – Tabela da ANOVA de um fator com fórmulas computacionais

Fonte de variação	SQ	GL	MQ
Fator ou Grupo	$SQG = \sum_{i=1}^{k} \frac{X_{i.}^2}{n_i} - \frac{X_{..}^2}{n}$	$k-1$	$MQG = \frac{SQG}{k-1}$
Erro	$SQE = SQT - SQG$	$n-k$	$MQE = \frac{SQE}{n-k}$
Total	$SQT = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2 - \frac{X_{..}^2}{n}$	$n-1$	

EXEMPLO 1.1

Considere os seguintes dados no contexto da ANOVA:

Grupo 1	33	27	27	32	27	31	23	26	34
Grupo 2	27	35	32	28	35	39	33		
Grupo 3	30	36	33	35	33	28			

Construa a tabela da ANOVA, identificando todos os tamanhos amostrais.

Solução

Organizando os cálculos em uma tabela para cálculos manuais, temos:

	Grupo 1		Grupo 2		Grupo 3		3 grupos juntos	
Obs.	x_{1j}	x_{1j}^2	x_{2j}	x_{2j}^2	x_{3j}	x_{3j}^2		
1	33	1089	27	729	30	900		
2	27	729	35	1225	36	1296		
3	27	729	32	1024	33	1089		
4	32	1024	28	784	35	1225		
5	27	729	35	1225	33	1089		
6	31	961	39	1521	28	784		
7	23	529	33	1089				
8	26	676						
9	34	1156						
Soma	260	7622	229	7597	195	6383	684	21602

$$n_1 = 9 \qquad n_2 = 7 \qquad n_3 = 6 \qquad\qquad n = 9 + 7 + 6 = 22$$

$$x_{1.} = 260 \Rightarrow x_{1.}^2 = 260^2 = 67600$$

$$x_{2.} = 229 \Rightarrow x_{2.}^2 = 229^2 = 52441$$

$$x_{3.} = 195 \Rightarrow x_{3.}^2 = 195^2 = 38025$$

$$x_{..} = 684 \Rightarrow x_{..}^2 = 684^2 = 467856$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}^2 = 7622 \qquad \sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}^2 = 7597 \qquad \sum_{j=1}^{n_2} x_{3j}^2 = 6383$$

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 = 21602$$

$$\text{SQG} = \frac{67600}{9} + \frac{52441}{7} + \frac{38025}{6} - \frac{467856}{22} = 74,0007$$

$$\text{SQT} = 21602 - \frac{467856}{22} = 335,8182$$

$$\text{SQE} = 335,8182 - 74,0007 = 261,8175$$

A tabela da ANOVA é

Fonte de variação	SQ	GL	MQ
Fator A	74,0007	2	37,00035
Erro	261,8175	19	13,7799
Total	335,8182	21	

♦♦

1.3 ANOVA de um fator - O Modelo

Assim como no caso do teste t para comparação de duas médias, o modelo da ANOVA exige que as populações $X_1, X_2, \cdots, X_k$ sejam normais e, além disso, as variâncias devem ser iguais. Assim, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \cdots, k$ e amostras aleatórias simples independentes de tamanhos $n_1, n_2, \cdots, n_k$ são retiradas dessas populações. Esses pressupostos podem ser resumidos através do seguinte modelo

$$X_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij} \qquad \epsilon_{ij} \sim N(0; \sigma^2) \text{ iid} \tag{1.23}$$

A hipótese de variâncias iguais é a hipótese de *homoscedasticidade* (mesma variação).

1.3.1 O teste da ANOVA

As hipóteses

A hipótese de interesse na análise da variância é se as médias são iguais, ou seja

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k \tag{1.24}$$

com hipótese alternativa dada por

$$H_1 : \mu_i \neq \mu_j \text{ para algum } i \neq j \tag{1.25}$$

Note que aqui não temos uma hipótese alternativa simples; não temos como dizer se é um teste bilateral ou unilateral!

A estatística de teste

Pode-se mostrar que, se H_0 for verdadeira, então

$$F_0 = \frac{\text{MQG}}{\text{MQE}} \sim F_{k-1,n-k} \tag{1.26}$$

A região crítica

Para definir a região crítica, vamos calcular o valor esperado de MQG e MQE.

- MQG

  Por (1.21), temos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(SQG) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathrm{E}(X_{i\cdot}^2)}{n_i} - \frac{1}{n}\,\mathrm{E}(X_{\cdot\cdot}^2) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathrm{Var}(X_{i\cdot}) + [\mathrm{E}(X_{i\cdot})]^2}{n_i} - \frac{1}{n}\left\{\mathrm{Var}(X_{\cdot\cdot}) + [\mathrm{E}(X_{\cdot\cdot})]^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i\sigma^2 + n_i^2\mu_i^2}{n_i} - \frac{1}{n}n\sigma^2 - \frac{(n_1\mu_1 + n_2\mu_2 + \cdots + n_k\mu_k)^2}{n} \\
&= k\sigma^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i^2 - \sigma^2 - \frac{\left[\sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i\right]^2}{n} \\
&= (k-1)\sigma^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i^2 - n\left[\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i\mu_i}{n}\right]^2
\end{aligned}
$$

O somatório dentro dos colchetes é uma média ponderada das médias populacionais dos k tratamentos. Assim, vamos denotá-la por $\mu_\cdot$, isto é

$$
\mu_\cdot = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i \tag{1.27}
$$

Temos, então, que

$$
\mathrm{E}(SQG) = (k-1)\sigma^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i^2 - n\mu_\cdot^2
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} n_i(\mu_i - \mu_\cdot)^2 &= \sum_{i=1}^{k} n_i(\mu_i^2 - 2\mu_i\mu_\cdot + \mu_\cdot^2) \\
&= \sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i^2 - 2\mu_\cdot\sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i + \mu_\cdot^2\sum_{i=1}^{k} n_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i^2 - 2n\mu_\cdot^2 + n\mu_\cdot^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i^2 - n\mu_\cdot^2
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\mathrm{E}(SQG) = (k-1)\sigma^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i(\mu_i - \mu_\cdot)^2
$$

e, portanto,

$$
\mathrm{E}(MQG) = \sigma^2 + \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k} n_i(\mu_i - \mu_\cdot)^2 \tag{1.28}
$$

- MQE

  Por (1.22), temos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E(SQE)} &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \mathrm{E}(X_{ij}^2) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathrm{E}(X_{i\cdot}^2)}{n_i} \\
&= \sum_{i=1}^{k}\left[\sum_{j=1}^{n_i} \mathrm{Var}(X_{ij}) + [\mathrm{E}(X_{ij})]^2\right] - \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathrm{Var}(X_{i\cdot}) + [\mathrm{E}(X_{i\cdot})]^2}{n_i} \\
&= n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \mu_i^2 - \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i\sigma^2 + (n_i\mu_i)^2}{n_i} \\
&= n\sigma^2 + \cancel{\sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i^2} - k\sigma^2 - \cancel{\sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i^2} \\
&= (n-k)\sigma^2
\end{aligned}
$$

  e, portanto,

$$
\mathrm{E(MQE)} = \sigma^2 \tag{1.29}
$$

- A região crítica

  De (1.29) podemos ver que a média quadrática dos erros é um estimador não viesado para a variância comum σ^2. Por outro lado, se H_0 for verdadeira, MQG também é um estimador não viesado de σ^2, mas, em geral, $\mathrm{E(MQG)} > \mathrm{E(MQE)} = \sigma^2$. Logo, sob a hipótese alternativa H_1, o valor esperado do numerador da estatística de teste (1.26) será maior que o valor esperado do denominador. Sendo assim, rejeitaremos H_0 para valores grandes da estatística de teste, ou seja, o *teste F da ANOVA é um teste unilateral à direita* cuja região crítica é

$$
F_0 = \frac{\mathrm{MQG}}{\mathrm{MQE}} > F_{k-1,n-k;\alpha} \tag{1.30}
$$

1.3.2 Estimação das médias

O estimador pontual da média μ_i é $\overline{X}_{i\cdot}$. Para construir o intervalo de confiança, usamos MQE como estimador da variância σ^2 e a distribuição amostral será a $t-$Student com $n-k$ graus de liberdade, que é o número de graus de liberdade da SQE. Assim, o intervalo de confiança de nível $1-\alpha$ para μ_i é

$$
\left[\overline{x}_{i\cdot} - t_{n-k;\alpha/2}\sqrt{\frac{\mathrm{MQE}}{n_i}}\,;\, \overline{x}_{i\cdot} + t_{n-k;\alpha/2}\sqrt{\frac{\mathrm{MQE}}{n_i}}\right] \tag{1.31}
$$

EXEMPLO 1.2

Vamos completar o Exemplo 1.1, fazendo o teste da hipótese de igualdade das três médias. Para isso, completamos a tabela da ANOVA acrescentando uma coluna com o valor da estatística F e outra coluna com o valor P.

