

Lista 3 - Resolução

1. Verifique se os produtos abaixo estão bem definidos e, em caso afirmativo, calcule-os.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Solução.

a) A ordem da primeira matriz é 1×3 e a da segunda é 3×1 , logo o produto está bem definido e terá ordem 1×1 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix} = [1 \cdot 2 + 1/3 \cdot (-1/2) + (-2) \cdot 2] = [-13/6]$$

b) A ordem da primeira matriz é 3×1 e a da segunda é 1×3 , logo o produto está bem definido e terá ordem 3×3 :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ -1/2 & -1/4 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

c) A ordem da primeira matriz é 2×1 e a da segunda é 2×2 , logo o produto matricial não está definido, pois o número de colunas da primeira não coincide com o número de linhas da segunda.

d) A ordem da primeira matriz é 2×2 e a da segunda é 2×1 , logo o produto matricial está bem definido e terá ordem 2×1 .

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

2. Uma matriz quadrada A se diz simétrica se $A^T = A$ e anti-simétrica se $A^T = -A$.

- (a) Mostre que a soma de duas matrizes simétricas é também simétrica e que o mesmo ocorre para matrizes anti-simétricas.
- (b) O produto de duas matrizes simétricas de ordem n é também uma matriz simétrica? Justifique sua resposta.

Solução.

(a) Sejam A e B duas matrizes simétricas. Desse modo $A^T = A$ e $B^T = B$.

$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$, logo $A + B$ é simétrica.

Analogamente, sejam A e B matrizes anti-simétricas de ordem n , isto é, $A^T = -A$ e $B^T = -B$. Temos $(A + B)^T = A^T + B^T = -A + (-B) = -(A+B)$, logo $A + B$ é uma matriz anti-simétrica de ordem n .

(b) Não. Lembre-se que para mostrar que uma propriedade não é válida, basta exibir um contra exemplo. Assim, considere as seguintes matrizes simétricas:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. O produto delas resulta em $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ que não é simétrica.

3. Determine números reais a e b para que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a-b \\ a+b & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ seja simétrica.

Solução.

Para que A seja simétrica, devemos ter $A = A^T$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & a+b & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ a-b & 0 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Assim, igualando } A \text{ e } A^T:$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a-b \\ a+b & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ a-b & 0 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Daí, } \begin{cases} a+b=2 \\ a-b=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=3/2 \\ b=1/2 \end{cases}.$$

4.

a) Verifique que as matrizes da forma $X = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, c \in \mathfrak{R}$, satisfazem a igualdade $X^2 = I$,

onde I é a matriz identidade de ordem 2. Dizemos que as matrizes da forma X são raízes quadradas da matriz identidade I .

b) Determine todas as raízes quadradas da matriz identidade I de ordem 2.

Solução.

a) Calculando X^2 , temos $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \forall c \in \mathfrak{R}$.

b)

Solução 1.

Precisamos determinar A tal que $A^2 = I$.

$$\text{Seja } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathfrak{R}. \quad A^2 = AA = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, temos que resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ ab + bd = 0 \\ ac + cd = 0 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases}.$$

Esse sistema não é linear, não podemos resolvê-lo da mesma maneira que foi feita no exercício 3. Vamos considerar quatro casos, a partir das equações 2 e 3:

- 1º caso: $b = 0$ e $c = 0$. Substituindo no sistema anterior, teremos $a = \pm 1$ e $d = \pm 1$.

Assim, deste caso, temos as soluções $\pm I$ e $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- 2º caso: $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

Para que as equações 2 e 3 sejam satisfeitas, $a+d=0$, o que implica em $d = -a$.

Da equação 1, $bc = 1 - a^2$, podemos fazer $c = \frac{1 - a^2}{b}$.

Substituindo $d = -a$ na equação 4, chegamos ao mesmo resultado.

Desse caso, temos as soluções $\pm \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1 - a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$.

• 3º caso: $b \neq 0$ e $c = 0$.

Teremos $a^2 = 1$ e $d^2 = 1$, o que nos dará $a = \pm 1$ e $d = \pm 1$.

Mas para que a equação $b(a+d) = 0$ seja satisfeita com $b \neq 0$, devemos ter $a = -d$.

Logo, as soluções desse caso são $\pm \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

• 4º caso: $b = 0$ e $c \neq 0$.

Teremos novamente $a^2 = 1$ e $d^2 = 1$, o que nos dará $a = \pm 1$ e $d = \pm 1$.

Mas para que a equação $b(a+d) = 0$ seja satisfeita com $c \neq 0$, devemos ter $a = -d$.

Desse caso, temos as soluções $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$.

Note que as soluções $\pm \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ são contempladas nas soluções do 2º caso fazendo $a=1$.

Portanto, as soluções serão as matrizes:

$$\pm I, \pm \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1 - a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, b \neq 0 \text{ e } \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, c \in \mathfrak{R}^*.$$

Solução 2. Se $a+d = 0 \Rightarrow d = -a \Rightarrow bc + a^2 = 1 \Rightarrow$

(a) Se $b \neq 0$, teremos $c = \frac{1 - a^2}{b}$.

