UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

GAN – Departamento de Análise

APOSTILA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA PARA ECONOMIA III

Professora Solimá Pimentel

Professora Cláudia Ossanai

Professora Ana Carolina Carius

BIBLIOGRAFIA:

Bobik Braga, M et al. ***Matemática para Economistas,*** Editora Atlas

Chiang, A. ***Matemática para Economistas,*** Editora Mc Graw Hill

Howard, A. e Rorres, C. ***Álgebra Linear com aplicações,*** Editora Bookman

Steimbruch, A. e Winterle, P. ***Álgebra Linear***, Editora Makron Books

Winterle, P. ***Vetores e Geometria Analítica,*** Editora Pearson

Diagonalização de Matrizes

Matrizes semelhantes

Uma matriz quadrada C é dita semelhante a uma matriz quadrada de mesma ordem D se existir uma matriz quadrada M invertível tal que $C = M^{-1}.D.M$.

Exemplos:

Propriedade: 1) Se C e D são matrizes semelhantes detC = detD

De fato,

$$\det C = \det\left(M^{-1} D.M\right) = \underbrace{\det M^{-1}.\det D.\det M}_{como\ M\ é\ invertível} = \frac{1}{\det M}.\det D.\det M = \det D$$

2) C é invertível se e somente se D também o for.

3) Se C e D são matrizes semelhantes então elas tem os mesmos valores próprios com a mesma multiplicidade.

4) Se C e D são matrizes semelhantes então possuem o mesmo polinômio característico.

Definição: Dizemos que uma matriz A é diagonalizável, se ela for semelhante a uma matriz diagonal. Neste caso dizemos que A pode ser diagonalizada.

Proposição: Uma matriz quadrada A de ordem n é diagonalizável se e somente se tem n autovetores linearmente independentes. Neste caso A é semelhante a uma matriz diagonal D, com $A = M^{-1}.D.M$, cujos elementos diagonais são os autovalores se A, e M é uma matriz cujas colunas são, respectivamente, os n autovetores linearmente independentes de A.([2]). M é chamada de matriz diagonalizadora.

Exemplo1. A matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é diagonalizável.

Primeiramente devemos calcular o polinômio característico de A. Esse polinômio é dado por $p(x) = \det(xI_2 - A) = \begin{vmatrix} x-5 & -4 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-5)\,(x-2)) - 4 = (x-1)\,(x-6)$. Ou seja, o polinômio característico de A é: $p(x) = (x-1)\,(x-6)$.

[2] A demonstração deste resultado se encontra no livro Introdução à Álgebra Linear com Aplicações de Bernard Kolman, PHB editora.

Logo, os autovalores são 1 e 6.

Agora para que possamos analisar se A é ou não diagonalizável, precisamos verificar se os seus autovetores são linearmente independentes, ou seja se os autovetores formam uma base de $\Re^2$.

Se $\lambda = 1$, temos que: $(1I - A)\, v = 0$, ou seja, $\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Este sistema é equivalente a: $x = -y$, logo todas as soluções são da forma:

$(-y, y) = y(-1, 1)$, para todo $y \in \Re$. Portanto $v_1 = (-1, 1)$ é o autovetor associado a $\lambda = 1$.

Se $\lambda = 6$, temos que $(6I - A)\, v = 0$, ou seja, $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Este sistema é equivalente a $x = 4y$, logo todas as soluções são da forma: $(4y, y) = y(4, 1)$, para todo $y \in \Re$. Portanto $v_2 = (4, 1)$ é o autovetor associado a $\lambda = 6$. Logo os autovetores associados a autovalores distintos são LI.

Daí, como A é uma matriz de ordem 2e o conjunto de autovetores $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente, então, A é diagonalizável.

Além disso a matriz D semelhante e diagonal a A é dada por: $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

Ma matriz diagonalizadora de A é dada por: $M = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Observe também que $A = M^{-1}.D.M$.