Fonte de variação	SQ	GL	MQ	F	Valor P
Fator A	74,0007	2	37,00035	2,685	0,093979
Erro	261,8175	19	13,7799		
Total	335,8182	21			

A estatística F foi calculada como

$$F = \frac{37,00035}{13,7799} = 2685$$

e o valor P foi calculado com auxílio do Minitab como

$$P = \mathrm{P}(F_{2,19} > 2,685) = 0,093979$$

O valor P é razoavelmente grande; assim, não rejeitaríamos a hipótese de de igualdade das médias para níveis de significância usuais como 5%, por exemplo.

Vamos, agora, calcular os intervalos de confiança de 95% para as médias.

$t_{19;0,025} = 2,09302$ $\qquad$ $2,09032\sqrt{\text{MQE}} = 2,09032\sqrt{13,7799} = 7,7595$

$$\overline{x}_{1.} = \frac{260}{9} = 28,8889 \qquad \overline{x}_{2.} = \frac{229}{7} = 32,7143 \qquad \overline{x}_{3.} = \frac{195}{6} = 32,5000$$

- Intervalo de confiança para μ_1

$$\left[28,8889 - \frac{7,7595}{\sqrt{9}}\,;\, 28,8889 + \frac{7,7595}{\sqrt{9}}\right] = [26,3024\,;\, 31,4754]$$

- Intervalo de confiança para μ_2

$$\left[32,7143 - \frac{7,7595}{\sqrt{7}}\,;\, 32,7143 + \frac{7,7595}{\sqrt{7}}\right] = [29,7815\,;\, 35,6471]$$

- Intervalo de confiança para μ_3

$$\left[32,5 - \frac{7,7595}{\sqrt{6}}\,;\, 32,5 + \frac{7,7595}{\sqrt{6}}\right] = [29,3322\,;\, 35,6678]$$

Na Figura 1.3 apresenta-se a saída do Minitab para os dados deste exemplo. Com exceção do Sumário do Modelo, todas as outras informações foram calculadas nos exemplos. O desvio padrão combinado (última linha) é simplesmente a raiz quadrada da MQE. Nas Figuras 1.4 e 1.5 são exibidos os boxplots dos dados e os intervalos de confiança para as médias, respectivamente.

ANOVA com um fator: G1; G2; G3

```
Método

Hipótese nula             Todas as médias são iguais
Hipótese alternativa      No mínimo uma média é diferente
Nível de significância    α = 0,05

Assumiu-se igualdade de variâncias para a análise


Informações dos Fatores

Fator  Níveis  Valores
Fator       3  G1; G2; G3


Análise de Variância

Fonte   GL  SQ (Aj.)  QM (Aj.)  Valor F  Valor-P
Fator    2     74,00     37,00     2,69    0,094
Erro    19    261,82     13,78
Total   21    335,82


Sumário do Modelo

      S      R2  R2(aj)  R2(pred)
3,71212  22,04%  13,83%     0,00%


Médias

Fator  N  Média  DesvPad     IC de 95%
G1     9  28,89     3,72  (26,30; 31,48)
G2     7  32,71     4,19  (29,78; 35,65)
G3     6  32,50     3,02  (29,33; 35,67)

DesvPad Combinado = 3,71212
```

Figura 1.3 – Saída do Minitab para o Exemplo 1.1

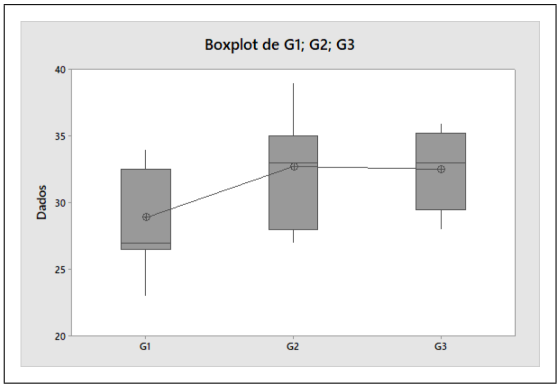


Figura 1.4 – Boxplot dos dados do Exemplo 1.1

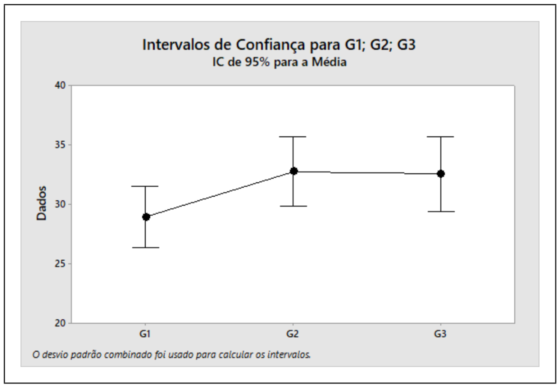


Figura 1.5 – IC para as médias do Exemplo 1.1

1.4 Verificação das hipóteses do modelo

O modelo da ANOVA se baseia em três hipóteses fundamentais:

1. Independência
2. Normalidade
3. Homogeneidade de variâncias

Gráficos de resíduos são uma importante ferramenta na análise da independência. Se as hipóteses do modelo são satisfeitas, os resíduos (valor observado - valor ajustado) não devem apresentar qualquer tipo de estrutura. No caso da ANOVA de um fator, o valor ajustado é simplesmente a média amostral do grupo.

1.4.1 Independência

Essa hipótese estabelece que deve haver independência entre as observações dentro de cada grupo e entre grupos. No planejamento do experimento é fundamental que a obtenção dos dados seja feita de forma apropriada, pois a violação da hipótese de independência é um problema sério, difícil de se corrigir. A aleatorização do experimento é um passo importante para obtenção da independência.

1.4.2 Normalidade

Os testes de normalidade já vistos devem ser aplicados a cada um dos grupos.

1.4.3 Homogeneidade de variâncias

A hipótese de homoscedasticidade pode ser verificada com alguns testes de

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2 \tag{1.32}$$

contra a alternativa de que nem todas as variâncias são iguais:

$$H_1 : \sigma_i \neq \sigma_j \quad \text{para algum } i \neq j\,,\ j = 1, 2, \cdots, k \tag{1.33}$$

Veremos, aqui, dois desses testes.

Teste de Bartlett

O teste de Bartlett se baseia em uma estatística que é distribuída aproximadamente como uma qui-quadrado com $k-1$ graus de liberdade. No entanto, esse teste é bastante sensível à hipótese de normalidade. A estatística de teste é

$$X^2 = \frac{(n-k)\ln(\text{MQE}) - \displaystyle\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\ln(S_i^2)}{1 + \dfrac{1}{3(k-1)}\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\left(\dfrac{1}{n_i - 1}\right) - \dfrac{1}{n-k}\right]} \tag{1.34}$$

e, sob a hipótese nula de igualdade de variâncias, $X^2 \approx \chi^2_{k-1}$. Esse é um teste unilateral superior, ou seja, rejeita-se H_0 para valores grandes de X^2, ou seja, rejeita-se a hipótese nula se

$$X^2 > \chi^2_{k-1;\alpha}$$

Teste de Levene

O teste de Levene é mais robusto contra falta de normalidade dos dados e sua estatística segue uma distribuição F sob H_0:

$$L = \frac{n-k}{k-1} \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{Z}_{i\cdot} - \overline{Z}_{\cdot\cdot})^2}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Z_{ij} - \overline{Z}_{i\cdot})^2} \underbrace{=}_{\text{sob } H_0} F_{k-1,n-k} \tag{1.35}$$

em que

$$Z_{ij} = \left|X_{ij} - \overline{X}_{i\cdot}\right| \qquad \text{desvio absoluto dos } X_{ij} \text{ em relação à média do grupo} \tag{1.36}$$

$$\overline{Z}_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij} \qquad \text{média dos } Z_{ij} \text{ no grupo } i \tag{1.37}$$

$$\overline{Z}_{\cdot\cdot} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij} \qquad \text{média geral dos } Z_{ij} \tag{1.38}$$

Esse também é um teste unilateral superior, ou seja, a região crítica é

$$L > F_{k-1,n-k;\alpha}$$

1.5 Exercícios propostos

1. O tempo de resposta (em milissegundos) foi determinado para três diferentes tipos de circuitos usados em uma calculadora eletrônica. Os dados são os seguintes:

Tipo de circuito	Tempo de resposta				
1	19	22	20	18	25
2	20	21	33	27	40
3	16	15	18	26	17

   (a) Teste a hipótese de que os três tipos de circuito têm o mesmo tempo médio de resposta. Use $\alpha = 0,05$.

