

Lista 3

1. Verifique se os produtos abaixo estão bem definidos e, em caso afirmativo, calcule-os.

a)  $[1 \quad 1/3 \quad -2] \begin{bmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$  b)  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 1/2 \quad -1]$  c)  $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$  d)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

2. Uma matriz quadrada A se diz simétrica se  $A^T = A$  e anti-simétrica se  $A^T = -A$ .

- (a) Mostre que a soma de duas matrizes simétricas é também simétrica e que o mesmo ocorre para matrizes anti-simétricas.
- (b) O produto de duas matrizes simétricas de ordem n é também uma matriz simétrica? Justifique sua resposta.

3. Determine números reais a e b para que a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a-b \\ a+b & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$  seja simétrica.

4.

a) Verifique que as matrizes da forma  $X = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, c \in \mathfrak{R}$ , satisfazem a igualdade  $X^2 = I$ ,

onde I é a matriz identidade de ordem 2. Dizemos que as matrizes da forma X são raízes quadradas da matriz identidade I.

b) Determine todas as raízes quadradas da matriz identidade I de ordem 2.

5. Se A e B são matrizes reais de ordem 2 que comutam com a matriz

$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , isto é,  $AX = XA$  e  $BX = XB$ . Mostre que  $AB = BA$ .

6. Diga se são verdadeiras ou falsas as afirmações abaixo. Caso verdadeira prove, caso contrário dê um contra-exemplo.

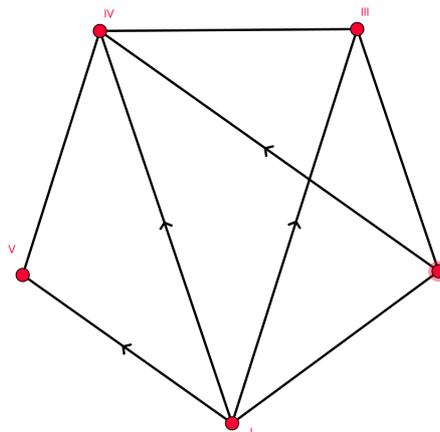
- (a) Se  $AB = 0$ , então  $A = 0$  ou  $B = 0$ .
- (b) Se  $AB = 0$ , então  $B.A=0$ .
- (c) Se pudermos efetuar o produto  $A.A$ , então A é uma matriz quadrada.

7. Uma rede de comunicação tem cinco locais com transmissores de potências distintas. Estabelecemos que  $a_{ij} = 1$ , na matriz abaixo significa que a estação i pode transmitir diretamente à estação j,  $a_{ij} = 0$  significa que a transmissão da estação i não alcança a estação j. Observe que a diagonal principal é nula significando que uma estação não transmite diretamente para si mesma.

Apresentamos uma figura que representa as relações de transmissão entre as estações. Os pontos representam as estações e estão rotuladas com números romanos, as ligações com seta indicam a transmissão (direta) orientada no sentido estação de saída – estação de chegada e as ligações sem seta indicam que a transmissão (direta) ocorre nos dois sentidos. Como exemplo, a estação III pode transmitir diretamente à estação IV e vice-

versa. Já a estação II pode transmitir diretamente à estação IV, porém a estação IV não pode transmitir diretamente à estação II.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Qual seria o significado da matriz  $A^2 = A \cdot A$ ?

Seja  $A^2 = [c_{ij}]$ . Calculemos o elemento  $c_{42} = \sum a_{4k} a_{k2} = 0 + 0 + 1 + 0 + 0 = 1$ .

Note que a única parcela não nula veio de  $a_{43} \cdot a_{32} = 1 \cdot 1$ . Isto significa que a estação IV transmite para a estação II através de uma retransmissão pela estação III (veja a figura), embora não exista uma transmissão direta de IV para II.

- Calcule  $A^2$ .
- Qual o significado de  $c_{13} = 2$ ?
- Discuta o significado dos termos nulos, iguais a 1 e maiores que 1 de modo a justificar a afirmação: “A matriz  $A^2$  representa o número de caminhos disponíveis para se ir de uma estação a outra com uma única retransmissão”.
- Qual o significado das matrizes  $A + A^2$ ,  $A^3$  e  $A + A^2 + A^3$ ?
- Se  $A$  fosse simétrica, o que significaria?

Lista elaborada pela Prof<sup>a</sup> Marina Tebet  
 Coordenadora da Equipe de Álgebra Linear  
 GAN/IME/UFF