20. Use o resultado do Exercício 19 para estimar, até o grau mais próximo, os ângulos que a diagonal de uma caixa de 10 cm × 15 cm × 25 cm faz com as arestas da caixa. [*Observação*. É necessária uma calculadora.]
21. Em relação ao Exercício 19, mostre que dois vetores não-nulos $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ do espaço tridimensional são perpendiculares se, e somente se, seus cossenos diretores satisfazem
$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0$$
22. Mostre que se $\mathbf{v}$ é perpendicular a ambos $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$, então $\mathbf{v}$ é ortogonal a $k_1\mathbf{w}_1+k_2\mathbf{w}_2$, para quaisquer escalares $k_1$ e $k_2$.
23. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores não-nulos no espaço bi ou tridimensional e sejam $k=\|\mathbf{u}\|$ e $l=\|\mathbf{v}\|$. Mostre que o vetor $\mathbf{w}=l\mathbf{u}+k\mathbf{v}$ bissecta o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

## Discussão e Descoberta

24. Em cada parte, há alguma coisa errada com a expressão. O que é?
(a) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$ (b) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+\mathbf{w}$ (c) $\|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\|$ (d) $k\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})$
25. É possível ter $\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}=\text{proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{a}$? Explique seu raciocínio.
26. Se $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$, é correto cancelar $\mathbf{u}$ de ambos os lados da equação $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$ e concluir que $\mathbf{v}=\mathbf{w}$? Explique seu raciocínio.
27. Suponha que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vetores não-nulos mutuamente ortogonais no espaço tridimensional e suponha que você conhece os produtos escalares destes três vetores com um vetor $\mathbf{r}$ do espaço tridimensional. Obtenha uma expressão para $\mathbf{r}$ em termos de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e dos produtos escalares. [*Sugestão*. Procure obter uma expressão do tipo $\mathbf{r}=b_1\mathbf{u}+b_2\mathbf{v}+b_3\mathbf{w}$.]
28. Suponha que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores ortogonais do espaço bi ou tridimensional. Qual é o teorema famoso descrito pela equação $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2$? Faça uma figura para corroborar sua resposta.

# 3.4 PRODUTO VETORIAL

***Em muitas aplicações de vetores a problemas geométricos, físicos e de engenharia é de interesse construir um vetor no espaço tridimensional que é perpendicular a dois vetores dados. Nesta seção nós iremos mostrar como fazer isto.***

**Produto Vetorial de Vetores** Lembre da Seção 3.3 que o produto escalar de dois vetores nos espaços bi e tridimensionais produz um escalar. Nós iremos definir agora um tipo de multiplicação vetorial que produz um vetor como produto, mas que é aplicável somente ao espaço tridimensional.

**Definição**

Se $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ e $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ são vetores no espaço tridimensional, então o produto vetorial $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ é o vetor definido por
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(u_2v_3-u_3v_2,\ u_3v_1-u_1v_3,\ u_1v_2-u_2v_1)\tag{1a}$$
ou em notação de determinante,
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\left(\begin{vmatrix}u_2&u_3\\v_2&v_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}u_1&u_3\\v_1&v_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}u_1&u_2\\v_1&v_2\end{vmatrix}\right)\tag{1b}$$

OBSERVAÇÃO. Em vez de memorizar (1b), você pode obter os componentes de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ como segue:

- Forme a matriz $2\times 3$ dada por $\begin{bmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{bmatrix}$, cuja primeira linha contém os componentes de $\mathbf{u}$ e cuja segunda linha contém os componentes de $\mathbf{v}$.
- Para obter o primeiro componente de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, delete a primeira coluna e tome o determinante; para obter o segundo componente, delete a segunda coluna e tome o negativo do determinante; e para obter o terceiro componente, delete a terceira coluna e tome o determinante.