   (b) Calcule intervalos de confiança de 95% para os três tempos médios de resposta.

2. Breitling vende pulseiras para relógios masculinos em ouro, prata e titânio. Obteve-se uma amostra aleatória de cada tipo (em estilos semelhantes), e o peso de cada pulseira (em gramas) foi registrado. Os dados constam da tabela que segue.

Pulseira	Peso (g)							
Ouro	7,9	7,2	7,8	8,1	7,9	8,3	9,9	
Prata	9,5	7,0	8,7	7,6	7,5	9,3	7,3	6,9
Titânio	6,7	7,1	6,5	7,1	5,5	6,7	4,9	3,9

(a) Realize um teste de análise de variância para determinar se há alguma evidência de que os pesos médios de algum par de tipos de pulseira sejam diferentes. Inclua uma tabela ANOVA. Use $\alpha = 0,05$.

(b) Calcule o peso médio amostral para cada amostra e calcule os intervalos de confiança de 95% para cada um dos pesos populacionais. Dada sua conclusão na parte (a), quais pares de médias populacionais você acha que sejam diferentes?

3. Realizou-se um estudo para se comparar a quantidade de sal em batatas fritas. Obtiveram-se amostras aleatórias de quatro variedades e registrou-se a quantidade de sal em cada porção de 1 onça (em mg de sódio). Os dados são apresentados na tabela que segue.

Marca	Sódio (mg)					
A	338	155	239	184	185	261
B	235	238	251	229	233	232
C	164	197	135	214	148	230
D	290	343	294	373	306	357

Realize um teste de análise de variância para determinar se há alguma evidência de que a quantidade populacional média de sal por porção seja diferente para, pelo menos, duas variedades. Use $\alpha = 0,05$.

Capítulo 2

ANOVA de um fator - Análise de acompanhamento

2.1 Introdução

Quando o teste F acusa diferença significativa entre as médias dos k tratamentos, não há informação de qual, ou quais, são diferentes. Sendo assim, é necessária uma análise de acompanhamento (*follow up*) para identificar aonde está a diferença. Note que essa análise só faz sentido se o teste F foi significante.

Como estamos comparando várias médias, tal análise envolve múltiplas comparações de pares de médias. Uma possível solução seria analisar individualmente cada par possível de médias através de um teste t com nível de significância *individual* α. Em um teste de igualdade de várias médias, ainda queremos manter pequena a probabilidade de erro global e assim define-se a *taxa de erro global* (em inglês, family-wise error rate) como sendo a probabilidade de se cometer pelo menos um erro tipo I entre todas as comparações aos pares. Suponhamos que haja 4 grupos; então, existem $(4 \cdot 3)/2 = 6$ pares de médias a comparar. Se fizermos as 6 comparações através de testes t independentes com $\alpha = 0,05$, a probabilidade de obtermos *pelo menos um* teste significante (dentre os 6) quando H_0 é verdadeira será $1 - 0,95^6 = 0,265$, bem maior que 0,05!

Em geral, se há m pares de médias a comparar, a taxa de erro global é

$$\overline{\alpha} = 1 - (1 - \alpha)^m \tag{2.1}$$

Vamos denotar por E_i o evento "rejeitar $H_0 \,|\, H_0$ é verdadeira no teste i". Então, se o nível de significância individual é α, resulta que

$$\overline{\alpha} = \mathrm{P}(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_m) \leq \sum_{i=1}^{m} \mathrm{P}(E_i) = m\alpha \tag{2.2}$$

Na Figura 2.1 ilustra-se a variação da taxa de erro global em função do número de testes individuais sendo feitos, para um nível de significância individual $\alpha = 0,05$. Podemos ver que a taxa de erro global cresce rapidamente à medida que aumento o número de comparações sendo feitas. Há várias propostas para tratar a comparação simultânea de várias médias, de forma a controlar a taxa de erro global, mas não há consenso sobre qual é o "melhor". Apresentaremos agora alguns desses métodos.

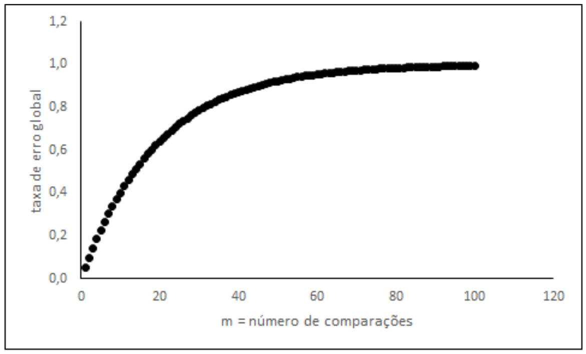


Figura 2.1 – Taxa de erro global para nível de significância individual $\alpha = 0,05$

2.2 Procedimento de comparações múltiplas de Bonferroni

Suponha que temos k grupos e, portanto, $c = \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{k}$ pares de médias a comparar. Cada par de médias será comparado através de um teste t, com a variância sendo estimada pela MQE. Mas, o nível de significância de cada teste individual será o nível de significância global dividido por c. Essa é uma forma de "corrigir" a taxa de erro global, tendo em conta o resultado dado em (2.2).

O intervalo de confiança de Bonferroni de nível $1 - alpha$ para comparação das médias das populações i_1 e i_2 tem, então, limites dados por

$$(\overline{x}_{i_1\cdot} - \overline{x}_{i_2\cdot}) \pm t_{n-k;\alpha/(2c)} \sqrt{\text{MQE}\left(\frac{1}{n_{i_1}} + \frac{1}{n_{i_2}}\right)} \tag{2.3}$$

Os graus de liberdade da $t-$Student vêm da média quadrática dos erros. O nível de significância correspondente a cada intervalo individual é ajustado para o número de comparações: note que $\alpha/(2c) = (\alpha/2)/c$.

Com cada um desses intervalos testa-se a hipótese

$$H_0 : \overline{x}_{i_1\cdot} = \overline{x}_{i_2\cdot}$$

e rejeita-se H_0 se o 0 não estiver contido no intervalo de confiança.

EXEMPLO 2.1 Pulseiras de relógios (Kokoska)

Pulseiras para relógios masculinos são feitas em ouro, prata e titânio. Obteve-se uma amostra aleatória de cada tipo (em estilos semelhantes), e o peso de cada pulseira (em gramas) foi registrado. Os dados constam da tabela que segue.

Pulseira	Peso (g)							
Ouro	7,9	7,2	7,8	8,1	7,9	8,3	9,9	
Prata	9,5	7,0	8,7	7,6	7,5	9,3	7,3	6,9
Titânio	6,7	7,1	6,5	7,1	5,5	6,7	4,9	3,9

Na Figura 2.2 apresenta-se a saída do Minitab da ANOVA.