De fato,

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & 4/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} -1/5 & 24/5 \\ 1/5 & 6/5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo2: Mostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ não é diagonalizável.

De fato,

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ -1 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 + 3(1-\lambda) - 3(1-\lambda) = 0$$

$\lambda = 0$

$\lambda' = 1$

$\lambda'' = 1$

Consideremos para $\lambda = 1$ e resolvendo o sistema $[A - \lambda I]v = 0$, encontramos os autovetores associados.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3z = 0

-x + y - z=0

x = z

z = 0

Assim o espaço associado ao autovalor 1 é dados por:

$S_1 = \{(x,x,0)/x \in IR\}$

Como a dimensão deste subespaço é 1 então uma base dele é B={(1,1,0)}.

Consideremos agora o autovalor $\lambda = 0$ e resolvendo o sistema $[A - \lambda I]v = 0$, encontramos os autovetores associados.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

x+3z=0

y+3z=0

Assim o espaço associado ao autovalor 1 é dados por:

$S_1 = \{(-3z,-3z,z)/z \in IR\}$

Como a dimensão deste subespaço é 1 então uma base dele é B={(-3,-3,1)}.

A rodem de A é 3 e não conseguimos obter 3 autovetroes LI, logo A não é diagonalizável.

Exemplo3: Verifique se $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ é diagonalizável

Tem-se que $\det(A-\lambda I)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$ se $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2$.

Portanto A têm dois autovalores iguais.

O auto-espaço associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$, tem dimensão 2 pois

$S_1 = \{(x,y,z)/x+2z=0, y \in IR\} = \{(-2z,y,z)/y,z \in IR\}$ e B={(-2,0,1),(0,1,0)} é uma base.

O auto-espaço associado ao autovalor $\lambda_3 = 2$, tem dimensão 1, pois

$S_2 = \{(x,y,z)/x = 0, y = 0, z \in IR\}$ e e B={(0,0,1)} é uma base.

A ordem de A é 3 e podemos exibir um conjunto LI formado por 3 autovetores do IR^3:

B={(-2,0,1),(0,1,0),(0,0,1)}.

Assim A é diagonalizável.

$D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal semelhante a A e M= $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz diagonalizadora correspondente.

Observe que A possui dois autovalores iguais, porém A é diagonalizável.

6ª *Lista de Exercícios*

8. Mostre, em cada caso, que as matrizes abaixo são diagonalizáveis.

a. $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

9. Verifique que a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável.

10. Verifique que a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável.

11. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Mostre que v_1= (1,1) é autovetor de A e que A não é diagonalizável.

12. Verifique se as matrizes A dadas abaixo são diagonalizáveis. Caso seja, determinar uma matriz M que diagonaliza A. Calcule $M^{-1}AM$.

$a)\ A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $b)\ A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $c)\ A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$d)\ A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $e)A=\begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

Equações diferenciais lineares de 2 ordem, homogêneas

Observação. Dizemos que duas funções são ***linearmente independentes*** em um intervalo se nenhuma delas é igual ao produto da outra por uma constante. Caso contrário, elas são ditas ***linearmente dependentes*** no intervalo.

Exemplo.

1. As funções $y = e^x$ e $y = e^{3x}$ são linearmente independentes em $\Re$
2. As funções $y = x^3$ e $y = 4x^3$ são linearmente dependentes em $\Re$

Propriedades

1. ***Linearidade.*** Se y e z são soluções de uma EDO linear homogênea de segunda ordem, então toda combinação linear delas também é solução, isto é, se a e b são números reais, então a função $u = ay + bz$ é solução.
2. Se y e z são soluções linearmente independentes da EDO linear homogênea $y'' + p(x)y' + q(x)y = s(x)$ então as soluções dadas por $u = ay + bz$, onde a e b ***são*** constantes.

Equações diferenciais lineares de 2 ordem, homogêneas, com coeficientes constantes

Considere a EDO da forma $y'' + py' + qy = 0$,

$(*)$

onde p e q são números reais.

