Usando Determinantes para Calcular Áreas

Considere o triângulo com vértices em (x_1,y_1), (x_2,y_2) e (x_3,y_3), ilustrado na Fig. 3.11.

Podemos calcular a área desse triângulo da seguinte maneira:

$$\text{área do trapézio } AP_1P_2B + \text{área do trapézio } BP_2P_3C - \text{área do trapézio } AP_1P_3C$$

Lembre-se de que a área de um trapézio é a metade da distância entre os lados paralelos do trapézio vezes a soma dos comprimentos dos lados paralelos. Logo,

$$\begin{aligned}&\text{área do triângulo } P_1P_2P_3\\ &= \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2) + \tfrac{1}{2}(x_3 - x_2)(y_2 + y_3) - \tfrac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_1 + y_3)\\ &= \tfrac{1}{2}x_2y_1 - \tfrac{1}{2}x_1y_2 + \tfrac{1}{2}x_3y_2 - \tfrac{1}{2}x_2y_3 - \tfrac{1}{2}x_3y_1 + \tfrac{1}{2}x_1y_3\end{aligned}$$

Essa expressão é exatamente

$$\tfrac{1}{2}\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{bmatrix}\right).$$

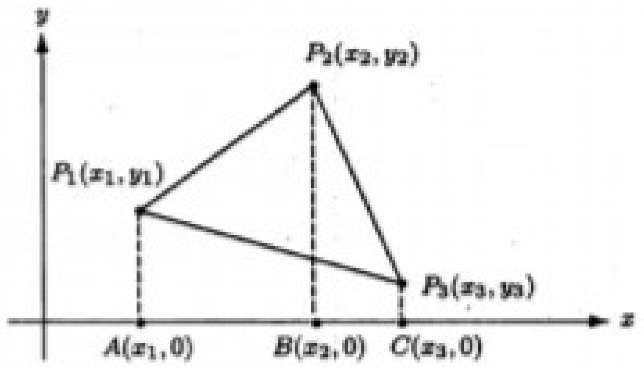

Fig. 3.11

Quando os pontos estiverem em outros quadrantes ou tiverem índices diferentes, a fórmula obtida vai dar menos a área do triângulo. Então, para um triângulo com vértices em (x_1,y_1), (x_2,y_2) e (x_3,y_3), temos

$$\text{área do triângulo} = \tfrac{1}{2}\left|\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{bmatrix}\right)\right| \qquad (3)$$

(a área é metade do valor absoluto do determinante).

Considere agora o paralelogramo ilustrado na Fig. 3.13. Como uma diagonal divide o paralelogramo em dois triângulos iguais, obtemos, da Equação (3),

$$\text{área do paralelogramo} = \left|\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{bmatrix}\right)\right|.$$

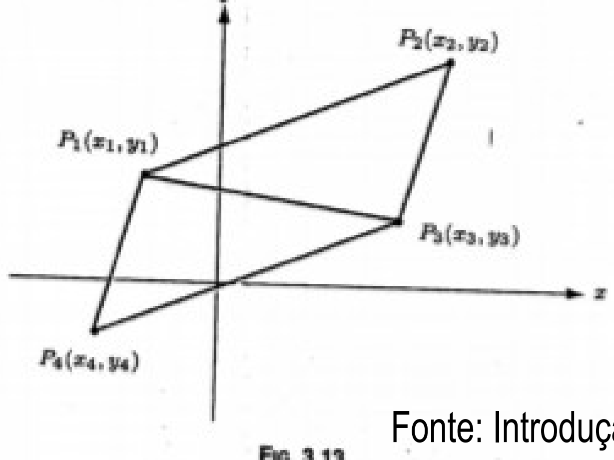

Fig. 3.13

Fonte: Introdução à Álgebra Linear com Aplicações
Kolman, B. e Hill, D. R., LTC, RJ,2006.