ANOVA com um fator: Ouro; Prata; Titânio

```
Método
Hipótese nula             Todas as médias são iguais
Hipótese alternativa      No mínimo uma média é diferente
Nível de significância    α = 0,05

Assumiu-se igualdade de variâncias para a análise

Informações dos Fatores
Fator  Níveis  Valores
Fator       3  Ouro; Prata; Titânio

Análise de Variância
Fonte  GL  SQ (Aj.)  QM (Aj.)  Valor F  Valor-P
Fator   2     21,20    10,601     9,97    0,001
Erro   20     21,27     1,064
Total  22     42,47

Sumário do Modelo
      S      R2  R2(aj)  R2(pred)
1,03131  49,92%  44,91%    34,04%

Médias
Fator    N  Média  DesvPad     IC de 95%
Ouro     7  8,157    0,840  (7,344; 8,970)
Prata    8  7,975    1,038  (7,214; 8,736)
Titânio  8  6,050    1,165  (5,289; 6,811)

DesvPad Combinado = 1,03131
```

Figura 2.2 – Saída do Minitab para o Exemplo 2.1

Para um nível de significância global de $\alpha = 0,05$, o nível de significância individual deverá ser $0,05/3$ e, assim, como a MQ tem 20 graus de liberdade, o valor crítico é[1]

$$t_{20;0,05/6} = 2,61277$$

e, portanto,

$$t_{20;0,016667/2} \cdot \sqrt{\text{MQE}} = 2,61277 \cdot 1,03131 = 2,694576$$

Os intervalos de confiança são:

- Ouro – Prata

$$(8,157 - 7,975) \pm 2,694576\sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{8}} = 0,182 \pm 1,394575 = (-1,212575\,;\ 1,576575)$$

- Ouro – Titânio

$$(8,157 - 6,050) \pm 2,694576\sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{8}} = 2,107 \pm 1,394575 = (0,712425\,;\ 3,501575)$$

- Prata – Titânio

$$(7,975 - 6,050) \pm 2,694576\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = 1,925 \pm 0,463628 = (0,577712\,;\ 3,272288)$$

Analisando os intervalos, vemos que há diferença significante entre os pesos das pulseiras de ouro e titânio e das pulseiras de prata e titânio; os pesos das pulseiras de titânio são significantemente diferentes (menores) que os pesos das pulseiras de ouro ou prata.

♦♦

[1] obtido com o Minitab

2.3 A diferença mínima significante de Fisher

A ideia central subjacente ao teste da diferença mínima significante proposto por Fisher em 1935 é calcular a menor diferença significante (DMS) como se fosse a única diferença a ser comparada – com um teste t. Cada diferença, em módulo, será declarada significante se for maior que DMS (em inglês, least significant difference – LSD). O cálculo de DMS é feito da seguinte forma:

- $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = n^*$

$$\text{DMS} = t_{n-k;\alpha/2}\sqrt{\frac{2}{n^*} \cdot \text{MQE}} \tag{2.4}$$

- nem todos os n_i's iguais

$$\text{DMS} = t_{n-k;\alpha/2}\sqrt{\text{MQE}\left(\frac{1}{n_{i_1}} + \frac{1}{n_{i_2}}\right)} \tag{2.5}$$

em que i_1 e i_2 são as médias sendo comparadas.

Rejeita-se $H_0 : \mu_{i_1} = \mu_{i_2}$ se

$$\left|\overline{X}_{i_1\cdot} - \overline{X}_{i_2\cdot}\right| > \text{DMS}$$

Note que quando os n_i's não são todos iguais, é necessário calcular DMS para cada par de médias sendo comparadas.

EXEMPLO 2.2 Pulseiras de relógios (continuação)

Para aplicar o teste da DMS, observamos, primeiro, que

$$t_{20;0,025} = 2,08596$$

Logo,

$$t_{20;0,025}\sqrt{\text{MQE}} = 2,08596\sqrt{1,064} = 2,151676$$

- Ouro – Prata

$$(8,157 - 7,975) \pm 2,151676\sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{8}} = 0,182 \pm 1,113598 = (-0,931598\,;\ 1,295598)$$

- Ouro – Titânio

$$(8,157 - 6,050) \pm 2,151676\sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{8}} = 2,107 \pm 1,113598 = (0,993492\,;\ 3,220598)$$

- Prata – Titânio

$$(7,975 - 6,050) \pm 2,151676\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = 1,925 \pm 1,075838 = (0,849162\,;\ 3,000838)$$

Na Figura 2.3 temos a saída do Minitab para os intervalos de confiança baseados na DMS de Fisher; note que as diferenças foram tomadas ao contrário das nossas, daí os sinais invertidos dos limites dos IC.

```
Informações de Agrupamento Usando o Método LSD de Fisher e Confiança de 95%

Fator     N  Média  Agrupamento
Ouro      7  8,157  A
Prata     8  7,975  A
Titânio   8  6,050    B

Médias que não compartilham uma letra são significativamente diferentes.


Testes Individuais de Fisher para as Diferenças de Médias

                      Diferença     EP da                          Valor-P
Diferença de Níveis   de Médias  Diferença      IC de 95%    Valor-T  Ajustado
Prata - Ouro             -0,182      0,534  (-1,296;  0,931)   -0,34     0,736
Titânio - Ouro           -2,107      0,534  (-3,221; -0,994)   -3,95     0,001
Titânio - Prata          -1,925      0,516  (-3,001; -0,849)   -3,73     0,001

Nível de confiança simultâneo = 88,18%
```

Figura 2.3 – Saída do Minitab para o Exemplo 2.1 - Intervalos de confiança da DMS de Fisher

♦♦

2.4 A diferença honestamente significante de Tukey

A ideia principal subjacente ao teste da diferença honestamente significante (DHS) proposto por Tukey é a comparação de todas as diferenças aos pares usando a mesma distribuição amostral utilizada para a maior diferença, o que torna o teste de Tukey bastante conservador. A distribuição para a maior diferença se baseia na distribuição da amplitude studentizada descoberta por William Gosset. Essa distribuição refere-se à estatística

$$q = \frac{\max(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \min(x_1, x_2, \cdots, x_n}{s}$$

e depende do número n de observações (ou grupos) e do número de graus de liberdade do estimador da variância comum σ^2.

O teste da DHS de Tukey rejeita $H_0 : \mu_{i_1} = \mu_{i_2}$ se

$$\left|\overline{X}_{i_1\cdot} - \overline{X}_{i_2\cdot}\right| > \text{DHS}$$

em que DHS é calculada da seguinte forma:

- $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = n^*$
$$\text{DHS} = q_{k,n-k;\alpha}\sqrt{\frac{\text{MQE}}{n^*}} \tag{2.6}$$
- nem todos os n_i's iguais
$$\text{DHS} = q_{k,n-k;\alpha}\sqrt{\frac{\text{MQE}}{2}\left(\frac{1}{n_{i_1}} + \frac{1}{n_{i_2}}\right)} \tag{2.7}$$
em que i_1 e i_2 são as médias sendo comparadas.

O teste de Tukey, ao considerar a maior diferença, preocupa-se apenas com o tamanho da diferença. Sendo assim, é um teste unilateral à direita.

Embora haja semelhança com a estatística t para duas amostras, note que as médias sendo comparadas são escolhidas a posteriori, ou seja, depois de observados os dados. Assim, a distribuição não é mais a t e, sim, a da amplitude studentizada.

EXEMPLO 2.3 Pulseiras de relógios - continuação

No Exemplo 2.1 temos 3 grupos: ouro com $n_O = 7$, prata com $n_P = 8$ e titânio com $n_T = 8$. Usando a função `qtukey` do R, obtemos

```
qtukey(p = 0.95, nmeans = 3, df = 20)=3.577935
```

- Ouro — Prata

$$\begin{aligned} \text{DHS} &= 3,577935\sqrt{\frac{1,064}{2}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)} = 1,351 \\ \overline{x}_O - \overline{x}_P &= 8,157 - 7,975 = 0,182 < 1,3506 \end{aligned}$$

- Ouro — Titânio

$$\begin{aligned} \text{DHS} &= 3,577935\sqrt{\frac{1,064}{2}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)} = 1,351 \\ \overline{x}_O - \overline{x}_T &= 8,157 - 6,050 = 2,107 > 1,3506 \end{aligned}$$

- Prata — Titânio

$$\begin{aligned} \text{DHS} &= 3,577935\sqrt{\frac{1,064}{2}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)} = 1,305 \\ \overline{x}_P - \overline{x}_T &= 7,975 - 6,050 = 1,925 > 1,305 \end{aligned}$$

Na Figura 2.4 temos a saída do Minitab. Note a forma de apresentar o resultado do teste: médias que não compartilham uma letra são significantemente diferentes. Vemos, então, que titânio é diferente tanto do ouro quanto da prata. Observe, também, que embora o rótulo seja "IC de 95%", os intervalos são construídos com base no nível de confiança individual de 98,01%; 95% refere-se ao nível de confiança global.