Buscaremos soluções da forma $y = e^{rx}$, onde r é um número a determinar. Substituindo esta função em $(*)$, vem: $e^{rx}(r^2 + pr + q)) = 0$. Como $e^{rx} \neq 0$, $r^2 + pr + q = 0$.

A equação $r^2 + pr + q = 0$ é dita ***equação característica da EDO*** $(*)$.

Logo, uma solução de $(*)$ é da forma $y = e^{rx}$ se e somente se r é raiz da equação característica $r^2 + pr + q = 0$.

Existem três possibilidades para obtenção das raízes: existem três possibilidades para a obtenção das raízes:

4. *A equação característica apresenta duas raízes (distintas) r e s*. Nesse caso, temos as soluções $y = e^{rx}$ e $z = e^{sx}$. Como são linearmente independentes, as soluções são dadas por $u = ae^{rx} + be^{sx}$, de acordo com a propriedade 2 acima.

Exemplo. *Resolva a equação* $y'' - 2y' - 3y = 0$.
Solução. A equação característica é $r^2 - 2r - 3 = 0$, cujas raízes são -1 e 3. As equações são dadas por $y = ae^{-x} + be^{3x}$.

5. *A equação característica apresenta uma única raíz (dupla)* r_0. Nesse caso, temos apenas a solução $y = e^{r_0 x}$. Prova-se que $z = xe^{r_0 x}$ é outra solução, e que y e z são linearmente independentes. Logo, as soluções são das por $u = ae^{r_0 x} + bxe^{r_0 x}$.

Exemplo. Dê as soluções da equação $y'' + 6y' + 9y = 0$.
Solução. A equação característica é $r^2 + 6r + 9 = 0$, que possui apenas a raiz -3. As soluções são dadas por $y = ae^{-3x} + bxe^{-3x}$.

6. *A equação característica não tem raízes reais.* Nesse caso, se as raízes complexas da equação característica são $\alpha \pm \beta i$ onde $\beta > 0$ e i é a unidade imaginária, prova-se que as funções: $y = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $z = e^{\alpha x} sen(\beta x)$ são soluções linearmente independentes de $(*)$.

Exemplo. Dê as soluções da equação $y'' - 2y' + 10y = 0$.
Solução. A equação característica é $r^2 - 2r + 10 = 0$. As raízes são $1 \pm 3i$. As soluções são dadas por $y = ae^{x}\cos(3x) + be^{x} sen(3x)$.

ANPEC - 2009 - QUESTÃO 14

Seja $f: R \to R$ uma função duas vezes diferenciável, tal que $f(0) = f'(0) = 1$ e $f'' + 2f' + f =$ 0. Se $A = \ln \frac{f(4)}{9}$, calcule o valor de $\alpha = \left[A \int_0^1 e^t f(t) dt \right]^2$

R: $r^2+2r+1=0$

$r=-1$

$f(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$

f'(t)= $-c_1e^{-t}+c_2e^{-t}-c_2te^{-t}$

f(0)= $c_1=1$

f'(0)= $-1+c_2=1$

$c_2=2$

f(t)= $e^{-t}+2te^{-t}$

f(4)= $e^{-4}+2.4e^{-4}=9e^{-4}$

$A=\ln\frac{f(4)}{9}=\ln\frac{9e^{-4}}{9}=\ln e^{-4}=-4$

$\alpha=\left[A\int_0^1 e^t f(t)dt\right]^2=\left[-4\int_0^1 e^t(e^{-t}+2te^{-t})dt\right]^2=\left[-4\int_0^1(1+2t)dt\right]^2=\left[-4[(t+t^2)|_0^1]\right]^2=\left[-4[(t+t^2)|_0^1]\right]^2=$
$[-4[2]]^2=64$

ANPEC 2010
Questão 12

Considere as equações diferenciais abaixo e julgue as afirmativas:
(I)y''-4y=0, (II)y''-3y'-4y=4x² (III)y''-2y'+y=0