**EXEMPLO 1 Calculando um Produto Vetorial**

Encontre $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, sendo $\mathbf{u}=(1,2,-2)$ e $\mathbf{v}=(3,0,1)$.

*Solução.*

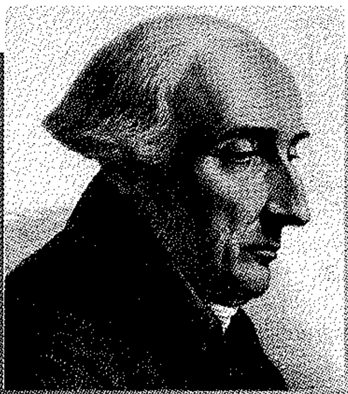
Usando (1) ou o mnemônico da observação precedente, nós temos
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\left(\begin{vmatrix}2&-2\\0&1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1&-2\\3&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\3&0\end{vmatrix}\right)$$
$$=(2,-7,-6)$$ ♦

Existe uma diferença importante entre o produto escalar e o produto vetorial de dois vetores—o produto escalar é um escalar e o produto vetorial é um vetor. O teorema a seguir dá algumas relações importantes entre os produtos escalar e vetorial e também mostra que $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ é ortogonal a ambos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

**Teorema 3.4.1 Relações entre os Produtos Escalar e Vetorial**

*Se* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *são vetores no espaço tridimensional, então:*

(*a*) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0$ ($\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *é ortogonal a* $\mathbf{u}$)
(*b*) $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0$ ($\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *é ortogonal a* $\mathbf{v}$)
(*c*) $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$ (*identidade de Lagrange*)
(*d*) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$ (*relação entre os produtos vetorial e escalar*)
(*e*) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u}$ (*relação entre os produtos vetorial e escalar*)



**Joseph Louis Lagrange** (1736–1813) foi um matemático e astrônomo franco-italiano. Embora seu pai quisesse que ele se tornasse um advogado, Lagrange foi atraído para a Matemática e Astronomia depois de ler um trabalho do astrônomo Halley. Aos 16 anos começou a estudar Matemática por conta própria e aos 19 foi designado para um cargo de professor na Escola de Artilharia Real de Turim. No ano seguinte ele resolveu alguns problemas famosos usando métodos novos que acabaram florescendo em um ramo da Matemática chamado *Cálculo das Variações*. Estes métodos e sua aplicação a problemas de Mecânica Celeste foram tão monumentais que aos 25 anos Lagrange era considerado por muitos de seus contemporâneos como o maior matemático vivo. Um dos trabalhos mais famosos de Lagrange é *Mécanique Analytique*, no qual ele reduziu a teoria da Mecânica a umas poucas fórmulas gerais das quais todas as demais equações puderam ser deduzidas.

Um grande admirador de Lagrange foi Napoleão, que o cobriu de honrarias. Apesar de sua fama, Lagrange foi um homem tímido e modesto. Quando morreu, foi enterrado com honras no Panteão.

*Prova (a).* Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Então

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= (u_1, u_2, u_3)\cdot(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)\\ &= u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) = 0\end{aligned}$$

*Prova (b).* Similar a (*a*).

*Prova (c).* Como

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \quad (2)$$

e

$$\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \quad (3)$$

a prova pode ser concluída desenvolvendo os lados direitos de (2) e (3) e verificando sua igualdade.

*Prova (d) e (e).* Veja os Exercícios 26 e 27. ■

## EXEMPLO 2 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ é Perpendicular a u e a v

Considere os vetores

$$\mathbf{u} = (1, 2, -2) \text{ e } \mathbf{v} = (3, 0, 1)$$

No Exemplo 1 mostramos que

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (2, -7, -6)$$

Como

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (1)(2) + (2)(-7) + (-2)(-6) = 0$$

e

$$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (3)(2) + (0)(-7) + (1)(-6) = 0$$

$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ é ortogonal a ambos **u** e **v**, como garante o Teorema 3.4.1. ◆

As principais propriedades aritméticas do produto vetorial são as enumeradas no próximo teorema.

