Universidade Federal Fluminense/ Departamento de Análise
GAN 00147- Matemática para Economia III – Turma A1/ Professora Ana Maria Luz

Lista de Exercícios – Autovalores e autovetores / Diagonalização de Operadores

1. Expresse os seguintes sistemas lineares no formato $(A-\lambda I)x=0$.

a) $\begin{cases} x+2y=\lambda x \\ 2x+y=\lambda y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+3y=\lambda x \\ 4x+3y=\lambda y \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+y=\lambda x \\ -5x-3y=\lambda y \end{cases}$

2. Para cada um dos sistemas acima, encontre:

a) A equação característica.
b) Os Autovalores.
c) Os autovetores associados a cada autovalor

3. Seja T:$IR^3 \rightarrow IR^3$ transformação linear definida pela matriz

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 100 & 2 & 1 \\ \sqrt{7} & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Encontre uma base do IR^3 formada por autovetores de T.
b) Encontre uma matriz P e uma matriz diagonal D tal que $D=P^{-1}AP$.
(Dica: use expansão por cofatores para obter o polinômio característico $\det(A-\lambda I)=0$.

4. Se A é uma matriz simétrica, então os autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais. Seja

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

Encontre uma base ortogonal para IR^2 formada por autovetores de A.

(Diz-se que uma base B={v_1,...,v_n} de V (espaço vetorial euclidiano) é ***ortogonal*** se seus vetores são dois a dois ortogonais, isto é, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, para todo i≠j.

Se $u,w \in IR^2$,u=(u_1,u_2), w=(w_1,w_2), definimos $<u,w>=u_1w_1+u_2w_2$. Dizemos que u é ortogonal a w se $<u,w>=u_1w_1+u_2w_2=0$.)

5. Se A é uma matriz simétrica n por n então existe uma matriz ortogonal P ($P^{-1}=P^T$) tal que

$$P^{-1}AP=D,$$

D uma matriz diagonal. Os autovalores de A são elementos da diagonal P, neste caso dizemos que P diagonaliza A ortogonalmente. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

a) Encontre uma base ortogonal para IR^3 formada por autovetores de A.
b) Determinar uma matriz P que diagonaliza A ortogonalmente.
c) Calcular $P^{-1}AP$.

6. Seja $T: IR^3 \rightarrow IR^3$ transformação linear definida por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Encontre o polinômio característico deste operador.
b) Sabendo que $\lambda=2$ é um autovalor encontre os outros autovalores.
c) Encontre um autovetor associado a $\lambda=2$.