(0) (I), (II) e (III) são equações diferenciais lineares de segunda ordem;

R:Verdadeiro
Todas as equações estão escritas da forma $f(x)y''+g(x)y'+h(x)y=l(x)$

(1) $y=e^{-2x}+e^{2x}$ é solução de (I), para os valores de contorno $y(0)=3$ e $y(\ln 3)=163/9$
R: Verdadeiro

$y=e^{-2x}+e^{2x}$
$y'=-2e^{-2x}+2e^{2x}$
$y''=4e^{-2x}+4e^{2x}$

Portanto, $4e^{-2x}+4e^{2x}$ -4 ($e^{-2x}+e^{2x}$)=0. Logo $y=e^{-2x}+e^{2x}$ será solução de (1) para qualquer valor de contorno.

(2) A solução da homogênea associada a (II) é $y_h=Ae^{-3x}+Be^{-4x}$, em que A e B são constantes arbitrárias;

R: Falso

$y_h = Ae^{-3x} + Be^{-4x}$

$y_h' = -3Ae^{-3x} - 4Be^{-4x}$

$y_h'' = 9Ae^{-3x} + 16Be^{-4x}$

Portanto, y''-3y'-4y=0→

$9Ae^{-3x} + 16Be^{-4x} - 3(-3Ae^{-3x} - 4Be^{-4x}) - 4(Ae^{-3x} + Be^{-4x}) = 0 \rightarrow 14Ae^{-3x} + 15Be^{-4x} = 0$

Como a igualdade não se verifica, $y_h = Ae^{-3x} + Be^{-4x}$ não é solução homogênea de (2).

(3) $y_p = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$ é solução particular de (II);

R: Verdadeiro

$y_p = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$

$y_p' = -2x + \frac{3}{2}$

$y_p'' = -2$

(II)y''-3y'-4y=4x²

-2-3($-2x + \frac{3}{2}$)-4($-x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$)=4x²

-2+6x-9/2+4x²-6x+13/2=4x²

4x²=4x²

Problema de valores iniciais e problema de valores de contorno

Um ***problema de valores iniciais*** para uma EDO de ordem 2 consiste em se achar uma solução y dela que verifica as condições (chamadas ***condições iniciais***) $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = a$, onde x_0 é um ponto dado, e as constantes y_0 e a também são dadas.

Exemplo. Resolva o seguinte problema de valores iniciais:

$y'' + 2y' - 8y = 0 \qquad y(0) = 5 \qquad y'(0) = -2$

Solução. A equação característica é $r^2 + 2r - 8 = 0$, cujas raízes são -4 e 2. As soluções são dadas por $y = ae^{-4x} + be^{2x}$. Então $y' = -4ae^{-4x} + 2be^{2x}$. Portanto, $y(0) = a + b = 5$ e $y'(0) = -4a + 2b = -2$. O que implica, a = 2 e b = 3. Substituindo na expressão de y, $y = 2e^{-4x} + 3e^{2x}$.

Um ***problema de valores de contorno*** para uma EDO de ordem 2 consiste em se achar uma solução y dela que verifica as condições (chamadas ***condições de contorno***) $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$, onde x_0 e x_1 são pontos dados, e as constantes y_0 e y_1 *a* também são dadas.

Exemplo. Resolva o seguinte problema de valores de contorno:

$$y'' - 4y = 0 \qquad y(0) = 3 \qquad y(\ln 3) = \frac{163}{9}$$

Solução. A equação característica é $r^2 - 4 = 0$, cujas raízes são -2 e 2. As soluções são dadas por $y = ae^{-2x} + be^{2x}$. Temos, $y(0) = a + b = 3$ e $y(\ln 3) =$ $y = ae^{-2\ln 3} + be^{2\ln 3} = \frac{1}{9}a + 9b = \frac{163}{9}$.. O que implica, a = 1 e b = 2. Substituindo na expressão de y, $y = e^{-2x} + 2e^{2x}$.