**Teorema 3.4.2 Propriedades do Produto Vetorial**

*Se* **u**, **v** *e* **w** *são vetores no espaço tridimensional e $l$ é um escalar qualquer, então:*

(*a*) $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -(\mathbf{v}\times\mathbf{u})$
(*b*) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\times\mathbf{v}) + (\mathbf{u}\times\mathbf{w})$
(*c*) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times\mathbf{w} = (\mathbf{u}\times\mathbf{w}) + (\mathbf{v}\times\mathbf{w})$
(*d*) $l(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (l\mathbf{u})\times\mathbf{v} = \mathbf{u}\times(l\mathbf{v})$
(*e*) $\mathbf{u}\times\mathbf{0} = \mathbf{0}\times\mathbf{u} = \mathbf{0}$
(*f*) $\mathbf{u}\times\mathbf{u} = \mathbf{0}$

As demonstrações seguem imediatamente da Fórmula (1b) e das propriedades dos determinantes; por exemplo, (*a*) pode ser demonstrada como segue:

*Prova (a).* Trocando-se **u** com **v** em (1b), trocam as linhas dos três determinantes no lado direito de (1b) e portanto troca o sinal de cada componente do produto vetorial. Assim, $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -(\mathbf{v}\times\mathbf{u})$. ■

As provas das demais partes são deixadas como exercícios.

## EXEMPLO 3 Vetores Unitários Canônicos

Considere os vetores

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0) \text{ e } \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Estes vetores têm, cada um, comprimento 1 e estão sobre os eixos coordenados (Figura 3.4.1). Eles são chamados ***vetores unitários canônicos*** do espaço tridimensional. Cada vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ do espaço tridimensional pode ser expresso em termos de **i**, **j** e **k**, pois podemos escrever

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

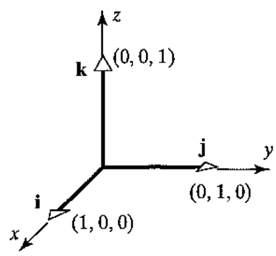



**Figura 3.4.1** Os vetores unitários canônicos.

Por exemplo,

$$(2, -3, 4) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

De (1b) obtemos

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \left(\begin{vmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}\right) = (0, 0, 1) = \mathbf{k}$$ ◆

O leitor não deveria encontrar dificuldades para estabelecer os seguintes resultados:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{0} & \mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{0} & \mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0} \\ \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k} & \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i} & \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j} \\ \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k} & \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i} & \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j} \end{array}$$

A Figura 3.4.2 é útil para lembrar destes resultados. Olhando para este diagrama, vemos que o produto vetorial de dois vetores tomados no sentido horário é o vetor seguinte e o produto vetorial de dois vetores tomados no sentido anti-horário é o negativo do vetor seguinte.

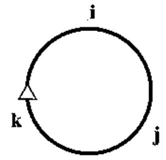



**Figura 3.4.2**

**O Produto Vetorial em Formato de Determinante** Também é importante notar que um produto vetorial pode ser representado simbolicamente na forma de um determinante 3 × 3:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} \tag{4}$$

Por exemplo, se $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ e $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$, então

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\mathbf{i}-7\mathbf{j}-6\mathbf{k}$$

o que confere com o resultado obtido no Exemplo 1.

**Advertência** Não é verdade, em geral, que $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$. Por exemplo,

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{j})=\mathbf{i}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

e

$$(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$$

de modo que

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{j})\neq(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{j}$$

Nós sabemos do Teorema 3.4.1 que $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ é ortogonal a ambos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores não-nulos, pode ser mostrado que o sentido de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ pode ser determinado usando a "regra da mão direita"[1] (Figura 3.4.3): seja $\theta$ o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e suponha que $\mathbf{u}$ é girado pelo ângulo $\theta$ até coincidir com $\mathbf{v}$. Se os dedos da mão direita se fecharem apontando no sentido desta rotação, então o polegar indica (aproximadamente) o sentido de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

[1] Lembre que nós somente consideramos sistemas de coordenadas de mão direita neste texto. Se estivéssemos usando sistemas de mão esquerda, usaríamos aqui uma "regra da mão esquerda."