Comparações Emparelhadas de Tukey

Informações de Agrupamento Usando Método de Tukey e Confiança de 95%

Fator	N	Média	Agrupamento
Ouro	7	8,157	A
Prata	8	7,975	A
Titânio	8	6,050	B

Médias que não compartilham uma letra são significativamente diferentes.

Testes Simultâneos de Tukey para as Diferenças de Médias

Diferença de Níveis	Diferença de Médias	EP da Diferença	IC de 95%	Valor-T	Valor-P Ajustado
Prata - Ouro	-0,182	0,534	(-1,533; 1,169)	-0,34	0,938
Titânio - Ouro	-2,107	0,534	(-3,458; -0,756)	-3,95	0,002
Titânio - Prata	-1,925	0,516	(-3,230; -0,620)	-3,73	0,004

Nível de confiança individual = 98,01%

Figura 2.4 – Saída do Minitab para o Exemplo 2.1 - Teste e Intervalos de confiança da DHS de Tukey

♦♦

2.5 Teste de Duncan

As médias dos k tratamentos são arranjadas em ordem crescente e o erro padrão de cada média é determinado como

$$S_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\text{MQE}}{n^*}} \tag{2.8}$$

se $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = n_*$ e por

$$S_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\text{MQE}}{n_H}} \tag{2.9}$$

se nem todos os n_i's são iguais sendo

$$n_H = \frac{k}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{n_i}\right)} \tag{2.10}$$

a média harmônica dos n_i's.

As diferenças observadas entre as médias são comparadas com valores da tabela de amplitudes significantes de Duncan. Essa tabela depende de dois parâmetros: ν, o número de graus de liberdade da MQE, e p, o número de médias no intervalo de comparação. O esquema da sequência geral de comparações é o seguinte:

- k comparações da maior média com (Figura 2.5
  - ⋆ a menor média – $p = k$
  - ⋆ a segunda menor média – $p = k - 1$
  - ⋆ $\vdots$
  - ⋆ a $(k-1)$-ésima menor média – $p = k - (k-1) = 1$
- Segunda maior média com
  - ⋆ a menor média – $p = k - 1$
  - ⋆ a segunda menor média – $p = k - 2$
  - ⋆ $\vdots$
  - ⋆ a $(k-2)$-ésima menor média – $p = k - 1 - (k-2) = 1$

O processo continua até que os $\dfrac{k(k-1)}{2}$ pares de médias tenham sido comparados.

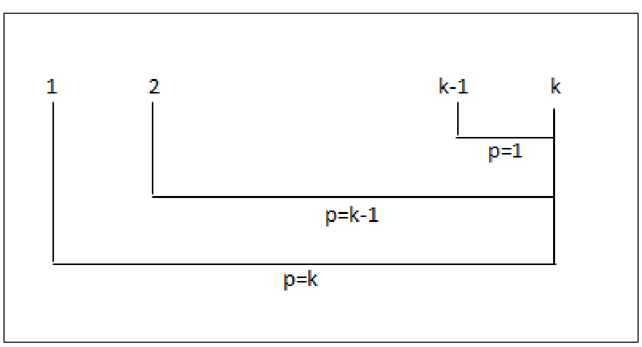


Figura 2.5 – Esquema de comparação da maior média com as demais – Teste de Duncan

Os valores críticos para comparação das diferenças de médias são definidos por

$$R_p = r_{p,\nu;\alpha} \cdot S_{\overline{x}} \tag{2.11}$$

com $r_{p,\nu;\alpha}$ dado na tabela de Duncan.

Por ser um teste bem trabalhoso, o uso de software é absolutamente necessário aqui. O teste de Duncan não está implementado no Minitab.

EXEMPLO 2.4 Teste de Duncan

Considere as informações de uma análise de variância dadas na Figura 2.6. O teste F é significante ao nível $\alpha = 0,01$. Vamos aplicar o teste de Duncan a esses dados. A média harmônica dos tamanhos amostrais é

$$n_H = \frac{4}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = 5,6471$$

ANOVA com um fator: A; B; C; D

```
Método

Hipótese nula            Todas as médias são iguais
Hipótese alternativa     No mínimo uma média é diferente
Nível de significância   α = 0,01

Assumiu-se igualdade de variâncias para a análise


Informações dos Fatores

Fator  Níveis  Valores
Fator       4  A; B; C; D


Análise de Variância

Fonte  GL  SQ (Aj.)  QM (Aj.)  Valor F  Valor-P
Fator   3     49,93    16,643    13,05    0,000
Erro   20     25,50     1,275
Total  23     75,43


Sumário do Modelo

      S      R2  R2(aj)  R2(pred)
1,12923  66,19%  61,12%    50,89%


Médias

Fator  N   Média  DesvPad       IC de 99%
A      4  55,150    1,261  (53,543; 56,757)
B      8  56,900    1,175  (55,764; 58,036)
C      6  53,100    1,161  (51,788; 54,412)
D      6  55,533    0,931  (54,222; 56,845)

DesvPad Combinado = 1,12923
```

Figura 2.6 – Esquema de comparação da maior média com as demais – Teste de Duncan

A estimativa do erro padrão da média é

$$\sqrt{s_{\overline{x}}} = \sqrt{\frac{1,275}{5,6471}} = 0,4752$$

Da tabela das diferenças significantes de Duncan com $\alpha = 0,01$ e $\nu = 24 - 4 = 20$ obtemos

- $p = 2$ $\quad r_2 = 4,024 \Rightarrow R_2 = 0,4752 \times 4,024 = 1,9122$
- $p = 3$ $\quad r_3 = 4,197 \Rightarrow R_3 = 0,4752 \times 4,197 = 1,9122$
- $p = 4$ $\quad r_4 = 4,312 \Rightarrow R_4 = 0,4752 \times 4,312 = 1,9122$

As médias ordenadas são

C	A	D	B
53,100	55,150	55,533	56,900

Comparações

- $B - C$ $\quad 56,900 - 53,100 = 3,800 > R_4$
- $B - A$ $\quad 56,900 - 55,150 = 1,750 < R_3$
- $B - D$ $\quad 56,900 - 55,533 = 1,367 < R_2$
- $D - C$ $\quad 55,533 - 53,100 = 2,433 > R_3$
- $D - A$ $\quad 55,533 - 55,150 = 0,383 < R_2$
- $A - C$ $\quad 55,150 - 53,100 = 2,050 > R_2$

Na Figura 2.7 ilustram-se essas comparações, com as médias "iguais" unidas por segmentos.

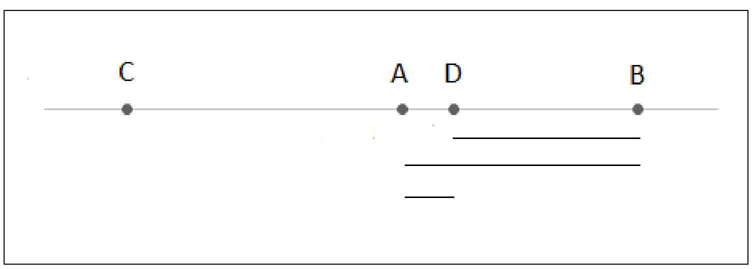


Figura 2.7 – Comparação das médias para o Exemplo 2.4

Apêndice A

Tabelas

- Tabela 1: Valores críticos da distribuição da amplitude studentizada – $\alpha = 0,05$
- Tabela 2: Valores críticos da distribuição da amplitude studentizada – $\alpha = 0,01$
- Tabela 3: Valores críticos da distribuição das amplitudes múltiplas de Duncan – $\alpha = 0,05$
- Tabela 4: Valores críticos da distribuição das amplitudes múltiplas de Duncan – $\alpha = 0,01$