ANPEC-2008 - questão 12

Considere a equação diferencial $y''(x) + y'(x) + 2y(x) = 0$ com condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Calcule $y'''(0)$.

Resolução: A equação característica da EDO dada é:

$x^2 + x + 2 = 0$, as raízes desta equação são:

$x_1 = (-1+\sqrt{7}\, i)/2$ e $x_2 = (-1-\sqrt{7}\, i)/2$

Então a solução y será:

$$y = e^{-x/2}(A_1 \cos(\sqrt{7}x/2) + A_2 sen(\sqrt{7}x/2)) \Rightarrow y(0) = 1 \Rightarrow$$
$$1 = e^{-0/2}(A_1 \cos(\sqrt{7}.0/2) + A_2 sen(\sqrt{7}.0/2)) \Rightarrow 1 = A_1$$

$$y' = -\frac{1}{2}e^{-x/2}(A_1\cos(\sqrt{7}x/2) + A_2 sen(\sqrt{7}x/2)) + e^{-x/2}(-A_1\frac{\sqrt{7}}{2}sen(\sqrt{7}x/2) + A_2\frac{\sqrt{7}}{2}\cos(\sqrt{7}x/2)) =$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}(A_1\cos(\sqrt{7}.0/2) + A_2 sen(\sqrt{7}.0/2)) + (-A_1\frac{\sqrt{7}}{2}sen(\sqrt{7}.0/2) + A_2\frac{\sqrt{7}}{2}\cos(\sqrt{7}.0/2))$$

$$0 = -\frac{1}{2}A_1 + \frac{\sqrt{7}}{2}A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

Tem-se que $y''(x) = -y'(x) - 2y(x) \Rightarrow y''(0) = -y'(0) - 2y(0) = 0 - 2.1 = -2$

Por outro lado

$y'''(x) + y''(x) + 2y'(x) = 0$ então

$y'''(x) = -y''(x) - 2y'(x) \Rightarrow y'''(0) = -y''(0) - 2y'(0) \Rightarrow y'''(0) = 2$

Sistemas de EDO lineares

Considere o sistema $(1)\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, ..., x_n) \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases}$

Uma ***solução*** de (1) são funções $x_1(t), ..., x_n(t)$ tal que $\dfrac{dx_j(t)}{dt} = f_j(t, x_1(t), ..., x_n(t))$.

Exemplo. $\begin{cases} x_1(t) = t \\ x_2(t) = t^2 \end{cases}$ é solução para $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2t \end{cases}$

Além das equações (1) freqüentemente impõem-se condições iniciais sobre $x_1(t_0) = x_1^0, ..., x_n(t_0) = x_n^0$.

Exemplo. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1, x_1(0) = 1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1^2, x_2(0) = \frac{3}{2} \end{cases}$ $\quad x_1(t) = e^t, x_2(t) = 1 + \dfrac{e^{2t}}{2}$ é uma solução do ***PVI***.

Sistemas de EDO de 1ª ordem podem originar de EDO de ordem mais alta numa única variável $y(t)$. Uma EDO de n-ésima ordem na única variável y pode se converter num sistema de n equações de 1ª ordem nas variáveis

$x_1(t) = y, x_2(t) = \frac{dy}{dt}, \ldots, x_n(t) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y$.

Exemplo. $a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = 0$

$x_1(t) = y, \ldots, x_n(t) = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$. Então, $\frac{dx_1}{dt} = x_2, \frac{dx_2}{dt} = x_3, \ldots, \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n$. e

$\frac{dx_n}{dt} = \frac{d^n y}{dt^n}$

Assim, $\frac{dx_n}{dt} = \frac{d^n y}{dt^n} = \frac{a_{n-1}(t)x_n + a_{n-2}(t)x_{n-1} + \ldots + a_0 x_1}{a_n(t)}$, se $a_n(t) \neq 0$.

Exemplo.