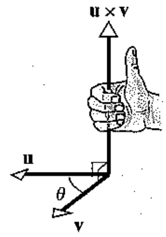



**Figura 3.4.3**

O leitor pode considerar instrutivo treinar esta regra com os produtos

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\quad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$$

## Interpretação Geométrica do Produto Vetorial

Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores no espaço tridimensional, então a norma de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ tem uma interpretação geométrica útil. A identidade de Lagrange, dada no Teorema 3.4.1, afirma que

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 \tag{5}$$

Se $\theta$ denota o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, então $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta$, de modo que (5) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2-\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\cos^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2(1-\cos^2\theta) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\operatorname{sen}^2\theta \end{aligned}$$

Como $0\le\theta\le\pi$, segue que $\operatorname{sen}\theta\ge 0$, e portanto isto pode ser reescrito como

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta \tag{6}$$

Mas $\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta$ é a altura do paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ (Figura 3.4.4). Assim, por (6), a área $A$ deste paralelogramo é dada por

$$A=(\text{base})\,(\text{altura})=\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta=\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$$

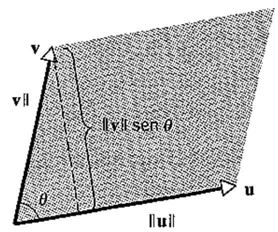



**Figura 3.4.4**

Este resultado também é válido se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são colineares, pois então o paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ tem área zero e por (6) temos $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$, já que, neste caso, $\theta=0$. Assim, temos o seguinte teorema.

**Teorema 3.4.3** **Área de um Paralelogramo**

*Se* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *são vetores no espaço tridimensional, então* $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$ *é igual à área do paralelogramo determinado por* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$.

## EXEMPLO 4 Área de um Triângulo

Encontre a área do triângulo determinado pelos pontos $P_1(2, 2, 0)$, $P_2(-1, 0, 2)$ e $P_3(0, 4, 3)$.

*Solução.*

A área $A$ do triângulo é $\frac{1}{2}$ da área do paralelogramo determinado pelos vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ (Figura 3.4.5). Usando o método discutido no Exemplo 2 da Seção 3.1, $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3, -2, 2)$ e $\overrightarrow{P_1P_3} = (-2, 2, 3)$. Segue que

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-10, 5, -10)$$

e conseqüentemente

$$A = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = \tfrac{1}{2}(15) = \tfrac{15}{2}$$ ♦

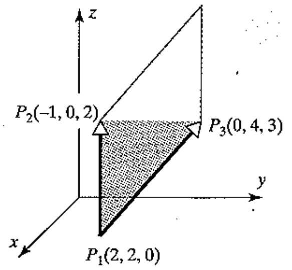



**Figura 3.4.5**

**Definição**

Se **u**, **v** e **w** são vetores no espaço tridimensional então

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

é chamado ***produto misto*** de **u**, **v** e **w**.

O produto misto de $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ pode ser calculado a partir da fórmula

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (7)$$

Isto segue da Fórmula (4), pois

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \left( \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \\ &= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} u_3 \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

## EXEMPLO 5 Calculando um Produto Misto

Calcule o produto misto $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ dos vetores

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

*Solução.*

Por (7),

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 60 + 4 - 15 = 49 \end{aligned}$$ ♦

OBSERVAÇÃO. O símbolo $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ não faz sentido por que nós não podemos formar o produto vetorial de um escalar com um vetor. Assim, não há ambigüidade escrevendo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ em vez de $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. No entanto, por clareza, em geral manteremos os parênteses.

