Universidade Federal Fluminense/ Departamento de Análise
GAN 00147- Matemática para Economia III – Turma A1/ Professora Ana Maria Luz

Lista 7 – Transformações Lineares/Matriz de Mudança de base

1- Mostre que as funções abaixo são transformações lineares.

a) $T:IR^2 \to IR^2$ tal que $T(x,y)=(2x+y,x+3y)$

b) $T:IR^2 \to IR^3$ tal que $T(x,y)=(x+y,x-y,x)$

c) $T:IR^3 \to IR^2$ tal que $T(x,y,z)=(2x+y-z,x+2y)$

2- Determine a transformação linear tal que $T(-1,1)=(3,2,1)$ e $T(0,1)=(1,1,0)$. Encontre v pertencente a IR^2 tal que $T(v)=(5,3,2)$.

3- Uma editora publica um livro de Álgebra Linear em três edições diferentes: brochura, especial e de luxo. Cada livro precisa de uma determinada quantidade de papel e tela (para a capa). As quantidades necessárias (em gramas) são dadas pela matriz

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Broch.} & \text{Espec.} & \text{Luxo} \end{array} \\ A= & \begin{bmatrix} 300 & 500 & 800 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} papel \\ tela \end{array}$$

Seja $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ o vetor produção, onde x_1 é o número de livros brochuras, x_2 é o número de livros especiais e x_3 é o número de livros de luxo.

a) Encontre a transformação linear $T:IR^3 \to IR^2$ definida por T(**x**)=A**x** que descreve o quanto de papel e tela foram gastos para produzir o livro.

b) O vetor $y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \text{Im}(T)$ informa em y_1 o total de papel gasto pela editora para publicar o livro e em y_2 o total de tela necessários. De acordo com o item a) Qual a expressão do total de papel gasto (expressão de y_1 em função de x_1, x_2, x_3)? Qual a expressão do total de tela necessária (expressão de y_2 em função de x_1, x_2, x_3)?

4- Seja $T:V \to W$ uma transformação linear, chama-se núcleo da transformação linear ao conjunto

$$N(T)=\{v \in V;\ T(v)=0\}$$

a) Seja $T:IR^2 \to IR$ tal que $T(x,y)=y-x$, temos que

$$N(T)=\{(x,y) \in IR^2;\ T(x,y)=y-x=0\}=\{(x,y) \in IR^2;\ y=x\}.$$

Responda: $(2,1) \in N(T)$? $(3,3) \in N(T)$?

5- Seja $T:V \to W$ uma transformação linear, chama-se imagem da transformação linear ao conjunto

$$Im(T)=\{w \in W;\ w=T(v) \text{ para algum } v \in V\}$$

a) Seja $T:IR^2 \to IR^2$ tal que $T(x,y)=(x+y,2x+2y)$, temos que

$$Im(T)=\{(a,b) \in IR^2;\ (a,b)=T(x,y)=(x+y,2x+2y)\} \Rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ 2x+2y=b \end{cases},$$

para que este sistema tenha solução devemos ter $2a-b=0$. Logo

$$Im(T)=\{(a,b) \in IR^2;\ 2a-b=0\}$$

Responda: $(1,2) \in Im(T)$? $(6,3) \in Im(T)$?

6- Dada a transformação linear $T: IR^3 \to IR^3$ dada por

$$T(x,y,z)=(x+y,y-z),$$

E considere as bases A={(1,1,1), (0,0,1), (-1,1,1)} e B={(3,0), (1,1)} para o IR^3 e IR^2 respectivamente. Determine:

a) $\left[T\right]_B^A$

b) Sendo v=(5,1,-2) (coordenadas em relação à base canônica do IR^3), calcular $[T(v)]_B$ utilizando a matriz encontrada em a) e lembrando que $[T(v)]_B=\left[T\right]_B^A [v]_A$.

7- Seja a transformação T: $IR^3 \rightarrow IR^2$ definida pela matriz

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Escreva a lei que define a transformação linear.

b) Sejam A={e_1, e_2, e_3} e B={e_1,e_2} as bases canônicas respectivamente do IR^3 e IR^2. Encontre a matriz de T em relação a A e B ($\left[T\right]_B^A$) .

8- Sejam V=IR^2, A={(1,1),(2,1)} e B={(1,0),(0,1)} bases do IR^2.

a) Determine a matriz de mudança de base de A para a base B (representada por $\left[I\right]_B^A$).

b) Que relação pode ser estabelecida entre $[v]_B$ e $[v]_A$ usando a matriz de I em relação às bases A e B?

9 - Dada a transformação linear T: $IR^2 \rightarrow IR^2$ dada por

$$T(x,y)=(x+y,-2x+4y),$$

Determine: $\left[T\right]$ (matriz de T em relação a base canônica)