GABARITO P2 TURMAS A2/C2

1 a) $(R\cap S)^{-1} = R^{-1}\cap S^{-1}$

Prova:

($\subseteq$) Seja $(x,y)\in(R\cap S)^{-1}$ então $(y,x)\in R\cap S$, isto é, $(y,x)\in R$ e $(y,x)\in S$. Como $(y,x)\in R$ temos que $(x,y)\in R^{-1}$ e como $(y,x)\in S$ temos que $(x,y)\in S^{-1}$ Deste modo $(x,y)\in R^{-1}$ e $(x,y)\in R^{-1}$ logo $(x,y)\in R^{-1}\cap S^{-1}$

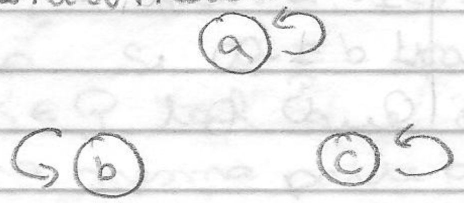
($\supseteq$) Seja $(x,y)\in R^{-1}\cap S^{-1}$ então $(x,y)\in R^{-1}$ e $(x,y)\in S^{-1}$, consequentemente $(y,x)\in R$ e $(y,x)\in S$ logo $(y,x)\in R\cap S$. Portanto $(x,y)\in(R\cap S)^{-1}$ ■

b) $T_1\subseteq A\times B$ e $T_2\subseteq B\times C$. Se $R\subseteq T_1$ e $S\subseteq T_2$ então $R;S\subseteq T_1;T_2$

Prova:

Seja $(x,y)\in R;S$ então $\exists\, b\in B$ tal que $(x,b)\in R$ e $(b,y)\in S$ como $R\subseteq T_1$ temos $(x,b)\in T_1$ e como $S\subseteq T_2$ temos que $(b,y)\in T_2$. Uma vez que $(x,b)\in T_1$ e $(b,y)\in T_2$ temos que $(x,y)\in T_1;T_2$

2 Seja $A=\{a,b,c\}$ a relação $= : A\to A$ dado por
(0,4) $\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ é simétrica e anti-simétrica simultaneamente



grafo de =

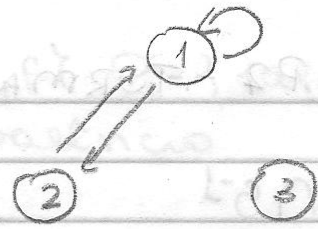
(0,3)

=	a	b	c
a	1	0	0
b	0	1	0
c	0	0	1

matriz de =

(0,3)

GRAFO DE R

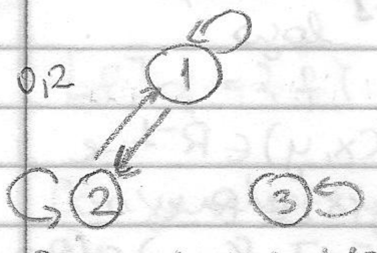


③ $A = \{1, 2, 3\}$

a) $R = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$ 0,4

b) Fecho-{reflexivo}$(R) = \{(1,1), (1,2), (2,1), \underline{(2,2)}, \underline{(3,3)}\}$ 0,3

0,2



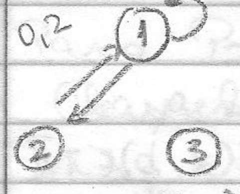
grafo de F-{ri}(R)

F-{ri}(R)	1	2	3
1	1	1	0
2	1	1	0
3	0	0	1

0,2

Fecho-{simétrico}$(R) = \{(1,1), (1,2), (2,1)\} = R$ 0,3

0,2



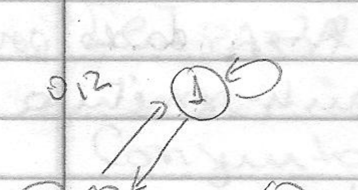
F-{s}(R)

F-{s}(R)	1	2	3
1	1	1	0
2	1	0	0
3	0	0	0

0,2

Fecho-{transitivo}$(R) = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$ 0,3

0,2



Fecho-{t}(R)

F-{t}(R)	1	2	3
1	1	1	0
2	1	1	0
3	0	0	0

0,2

④ a) Se $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{n}$ (V)

Prova

1pt Se $a \equiv b \pmod{n}$ então $n \mid a-b$, ou seja, $\exists k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = nk_1$. Como $c \equiv d \pmod{n}$ então $n \mid c-d$, isto é, $\exists k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $c - d = nk_2$.