Segue de (7) que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u})$$

pois os determinantes $3 \times 3$ que representam estes produtos podem ser obtidos um do outro por *duas* trocas de linhas. (Verifique.) Estas relações podem ser lembradas movendo os vetores **u**, **v** e **w** no sentido horário em torno dos vértices do triângulo da Figura 3.4.6.

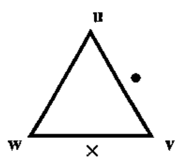



**Figura 3.4.6**

**Interpretação Geométrica de Determinantes** O próximo teorema fornece uma interpretação geométrica útil de determinantes $2 \times 2$ e $3 \times 3$.

**Teorema 3.4.4**

(*a*) *O valor absoluto do determinante*

$$\det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

*é igual à área do paralelogramo no espaço bidimensional determinado pelos vetores* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ *e* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. (*Veja Figura 3.4.7a.*)

(*b*) *O valor absoluto do determinante*

$$\det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

*é igual ao volume do paralelepípedo no espaço tridimensional determinado pelos vetores* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *e* $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$. (*Veja Figura 3.4.7b.*)

*Prova* (*a*). A chave para a prova é usar o Teorema 3.4.3. Contudo, aquele teorema refere-se a vetores no espaço tridimensional, enquanto $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ são vetores do espaço bidimensional. Para superar este "problema de dimen-

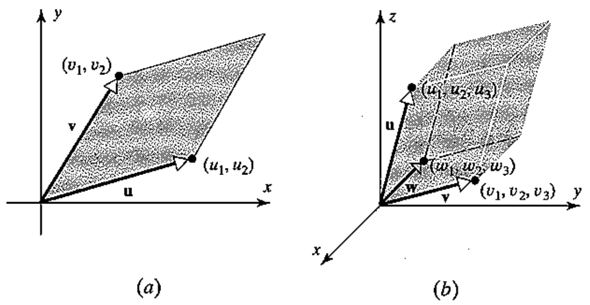



**Figura 3.4.7**

são", veremos **u** e **v** como vetores do plano $xy$ de um sistema de coordenadas $xyz$ (Figura 3.4.8$a$), no qual estes vetores são escritos como $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)$. Assim,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \mathbf{k}$$

Decorre agora do Teorema 3.4.3 e de $\|\mathbf{k}\| = 1$ que a área $A$ do paralelogramo determinado por **u** e **v** é

$$A = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \left\| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \mathbf{k} \right\| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right| \|\mathbf{k}\| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right|$$

completando a prova.

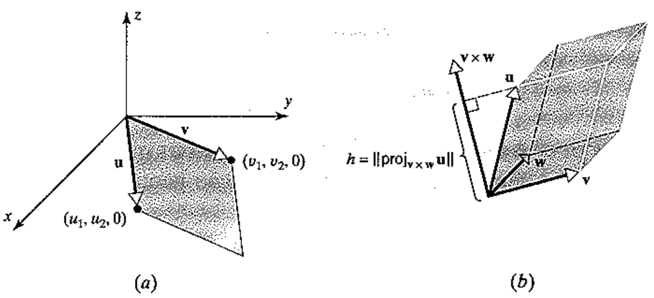



**Figura 3.4.8**

*Prova* ($b$). Conforme mostramos na Figura 3.4.8$b$, tomamos o paralelogramo determinado por **v** e **w** como a base do paralelepípedo determinado por **u**, **v** e **w**. Segue do Teorema 3.4.3 que a área da base é $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$ e, como ilustra a Figura 3.4.8$b$, a altura $h$ do paralelepípedo é o comprimento da projeção ortogonal de **u** sobre $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Logo, pela Fórmula (10) da Seção 3.3,

$$h = \|\text{proj}_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\, \mathbf{u}\| = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|}$$