$\frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{d^2}{dt^2} + 3_0 y = e^t, y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 0$,

$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \frac{dx_2}{dt} = x_3, \ldots, \frac{dx_3}{dt} = e^t - x_2^2 - 3x_1$,

$x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0$.

Se cada função f_i em (1) é linear em $x_1, \ldots, x_n$ então o **sistema de equações é linear.**

Considere o sistema mais geral de EDO linear $(2)\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)\, x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)\, x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases}$

Se $g_i(t) = 0$, o sistema é ***homogêneo***.

Consideraremos apenas os casos $a_{ij}(t) = a_{ij}$ constantes.

Se $A = [a_{ij}]$ e $x = (x_1, \ldots, x_n)$, escrevemos $\dot{x} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right)$. Assim (2) pode ser escrito na forma $\dot{x} = Ax + G, G = [g_i(t)]$ ·

Vamos considerar apenas o caso $a_{ij}(t) = a_{ij}$ e $G = 0$.

(3) $\dot{x} = Ax, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt}(t) \end{bmatrix}, A = [a_{ij}]$

Para cada autovalor λ_j de *A*, uma solução $x_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$. Se *A* tem *n* autovetores LI, $v_1,...,v_n$, com autovalores $\lambda_1,...,\lambda_n$ então $x_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j, j = 1,...,n$ são *n* soluções LI.

Assim $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + ... + c_n e^{\lambda_n t} v_n$ é uma solução geral de (3).

Exemplo. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + 4x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 2x_1 + x_2 - x_3 \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} x \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$

$v_1 = (-1,4,1); v_2 = (1,2,1); v_3 = (-1,1,1)$. Daí, $x(t) = c_1 e^{t} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

QUESTÃO 15

Considere o sistema de equações diferenciais abaixo.

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y \\ y' = -3x + y \end{cases}.$$

Se *x(0) = 5* e *y(0) =0,* encontre $\dfrac{x'''(0)}{2}$

R:

A matriz A desse sistema será: $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, portanto $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -3 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

O polinômio característico dela será:

(2- λ)(1- λ)-6=0

2-2 λ - λ + λ ²-6=0

-4-3 λ + λ ²=0

$\lambda_1 = 4$
$\lambda_2 = -1$

Para λ =4 temos

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

-2x-2y=0

-X=y

S={(x,-x) $\forall x \in IR\}$

B={(1,-1)}

Para λ =-1 temos

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3x-2y=0

y=3x/2

S={(x,3x/2) $\forall x \in IR\}$

B={(1,3/2)}

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=Ae^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}+Be^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

Aplicando-se nos valores dados:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}=Ae^{4.0}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}+Be^{-0}\begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B \\ 3B/2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A+B \\ -A+3\dfrac{B}{2} \end{bmatrix}$$

A+B=5

$-A+3\frac{B}{2}=0$

A=3 e B=2

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=3e^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}+2e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$x(t)=3e^{4t}+2e^{-t}$

$x'(t)=12e^{4t}-2e^{-t}$

$x''(t)=48e^{4t}+2e^{-t}$

$x'''(t)=192e^{4t}-2e^{-t}$

$x'''(0)=192e^{4.0}-2e^{-0}$

$x'''(0)/2=95$

SISTEMAS LINEARES VIA AUTOVALORES

$$\dot{x} = Ax$$

Se A é uma matriz diagonal então todas as equações são de variáveis separadas e sua solução é o vetor x

$$x_1(t) = C_1 e^{a_{11}t}; \quad x_2(t) = C_2 e^{a_{22}t}; \ldots\ldots, x_n(t) = C_n e^{a_{nn}t}$$

Quando a matriz A é diagonal dizemos que o sistema é desacoplado pois nenhuma variável interfere explicitamente na outra. Quando A não é diagonal o sistema é dito acoplado, isto é, existe uma dependência explícita de alguma variável com relação a outra.

No caso em que A não é diagonal pode-se através de seus autovalores e autovetores tentar diagonalizar a matriz.