Deste modo temos que $\begin{cases} a = b + nk_1 \\ c = d + nk_2 \end{cases}$

Somando as equações membro a membro obtemos

$$a+c = b+d + nk_1 + nk_2$$

$$a+c = b+d + n(k_1+k_2)$$

$$(a+c)-(b+d) = n(k_1+k_2)$$

Isto é

$n \mid [(a+c)-(b+d)]$ logo $a+c \equiv b+d \pmod{n}$

(b) Se $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{z} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{nz}$ (F)

Contra-exemplo

1 pt

$3 \equiv 1 \pmod{2}$ e $2 \equiv 5 \pmod{3}$ mas

é falso que $\underbrace{6}_{3.2} \equiv \underbrace{5}_{1.5} \pmod{\underbrace{6}_{2.3}}$. Temos que

$5 \in [5]_6$ e $6 \in [0]_6$ logo 5 e 6 não estão relacionados por $\equiv_6$

(5) $a \equiv_{\mathcal{P}} b \iff \exists X \in \mathcal{P}$ tal que $a, b \in X$.

a) $\equiv_{\mathcal{P}}$ é relação de equivalência em A

Prova: Vamos verificar que $\equiv_{\mathcal{P}}$ é:

Reflexiva: Como $\mathcal{P}$ é partição $\forall X \in \mathcal{P}$ temos que $X \neq \emptyset$ logo $\forall a \in A$ deve haver alguma parte $X \in \mathcal{P}$ que contenha a então $a \equiv_{\mathcal{P}} a$ pois $a, a \in X \in \mathcal{P}$

Simétrica: se $a \equiv_{\mathcal{P}} b$ para $a, b \in A$ temos que $\exists X \in \mathcal{P}$ tal que $a, b \in X$. Como a e b estão na mesma parte de $\mathcal{P}$ temos $b \equiv_{\mathcal{P}} a$

Transitiva: Sejam $a, b, c \in A$. Suponhamos $a \equiv_{\mathcal{P}} b$ e $b \equiv_{\mathcal{P}} c$. Como $a \equiv_{\mathcal{P}} b$ há uma parte $X_1 \in \mathcal{P}$ que contém a e b. Como $b \equiv_{\mathcal{P}} c$ existe uma parte $X_2 \in \mathcal{P}$ que contém b e c. Note que $b \in X_1$ e $b \in X_2$, pela definição de partição $\forall X, Y \in \mathcal{P}$ se $X \neq Y$ então $X \cap Y = \emptyset$. Logo $X_1 = X_2$ portanto a, b, c estão na mesma parte $\mathcal{P}$ logo $a \equiv_{\mathcal{P}} c$.

b) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ $\mathcal{P}_1 = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}, \{f\}\}$

Classes de Equivalência

$[a]_{\mathcal{P}_1} = \{a\}$,

$[b]_{\mathcal{P}_1} = \{b, c\} = [c]_{\mathcal{P}_1}$

$[d]_{\mathcal{P}_1} = \{d, e\} = [e]_{\mathcal{P}_1}$

$[f]_{\mathcal{P}_1} = \{f\}$

Conjunto-Quociente

$A/_{\equiv_{\mathcal{P}_1}} = \{[a]_{\mathcal{P}_1}, [b]_{\mathcal{P}_1}, [d]_{\mathcal{P}_1}, [f]_{\mathcal{P}_1}\}$

$A/_{\equiv_{\mathcal{P}_1}} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}, \{f\}\} = \mathcal{P}_1$

Para $\mathcal{P}_2 = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}\}$

Classes de equivalência

$[a]_{\mathcal{P}_2} = \{a, b\} = [b]_{\mathcal{P}_2}$

$[c]_{\mathcal{P}_2} = \{c, d\} = [d]_{\mathcal{P}_2}$

$[e]_{\mathcal{P}_2} = \{e, f\} = [f]_{\mathcal{P}_2}$

Conjunto-Quociente

$A/_{\equiv_{\mathcal{P}_2}} = \{[a]_{\mathcal{P}_2}, [c]_{\mathcal{P}_2}, [e]_{\mathcal{P}_2}\}$

$A/_{\equiv_{\mathcal{P}_2}} = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}\} = \mathcal{P}_2$