Tabela 1: Valores críticos $q_{p,v}$ da amplitude studentized – $\alpha = 0,05$

v	p										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	6,080	8,331	9,799	10,881	11,734	12,435	13,028	13,542	13,994	14,396	14,759
3	4,501	5,910	6,825	7,502	8,037	8,478	8,852	9,177	9,462	9,717	9,946
4	3,927	5,040	5,757	6,287	6,706	7,053	7,347	7,602	7,826	8,027	8,208
5	3,635	4,602	5,218	5,673	6,033	6,330	6,582	6,801	6,995	7,167	7,323
6	3,460	4,339	4,896	5,305	5,628	5,895	6,122	6,319	6,493	6,649	6,789
7	3,344	4,165	4,681	5,060	5,359	5,606	5,815	5,997	6,158	6,302	6,431
8	3,261	4,041	4,529	4,886	5,167	5,399	5,596	5,767	5,918	6,053	6,175
9	3,199	3,948	4,415	4,755	5,024	5,244	5,432	5,595	5,738	5,867	5,983
10	3,151	3,877	4,327	4,654	4,912	5,124	5,304	5,460	5,598	5,722	5,833
11	3,113	3,820	4,256	4,574	4,823	5,028	5,202	5,353	5,486	5,605	5,713
12	3,081	3,773	4,199	4,508	4,750	4,950	5,119	5,265	5,395	5,510	5,615
13	3,055	3,734	4,151	4,453	4,690	4,884	5,049	5,192	5,318	5,431	5,533
14	3,033	3,701	4,111	4,407	4,639	4,829	4,990	5,130	5,253	5,364	5,463
15	3,014	3,673	4,076	4,367	4,595	4,782	4,940	5,077	5,198	5,306	5,403
16	2,998	3,649	4,046	4,333	4,557	4,741	4,896	5,031	5,150	5,256	5,352
17	2,984	3,628	4,020	4,303	4,524	4,705	4,858	4,991	5,108	5,212	5,306
18	2,971	3,609	3,997	4,276	4,494	4,673	4,824	4,955	5,071	5,173	5,266
19	2,960	3,593	3,977	4,253	4,468	4,645	4,794	4,924	5,037	5,139	5,231
20	2,950	3,578	3,958	4,232	4,445	4,620	4,768	4,895	5,008	5,108	5,199
21	2,941	3,565	3,942	4,213	4,424	4,597	4,743	4,870	4,981	5,081	5,170
22	2,933	3,553	3,927	4,196	4,405	4,577	4,722	4,847	4,957	5,056	5,144
23	2,926	3,542	3,914	4,180	4,388	4,558	4,702	4,826	4,935	5,033	5,121
24	2,919	3,532	3,901	4,166	4,373	4,541	4,684	4,807	4,915	5,012	5,099
25	2,913	3,523	3,890	4,153	4,358	4,526	4,667	4,789	4,897	4,993	5,079
26	2,907	3,514	3,880	4,141	4,345	4,511	4,652	4,773	4,880	4,975	5,061
27	2,902	3,506	3,870	4,130	4,333	4,498	4,638	4,758	4,864	4,959	5,044
28	2,784	3,332	3,655	3,883	4,058	4,200	4,319	4,421	4,511	4,590	4,662
29	2,892	3,493	3,853	4,111	4,311	4,475	4,613	4,732	4,837	4,930	5,014
30	2,897	3,499	3,861	4,120	4,322	4,486	4,625	4,745	4,850	4,944	5,029
31	2,892	3,493	3,853	4,111	4,311	4,475	4,613	4,732	4,837	4,930	5,014
32	2,888	3,486	3,845	4,102	4,301	4,464	4,601	4,720	4,824	4,917	5,001
33	2,884	3,481	3,838	4,094	4,292	4,454	4,591	4,709	4,812	4,905	4,988
34	2,881	3,475	3,832	4,086	4,284	4,445	4,581	4,698	4,802	4,894	4,976
35	2,871	3,461	3,814	4,066	4,261	4,421	4,555	4,671	4,773	4,863	4,945
36	2,868	3,457	3,809	4,060	4,255	4,414	4,547	4,663	4,764	4,855	4,936
37	2,865	3,453	3,804	4,054	4,249	4,407	4,540	4,655	4,756	4,846	4,927
38	2,863	3,449	3,799	4,049	4,243	4,400	4,533	4,648	4,749	4,838	4,919
39	2,861	3,445	3,795	4,044	4,237	4,394	4,527	4,641	4,741	4,831	4,911
40	2,858	3,442	3,791	4,039	4,232	4,388	4,521	4,634	4,735	4,824	4,904
50	2,841	3,416	3,758	4,002	4,190	4,344	4,473	4,584	4,681	4,768	4,846
60	2,829	3,399	3,737	3,977	4,163	4,314	4,441	4,550	4,646	4,732	4,808
70	2,821	3,386	3,722	3,960	4,144	4,293	4,419	4,527	4,621	4,706	4,781
80	2,814	3,377	3,711	3,947	4,129	4,277	4,402	4,509	4,603	4,686	4,761
90	2,810	3,370	3,702	3,937	4,118	4,265	4,389	4,495	4,588	4,671	4,746
100	2,806	3,365	3,695	3,929	4,109	4,256	4,379	4,484	4,577	4,659	4,733

Fonte: Valores gerados com a função `ptukey` do R

.

Tabela 2: Valores críticos $q_{p,\nu}$ da amplitude studentized – $\alpha = 0,01$

ν	p										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	13,902	19,016	22,564	25,372	27,757	29,856	31,730	33,412	34,926	36,293	37,533
3	8,260	10,620	12,170	13,322	14,239	14,998	15,646	16,212	16,713	17,164	17,573
4	6,511	8,120	9,173	9,958	10,583	11,101	11,542	11,925	12,263	12,565	12,839
5	5,702	6,976	7,804	8,421	8,913	9,321	9,669	9,971	10,239	10,479	10,696
6	5,243	6,331	7,033	7,556	7,972	8,318	8,612	8,869	9,097	9,300	9,485
7	4,949	5,919	6,542	7,005	7,373	7,678	7,939	8,166	8,367	8,548	8,711
8	4,745	5,635	6,204	6,625	6,959	7,237	7,474	7,680	7,863	8,027	8,176
9	4,596	5,428	5,957	6,347	6,657	6,915	7,134	7,325	7,494	7,646	7,784
10	4,482	5,270	5,769	6,136	6,428	6,669	6,875	7,054	7,213	7,356	7,485
11	4,392	5,146	5,621	5,970	6,247	6,476	6,671	6,841	6,992	7,127	7,250
12	4,320	5,046	5,502	5,836	6,101	6,320	6,507	6,670	6,814	6,943	7,060
13	4,260	4,964	5,404	5,726	5,981	6,192	6,372	6,528	6,666	6,791	6,903
14	4,210	4,895	5,322	5,634	5,881	6,085	6,258	6,409	6,543	6,663	6,772
15	4,167	4,836	5,252	5,556	5,796	5,994	6,162	6,309	6,438	6,555	6,660
16	4,131	4,786	5,192	5,489	5,722	5,915	6,079	6,222	6,348	6,461	6,564
17	4,099	4,742	5,140	5,430	5,659	5,847	6,007	6,147	6,270	6,380	6,480
18	4,071	4,703	5,094	5,379	5,603	5,787	5,944	6,081	6,201	6,309	6,407
19	4,046	4,669	5,054	5,334	5,553	5,735	5,889	6,022	6,141	6,246	6,342
20	4,024	4,639	5,018	5,293	5,510	5,688	5,839	5,970	6,086	6,190	6,285
21	4,004	4,612	4,986	5,257	5,470	5,646	5,794	5,924	6,038	6,140	6,233
22	3,986	4,588	4,957	5,225	5,435	5,608	5,754	5,882	5,994	6,095	6,186
23	3,970	4,566	4,931	5,195	5,403	5,573	5,718	5,844	5,955	6,054	6,144
24	3,955	4,546	4,907	5,168	5,373	5,542	5,685	5,809	5,919	6,017	6,105
25	3,942	4,527	4,885	5,144	5,347	5,513	5,655	5,778	5,886	5,983	6,070
26	3,930	4,510	4,865	5,121	5,322	5,487	5,627	5,749	5,856	5,951	6,038
27	3,918	4,495	4,847	5,101	5,300	5,463	5,602	5,722	5,828	5,923	6,008
28	3,908	4,481	4,830	5,082	5,279	5,441	5,578	5,697	5,802	5,896	5,981
29	3,898	4,467	4,814	5,064	5,260	5,420	5,556	5,674	5,778	5,871	5,955
30	3,889	4,455	4,799	5,048	5,242	5,401	5,536	5,653	5,756	5,848	5,932
31	3,881	4,443	4,786	5,032	5,225	5,383	5,517	5,633	5,736	5,827	5,910
32	3,873	4,433	4,773	5,018	5,210	5,367	5,500	5,615	5,716	5,807	5,889
33	3,865	4,423	4,761	5,005	5,195	5,351	5,483	5,598	5,698	5,789	5,870
34	3,859	4,413	4,750	4,992	5,181	5,336	5,468	5,581	5,682	5,771	5,852
35	3,852	4,404	4,739	4,980	5,169	5,323	5,453	5,566	5,666	5,755	5,835
36	3,846	4,396	4,729	4,969	5,156	5,310	5,439	5,552	5,651	5,739	5,819
37	3,840	4,388	4,720	4,959	5,145	5,298	5,427	5,538	5,637	5,725	5,804
38	3,835	4,381	4,711	4,949	5,134	5,286	5,414	5,526	5,623	5,711	5,790
39	3,830	4,374	4,703	4,940	5,124	5,275	5,403	5,513	5,611	5,698	5,776
40	3,825	4,367	4,695	4,931	5,114	5,265	5,392	5,502	5,599	5,685	5,764
50	3,787	4,316	4,634	4,863	5,040	5,185	5,308	5,414	5,507	5,590	5,665
60	3,762	4,282	4,594	4,818	4,991	5,133	5,253	5,356	5,447	5,528	5,601
70	3,745	4,258	4,566	4,786	4,957	5,096	5,214	5,315	5,404	5,483	5,555
80	3,732	4,241	4,545	4,763	4,931	5,069	5,185	5,284	5,372	5,451	5,521
90	3,722	4,227	4,529	4,745	4,911	5,048	5,162	5,261	5,348	5,425	5,495
100	3,714	4,216	4,516	4,730	4,896	5,031	5,144	5,242	5,328	5,405	5,474