Tem-se então 3 casos a se analisar:

1. Autovalores distintos ;
2. Autovalores complexos e
3. Autovalores Múltiplos.

1.) <u>Autovalores distintos:</u>

Se o sistema é acoplado (A não é diagonal) e A tem autovalores distintos, então pela definição de Autovalores temos que:

$$A\, v_i = r_i\, v_i$$

r_i = autovalor.
v_i = autovetor relacionado com r_i.

Seja P uma matriz nxn cujas colunas são os n autovetores de A.

$P = [\ v_1\ ,\ v_2\ ,\ldots,\ v_n\ ]$ Então $AP = PD$ onde

$$D \equiv \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_n \end{pmatrix}$$

Como os autovetores são L.I. (linearmente independentes) , pois os autovalores são distintos; então $P^{-1}AP = D$ onde D é diagonal. Para compor um sistema auxiliar desacoplado mudaremos momentaneamente x para $x = Py$ ou $y = P^{-1}x$ então:

$\dot{y}$ será $\dot{y} = P^{-1}\dot{x} = P^{-1}Ax = P^{-1}APy = Dy$ onde usou-se as igualdades $\dot{x} = Ax \qquad x = Py$

$\dot{x} = Ax$ é o sistema.
Logo o sistema auxiliar será:
$\dot{y} = Dy$ que é um sistema desaclopado cuja solução é:
$y_1(t) = C_1 e^{r1t}$; $x_2(t) = C_2 e^{r2t}$; ...; $x_n(t) = C_n e^{rn\, t}$

Como $x = Py$, é só substituir o vetor $y = (\ y_1\ \ y_2\ \ y_3 \ldots y_n\ )$ nessa equação é teremos as solução:

$$x = Py = [\, v_1\, v_2\ \cdots\ \ v_n\,] \begin{bmatrix} C_1 e^{r1t} \\ \vdots \\ C_n e^{rnt} \end{bmatrix}$$

$x(t) = C_1 e^{r1t} v_1 + C_2 e^{r2t} v_2 + \ldots. + C_n e^{rnt} v_n$

Resumindo através de um teorema:

TEOREMA

"Suponhamos que a matriz Anxn tenha n autovalores distintos $r_1, r_2, \ldots, r_n$ com seus correspondentes autovetores $v_1, \ldots, v_n$. Então a solução geral do sistema linear $\dot{x} = Ax$ de equações diferenciais é:

$$x(t) = C_1 e^{r1t} v_1 + C_2 e^{r2t} v_2 + \ldots + C_n e^{rnt} v_n\text{"}$$

Esse teorema só é válido se os autovalores são distintos. Quando os autovalores são complexos ou múltiplos a solução muda e o teorema não é aplicável.

Estudaremos essas duas situações com um sistema de duas equações, sendo facilmente estendido para outros casos.

2) Autovalores complexos: O teorema seguinte resume a solução nesse caso:

"Seja A uma matriz real (de n^{os}. reais) 2x2, com autovalores complexos $\alpha \pm i\beta$ e seus correspondentes autovetores $\upsilon \pm i\omega$. Então, a solução geral do sistema linear de equações diferenciais $\dot{x} = Ax$ é:

$$x(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t(C_1\upsilon - C_2\omega) - e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t(C_2\upsilon + C_1\omega)\text{."}$$

3) Múltiplos autovalores reais: O teorema seguinte resume a solução nesse caso:

"Seja A uma matriz real (de n^{os}. reais) 2x2, com autovalores iguais $r_1 = r_2 = r$ e apenas um autovetor independente υ. Seja ω um autovetor gerado de A ou seja ω satisfaz a equação $(A - rI)\ \omega = \upsilon$. Então, a solução geral do sistema linear de equações diferenciais $\dot{x} = Ax$ é:

$$x(t) = e^{rt}(C_1\upsilon + C_2\omega) + te^{\alpha t}(C_2\upsilon)\text{."}$$