Assim, o volume $V$ do paralelepípedo é

$$V = (\text{área da base}) \cdot \text{altura} = \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|} = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$$

E portanto, por (7),

$$V = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right|$$

completando a prova. ∎

OBSERVAÇÃO. Se $V$ denota o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores **u**, **v** e **w**, então o Teorema 3.4.4 e a Fórmula (7) garantem que

$$V = \begin{bmatrix} \text{volume do paralelepípedo} \\ \text{determinado por } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \text{ e } \mathbf{w} \end{bmatrix} = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| \tag{8}$$

Disto, e do Teorema 3.3.1$b$, nós podemos concluir que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \pm V$$

onde os resultados + ou − dependem de **u** fazer um ângulo agudo ou obtuso com $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

A Fórmula (8) leva a um teste útil para verificar se três dados vetores ficam em um mesmo plano ou não. Como três vetores não-coplanares determinam um paralelepípedo de volume positivo, decorre de (8) que $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| = 0$ se, e somente se, os vetores **u**, **v** e **w** estão num mesmo plano. Assim, temos o resultado seguinte.

**Teorema 3.4.5**

*Se os três vetores* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *e* $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ *têm o mesmo ponto inicial, então eles ficam em um mesmo plano se, e somente se,*

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

**Independência entre Produto Vetorial e Coordenadas** No início, definimos um vetor como sendo um segmento de reta orientado ou uma flecha nos espaços bi e tridimensionais; sistemas de coordenadas e componentes foram introduzidos mais tarde a fim de simplificar os cálculos com vetores. Assim, um vetor tem uma "existência matemática" independentemente da introdução ou não de um sistema de coordenadas. Além disto, os componentes de um vetor não são determinados somente pelo vetor; eles também dependem do sistema de coordenadas escolhido. Por exemplo, na Figura 3.4.9 nós fornecemos um vetor fixo **v** do plano e dois sistemas de coordenadas distintos. No sistema de coordenadas $xy$, os componentes de **v** são (1, 1) e no sistema de coordenadas $x'y'$ eles são $(\sqrt{2}, 0)$.

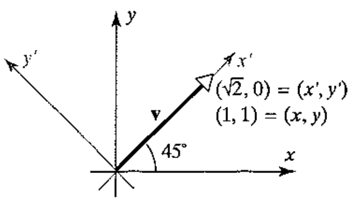



**Figura 3.4.9**

Isto levanta uma questão importante sobre nossa definição de produto vetorial. Já que definimos o produto vetorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ em termos de componentes de **u** e **v** e uma vez que estes componentes dependem do sistema de coordenadas escolhido, poderia ser possível que dois vetores **u** e **v** *fixados* tivessem produtos vetoriais distintos em sistemas de coordenadas diferentes.

Felizmente, isto não ocorre e, para ver porque, nós só precisamos lembrar que

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é perpendicular a ambos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
- O sentido de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é determinado pela regra da mão direita.
- $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta$.

Estas três propriedades determinam o vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ completamente: a primeira e a segunda propriedades determinam a direção e sentido e a terceira propriedade determina o comprimento. Como estas propriedades de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ dependem somente dos comprimentos e das posições relativas de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e não do particular sistema de coordenadas de mão direita que estamos usando, o vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ permanecerá inalterado se introduzirmos um outro sistema de coordenadas de mão direita. Assim, nós dizemos que a definição de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é ***independente de coordenadas***. Este resultado é importante para físicos e engenheiros que, muitas vezes, trabalham com vários sistemas de coordenadas em um mesmo problema.

