GAN00147 - Matemática para Economia III – 2016.1 – Prof. Ana Maria Luz F. do Amaral

Gabarito – Lista 2 – Parte II

12) (A) Para encontrar o posto e a nulidade de A, efetuamos as seguintes operações com matrizes:
Passo 1: Somamos a primeira linha com a segunda linha.

Passo 2: Dividimos a segunda linha por dois.

Passo 3: Multiplicamos a segunda linha por 4 e somamos com a terceira linha.

Passo 4: Dividimos a terceira linha por 8.

Passo 5: Multiplicamos a terceira linha por 3 e somamos com a primeira linha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 52 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 52 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 52 \\ 0 & 0 & 1 & 118 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -78 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 118 \end{bmatrix}$$

Observemos que, ao final do processo de redução à forma escada, obtivemos três linhas não-nula, donde o posto da matriz A é 3 e a nulidade, sendo 4-3=1.

13) (A)
A primeira linha da Tabela 1 mostra que Carvão recebe (e paga por isso) 40% da produção de Energia elétrica e 60 % da produção de Aço. Como os respectivos valores das produções totais são p_E e p_A, Carvão deverá gastar 0,4 p_E dólares por sua cota da produção de Energia Elétrica e 0,6 p_A por sua cota da produção de Aço. Assim, as despesas totais do carvão são $0,4p_E + 0,6p_A$. Para tornar a receita do Carvão, p_C, igual à sua despesa, queremos que

$$p_C = 0,4p_E + 0,6p_A. \qquad (1)$$

A segunda coluna da Tabela 1 mostra que o setor de Energia Elétrica gasta $0,6p_C$ com Carvão, $0,1p_E$ com Energia Elétrica e $0,2p_A$ com Aço. Assim, as necessidades de receita/despesa para a Energia Elétrica são

$$p_E = 0,6p_C + 0,1p_E + 0,2p_A. \qquad (2)$$

Finalmente, a terceira coluna da Tabela 1 leva à exigência final

$$p_A = 0,4p_C + 0,5p_E + 0,2p_A. \qquad (3)$$

Para resolver o sistema de equações (1), (2) e (3), passe todas as incógnitas para a esquerda do sinal de igualdade em cada equação e junte os termos correspondentes. Donde resulta o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} p_C - 0,4p_E - 0,6p_A &= 0 \\ -0,6p_C + 0,9p_E - 0,2p_A &= 0 \\ -0,4p_C - 0,5p_E + 0,8p_A &= 0 \end{aligned}$$

(B) e (C): Para simplificar, os números serão arredondados para duas casas decimais.

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,4 & -0,6 & 0 \\ -0,6 & 0,9 & -0,2 & 0 \\ -0,4 & -0,5 & 0,8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -0,4 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0,66 & -0,56 & 0 \\ 0 & -0,66 & 0,56 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -0,4 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0,66 & -0,56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -0,4 & -0,6 & 0 \\ 0 & 1 & -0,85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,94 & 0 \\ 0 & 1 & -0,85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A solução geral é $p_c = 0,94 p_A$, $p_E = 0,85 p_A$ e p_A é livre. O vetor para o preço de equilíbrio da economia tem a seguinte forma

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} p_C \\ p_E \\ p_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,94\, p_A \\ 0,85\, p_A \\ p_A \end{bmatrix} = p_A \begin{bmatrix} 0,94 \\ 0,85 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observemos que qualquer escolha (não negativa) de p_A resulta em uma escolha de preços de equilíbrio. Por exemplo, se tomarmos p_A igual a 100 (ou $ 100 milhões), então $p_C = 94$ e $p_E = 85$. As receitas e despesas de cada setor serão iguais se a produção de Carvão tiver o valor de $ 94 milhões, a produção de Energia Elétrica o valor de $ 85 milhões, e a produção de Aço o valor de $ 100 milhões.

14 (A) Precisamos resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 43 \\ 57 \end{bmatrix}$$

Agora

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{61} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{61} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 43 \\ 57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(B) *multiplicador de investimento Y = 1/(1-a)=1/(1-0,8)=1/(0,2)=5*

multiplicador de investimento C=a/(1-a)=(0,8)/(1-0,8)=(0,8)/(0,2)=4

multiplicador de consumo autônomo de Y= 1/(1-a)=1/(1-0,8)=1/(0,2)=5

multiplicador de consumo autônomo de C= 1/(1-a)=1/(1-0,8)=1/(0,2)=5