Fonte: Valores gerados com a função `ptukey` do R

Tabela 3: Valores críticos $r_{p,v;0,05}$ para o teste de Duncan - $\alpha = 0,05$

gl	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	17,969	17,969	17,969	17,969	17,969	17,969	17,969	17,969	17,969	17,969	17,969	17,969	17,969	17,969	17,969	17,969	17,969	17,969	17,969
2	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085
3	4,501	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516
4	3,926	4,013	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033
5	3,635	3,749	3,796	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814
6	3,460	3,586	3,649	3,680	3,694	3,697	3,697	3,697	3,697	3,697	3,697	3,697	3,697	3,697	3,697	3,697	3,697	3,697	3,697
7	3,344	3,477	3,548	3,588	3,611	3,622	3,625	3,625	3,625	3,625	3,625	3,625	3,625	3,625	3,625	3,625	3,625	3,625	3,625
8	3,261	3,398	3,475	3,521	3,549	3,566	3,575	3,579	3,579	3,579	3,579	3,579	3,579	3,579	3,579	3,579	3,579	3,579	3,579
9	3,199	3,339	3,420	3,470	3,502	3,523	3,536	3,544	3,547	3,547	3,547	3,547	3,547	3,547	3,547	3,547	3,547	3,547	3,547
10	3,151	3,293	3,376	3,430	3,465	3,489	3,505	3,516	3,522	3,525	3,525	3,525	3,525	3,525	3,525	3,525	3,525	3,525	3,525
11	3,113	3,256	3,341	3,397	3,435	3,462	3,480	3,493	3,501	3,506	3,509	3,510	3,510	3,510	3,510	3,510	3,510	3,510	3,510
12	3,081	3,225	3,312	3,370	3,410	3,439	3,459	3,474	3,484	3,491	3,495	3,498	3,498	3,498	3,498	3,498	3,498	3,498	3,498
13	3,055	3,200	3,288	3,348	3,389	3,419	3,441	3,458	3,470	3,478	3,484	3,488	3,490	3,490	3,490	3,490	3,490	3,490	3,490
14	3,033	3,178	3,268	3,328	3,371	3,403	3,426	3,444	3,457	3,467	3,474	3,479	3,482	3,484	3,484	3,484	3,484	3,484	3,484
15	3,014	3,160	3,250	3,312	3,356	3,389	3,413	3,432	3,446	3,457	3,465	3,471	3,476	3,478	3,480	3,480	3,480	3,480	3,480
16	2,998	3,144	3,235	3,297	3,343	3,376	3,402	3,422	3,437	3,449	3,458	3,465	3,470	3,473	3,476	3,477	3,477	3,477	3,477
17	2,984	3,130	3,222	3,285	3,331	3,365	3,392	3,412	3,429	3,441	3,451	3,459	3,465	3,469	3,472	3,474	3,475	3,475	3,475
18	2,971	3,117	3,210	3,274	3,320	3,356	3,383	3,404	3,421	3,435	3,445	3,454	3,460	3,465	3,469	3,472	3,473	3,474	3,474
19	2,960	3,106	3,199	3,264	3,311	3,347	3,375	3,397	3,415	3,429	3,440	3,449	3,456	3,462	3,466	3,469	3,472	3,473	3,474
20	2,950	3,097	3,190	3,255	3,303	3,339	3,368	3,390	3,409	3,423	3,435	3,445	3,452	3,459	3,463	3,467	3,470	3,472	3,473
21	2,941	3,088	3,181	3,247	3,295	3,332	3,361	3,385	3,403	3,418	3,431	3,441	3,449	3,456	3,461	3,465	3,469	3,471	3,473
22	2,933	3,080	3,173	3,239	3,288	3,326	3,355	3,379	3,398	3,414	3,427	3,437	3,446	3,453	3,459	3,464	3,467	3,470	3,472
23	2,926	3,072	3,166	3,233	3,282	3,320	3,350	3,374	3,394	3,410	3,423	3,434	3,443	3,451	3,457	3,462	3,466	3,469	3,472
24	2,919	3,066	3,160	3,226	3,276	3,315	3,345	3,370	3,390	3,406	3,420	3,431	3,441	3,449	3,455	3,461	3,465	3,469	3,472
25	2,913	3,059	3,154	3,221	3,271	3,310	3,341	3,366	3,386	3,403	3,417	3,429	3,439	3,447	3,454	3,459	3,464	3,468	3,471
26	2,907	3,054	3,149	3,216	3,266	3,305	3,336	3,362	3,382	3,400	3,414	3,426	3,436	3,445	3,452	3,458	3,463	3,468	3,471
27	2,902	3,049	3,144	3,211	3,262	3,301	3,332	3,358	3,379	3,397	3,412	3,424	3,434	3,443	3,451	3,457	3,463	3,467	3,471
28	2,897	3,044	3,139	3,206	3,257	3,297	3,329	3,355	3,376	3,394	3,409	3,422	3,433	3,442	3,450	3,456	3,462	3,467	3,470
29	2,892	3,039	3,135	3,202	3,253	3,293	3,326	3,352	3,373	3,392	3,407	3,420	3,431	3,440	3,448	3,455	3,461	3,466	3,470
30	2,888	3,035	3,131	3,199	3,250	3,290	3,322	3,349	3,371	3,389	3,405	3,418	3,429	3,439	3,447	3,454	3,460	3,466	3,470
35	2,871	3,018	3,114	3,183	3,235	3,276	3,309	3,337	3,360	3,379	3,396	3,410	3,423	3,433	3,443	3,451	3,458	3,464	3,469
40	2,858	3,005	3,102	3,171	3,224	3,266	3,300	3,328	3,352	3,372	3,389	3,404	3,418	3,429	3,439	3,448	3,456	3,463	3,469
60	2,829	2,976	3,073	3,143	3,198	3,241	3,277	3,307	3,333	3,355	3,374	3,391	3,406	3,419	3,431	3,441	3,451	3,460	3,468
80	2,814	2,961	3,059	3,130	3,185	3,229	3,266	3,297	3,323	3,346	3,366	3,384	3,400	3,414	3,427	3,438	3,449	3,458	3,467
120	2,800	2,947	3,045	3,116	3,172	3,217	3,254	3,286	3,313	3,337	3,358	3,377	3,394	3,409	3,423	3,435	3,446	3,457	3,466
240	2,786	2,933	3,031	3,103	3,159	3,205	3,243	3,276	3,304	3,329	3,350	3,370	3,388	3,404	3,418	3,432	3,444	3,455	3,466
∞	2,772	2,918	3,017	3,089	3,146	3,193	3,232	3,265	3,294	3,320	3,343	3,363	3,382	3,399	3,414	3,428	3,442	3,454	3,466