### EXEMPLO 6 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é Independente do Sistema de Coordenadas

Considere dois vetores perpendiculares $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, cada um de comprimento 1 (Figura 3.4.10*a*). Se nós introduzirmos um sistema de coordenadas *xyz* como indicado na Figura 3.4.10*b*, então

$$\mathbf{u} = (1, 0, 0) = \mathbf{i} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = (0, 1, 0) = \mathbf{j}$$

e portanto

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

No entanto, introduzindo um sistema de coordenadas como mostra a Figura 3.4.10*c*, temos

$$\mathbf{u} = (0, 0, 1) = \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = (1, 0, 0) = \mathbf{i}$$

e portanto

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$$

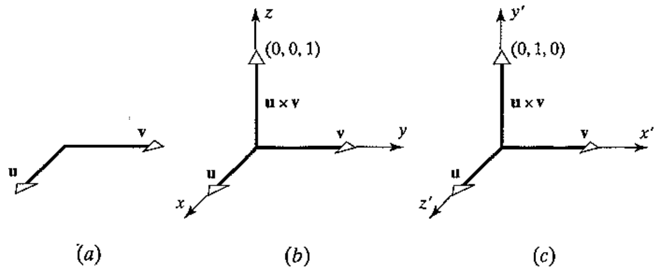



**Figura 3.4.10**

No entanto, a partir das Figuras 3.4.10*b* e 3.4.10*c* é claro que o vetor (0, 0, 1) no sistema *xyz* coincide com o vetor (0, 1, 0) no sistema *x'y'z'*. Assim, obtemos o mesmo vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, tanto usando coordenadas do sistema *xyz* quanto usando coordenadas do sistema *x'y'z'*. ♦

## Conjunto de Exercícios 3.4

**1.** Sejam $\mathbf{u} = (3, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (0, 2, -3)$ e $\mathbf{w} = (2, 6, 7)$. Calcule

(a) $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$
(d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (e) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} - 2\mathbf{w})$ (f) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) - 2\mathbf{w}$

**2.** Encontre um vetor que é ortogonal a ambos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

(a) $\mathbf{u} = (-6, 4, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 1, 5)$ (b) $\mathbf{u} = (-2, 1, 5)$, $\mathbf{v} = (3, 0, -3)$

**3.** Encontre a área do paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

(a) $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 3, 1)$ (b) $\mathbf{u} = (2, 3, 0)$, $\mathbf{v} = (-1, 2, -2)$
(c) $\mathbf{u} = (3, -1, 4)$, $\mathbf{v} = (6, -2, 8)$

**4.** Encontre a área do triângulo de vértices $P$, $Q$ e $R$.

(a) $P(2, 6, -1)$, $Q(1, 1, 1)$, $R(4, 6, 2)$ (b) $P(1, -1, 2)$, $Q(0, 3, 4)$, $R(6, 1, 8)$

**5.** Verifique o Teorema 3.4.1 para os vetores $\mathbf{u} = (4, 2, 1)$ e $\mathbf{v} = (-3, 2, 7)$.

**6.** Verifique as partes (*a*), (*b*) e (*c*) do Teorema 3.4.2 para $\mathbf{u} = (5, -1, 2)$, $\mathbf{v} = (6, 0, -2)$, $\mathbf{w} = (1, 2, -1)$ e $k = -5$.

**7.** Encontre um vetor $\mathbf{v}$ que é ortogonal ao vetor $\mathbf{u} = (2, -3, 5)$.

**8.** Encontre o produto misto $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

(a) $\mathbf{u} = (-1, 2, 4)$, $\mathbf{v} = (3, 4, -2)$, $\mathbf{w} = (-1, 2, 5)$
(b) $\mathbf{u} = (3, -1, 6)$, $\mathbf{v} = (2, 4, 3)$, $\mathbf{w} = (5, -1, 2)$

**9.** Suponha que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 3$. Encontre

(a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$ (b) $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}$ (c) $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ (d) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$ (e) $(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$ (f) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{w})$

**10.** Obtenha o volume do paralelepípedo de lados $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

(a) $\mathbf{u} = (2, -6, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 4, -2)$, $\mathbf{w} = (2, 2, -4)$ (b) $\mathbf{u} = (3, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (4, 5, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 2, 4)$