Fonte: http://www2.accsnet.ne.jp/ miwa/probcalc/duncan/index.html

Tabela 4: Valores críticos $r_{p,v;0,01}$ para o teste de Duncan - $\alpha = 0,01$

gl	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	90,024	90,024	90,024	90,024	90,024	90,024	90,024	90,024	90,024	90,024	90,024	90,024	90,024	90,024	90,024	90,024	90,024	90,024	90,024
2	14,036	14,036	14,036	14,036	14,036	14,036	14,036	14,036	14,036	14,036	14,036	14,036	14,036	14,036	14,036	14,036	14,036	14,036	14,036
3	8,260	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321
4	6,511	6,677	6,740	6,755	6,755	6,755	6,755	6,755	6,755	6,755	6,755	6,755	6,755	6,755	6,755	6,755	6,755	6,755	6,755
5	5,702	5,893	5,989	6,040	6,065	6,074	6,074	6,074	6,074	6,074	6,074	6,074	6,074	6,074	6,074	6,074	6,074	6,074	6,074
6	5,243	5,439	5,549	5,614	5,655	5,680	5,694	5,701	5,703	5,703	5,703	5,703	5,703	5,703	5,703	5,703	5,703	5,703	5,703
7	4,949	5,145	5,260	5,333	5,383	5,416	5,439	5,454	5,464	5,470	5,472	5,472	5,472	5,472	5,472	5,472	5,472	5,472	5,472
8	4,745	4,939	5,056	5,134	5,189	5,227	5,256	5,276	5,291	5,302	5,309	5,313	5,316	5,317	5,317	5,317	5,317	5,317	5,317
9	4,596	4,787	4,906	4,986	5,043	5,086	5,117	5,142	5,160	5,174	5,185	5,193	5,199	5,202	5,205	5,206	5,206	5,206	5,206
10	4,482	4,671	4,789	4,871	4,931	4,975	5,010	5,036	5,058	5,074	5,087	5,098	5,106	5,112	5,117	5,120	5,122	5,123	5,124
11	4,392	4,579	4,697	4,780	4,841	4,887	4,923	4,952	4,975	4,994	5,009	5,021	5,031	5,039	5,045	5,050	5,054	5,057	5,059
12	4,320	4,504	4,622	4,705	4,767	4,815	4,852	4,882	4,907	4,927	4,944	4,957	4,969	4,978	4,986	4,993	4,998	5,002	5,005
13	4,260	4,442	4,560	4,643	4,706	4,754	4,793	4,824	4,850	4,871	4,889	4,904	4,917	4,927	4,936	4,944	4,950	4,955	4,960
14	4,210	4,391	4,508	4,591	4,654	4,703	4,743	4,775	4,802	4,824	4,843	4,859	4,872	4,884	4,894	4,902	4,909	4,916	4,921
15	4,167	4,346	4,463	4,547	4,610	4,660	4,700	4,733	4,760	4,783	4,803	4,820	4,834	4,846	4,857	4,866	4,874	4,881	4,887
16	4,131	4,308	4,425	4,508	4,572	4,622	4,662	4,696	4,724	4,748	4,768	4,785	4,800	4,813	4,825	4,835	4,843	4,851	4,858
17	4,099	4,275	4,391	4,474	4,538	4,589	4,630	4,664	4,692	4,717	4,737	4,755	4,771	4,785	4,797	4,807	4,816	4,824	4,832
18	4,071	4,246	4,361	4,445	4,509	4,559	4,601	4,635	4,664	4,689	4,710	4,729	4,745	4,759	4,771	4,782	4,792	4,801	4,808
19	4,046	4,220	4,335	4,418	4,483	4,533	4,575	4,610	4,639	4,664	4,686	4,705	4,722	4,736	4,749	4,760	4,771	4,780	4,788
20	4,024	4,197	4,312	4,395	4,459	4,510	4,552	4,587	4,617	4,642	4,664	4,684	4,701	4,716	4,729	4,741	4,751	4,761	4,769
21	4,004	4,177	4,291	4,374	4,438	4,489	4,531	4,567	4,597	4,622	4,645	4,664	4,682	4,697	4,711	4,723	4,734	4,743	4,752
22	3,986	4,158	4,272	4,355	4,419	4,470	4,513	4,548	4,578	4,604	4,627	4,647	4,664	4,680	4,694	4,706	4,718	4,728	4,737
23	3,970	4,141	4,254	4,337	4,402	4,453	4,496	4,531	4,562	4,588	4,611	4,631	4,649	4,665	4,679	4,692	4,703	4,713	4,723
24	3,955	4,126	4,239	4,322	4,386	4,437	4,480	4,516	4,546	4,573	4,596	4,616	4,634	4,651	4,665	4,678	4,690	4,700	4,710
25	3,942	4,112	4,224	4,307	4,371	4,423	4,466	4,502	4,532	4,559	4,582	4,603	4,621	4,638	4,652	4,665	4,677	4,688	4,698
26	3,930	4,099	4,211	4,294	4,358	4,410	4,452	4,489	4,520	4,546	4,570	4,591	4,609	4,626	4,640	4,654	4,666	4,677	4,687
27	3,918	4,087	4,199	4,282	4,346	4,397	4,440	4,477	4,508	4,535	4,558	4,579	4,598	4,615	4,630	4,643	4,655	4,667	4,677
28	3,908	4,076	4,188	4,270	4,334	4,386	4,429	4,465	4,497	4,524	4,548	4,569	4,587	4,604	4,619	4,633	4,646	4,657	4,667
29	3,898	4,065	4,177	4,260	4,324	4,376	4,419	4,455	4,486	4,514	4,538	4,559	4,578	4,595	4,610	4,624	4,637	4,648	4,659
30	3,889	4,056	4,168	4,250	4,314	4,366	4,409	4,445	4,477	4,504	4,528	4,550	4,569	4,586	4,601	4,615	4,628	4,640	4,650
35	3,852	4,017	4,128	4,210	4,273	4,325	4,369	4,406	4,437	4,465	4,490	4,511	4,531	4,549	4,565	4,579	4,593	4,605	4,616
40	3,825	3,988	4,098	4,180	4,243	4,295	4,339	4,376	4,408	4,436	4,461	4,483	4,503	4,521	4,537	4,552	4,566	4,579	4,591
60	3,762	3,922	4,030	4,111	4,174	4,226	4,270	4,307	4,340	4,368	4,394	4,417	4,437	4,456	4,474	4,489	4,504	4,518	4,530
80	3,732	3,890	3,997	4,077	4,140	4,192	4,236	4,273	4,306	4,335	4,360	4,384	4,405	4,424	4,442	4,458	4,473	4,487	4,500
120	3,702	3,858	3,964	4,044	4,107	4,158	4,202	4,239	4,272	4,301	4,327	4,351	4,372	4,392	4,410	4,426	4,442	4,456	4,469
240	3,672	3,827	3,932	4,011	4,073	4,125	4,168	4,206	4,239	4,268	4,294	4,318	4,339	4,359	4,378	4,394	4,410	4,425	4,439
∞	3,643	3,796	3,900	3,978	4,040	4,091	4,135	4,172	4,205	4,235	4,261	4,285	4,307	4,327	4,345	4,363	4,379	4,394	4,408

Fonte: http://www2.accsnet.ne.jp/ miwa/probcalc/duncan/index.html