Desse subcaso, resultam as soluções do tipo $\pm \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1 - a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$.

(b) Se $b = 0$, teremos $a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$. Veja que $c \in \mathfrak{R}$.

Deste subcaso, resultam as soluções do tipo $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$.

2º caso. Se $a+d \neq 0 \Rightarrow b=c=0 \Rightarrow a^2 = 1$ e $d^2 = 1$, o que nos dará $a = \pm 1$ e $d = \pm 1$.

Esse caso fornece as soluções do tipo $\pm I$.

Portanto, as soluções serão as matrizes:

$$\pm I, \pm \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1 - a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, b \neq 0 \text{ e } \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, c \in \mathfrak{R}^*.$$

5. Se A e B são matrizes reais de ordem 2 que comutam com a matriz

$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, isto é, $AX = XA$ e $BX = XB$. Mostre que $AB = BA$.

Solução.

Sejam $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathfrak{R}$ e $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, $e, f, g, h \in \mathfrak{R}$, matrizes que comutam com a

matriz dada no enunciado, podemos escrever:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ ou, fazendo as

multiplicações em cada membro da igualdade e igualando os resultados obtemos:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}.$$

Desse modo:

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & 0 \\ 0 & dh \end{pmatrix} = BA.$$

6. Diga se são verdadeiras ou falsas as afirmações abaixo. Caso verdadeira prove, caso contrário dê um contra-exemplo.

(a) Se $AB = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$.

(b) Se $AB = 0$, então $B.A = 0$.

(c) Se pudermos efetuar o produto $A.A$, então A é uma matriz quadrada.

Solução.

(a) Falso. Por exemplo, sejam $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Falso. Usando as mesmas matrizes A e B do item acima, temos, $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mas $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

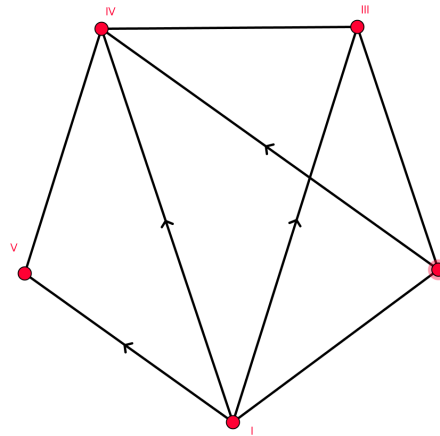
(c) Verdadeiro, pois se A é uma matriz $m \times n$ e se podemos efetuar $A \times A \Rightarrow m = n$.

7. Uma rede de comunicação tem cinco locais com transmissores de potências distintas.

Estabelecemos que $a_{ij} = 1$, na matriz abaixo significa que a estação i pode transmitir diretamente à estação j , $a_{ij} = 0$ significa que a transmissão da estação i não alcança a estação j . Observe que a diagonal principal é nula significando que uma estação não transmite diretamente para si mesma.

Apresentamos uma figura que representa as relações de transmissão entre as estações. Os pontos representam as estações e estão rotuladas com números romanos, as ligações com seta indicam a transmissão (direta) orientada no sentido estação de saída – estação de chegada e as ligações sem seta indicam que a transmissão (direta) ocorre nos dois sentidos. Como exemplo, a estação III pode transmitir diretamente à estação IV e vice-versa. Já a estação II pode transmitir diretamente à estação IV, porém a estação IV não pode transmitir diretamente à estação II.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Qual seria o significado da matriz $A^2 = A \cdot A$?

Seja $A^2 = [c_{ij}]$. Calculemos o elemento $c_{42} = \sum a_{4k} a_{k2} = 0 + 0 + 1 + 0 + 0 = 1$.

Note que a única parcela não nula veio de $a_{43} \cdot a_{32} = 1 \cdot 1$. Isto significa que a estação IV transmite para a estação II através de uma retransmissão pela estação III (veja a figura), embora não exista uma transmissão direta de IV para II.

- Calcule A^2 .
- Qual o significado de $c_{13} = 2$?
- Discuta o significado dos termos nulos, iguais a 1 e maiores que 1 de modo a justificar a afirmação: “A matriz A^2 representa o número de caminhos disponíveis para se ir de uma estação a outra com uma única retransmissão”.
- Qual o significado das matrizes $A + A^2$, A^3 e $A + A^2 + A^3$?
- Se A fosse simétrica, o que significaria?

Solução.

$$a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $c_{13} = 2$ e significa que a estação I transmite para estação III através de uma terceira de dois modos (através da estação II e da estação IV).

c) Cada elemento de A^2 representa o número de modos que uma estação transmite para uma outra através de uma terceira estação.

d) Cada elemento de $A + A^2$ representa a soma do número de modos que uma estação transmite para outra, diretamente e através de uma terceira para uma outra.

$$A + A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Veja:

O elemento a_{14} indica que há 4 maneiras de se transmitir da estação I à estação IV:

Diretamente: $I \rightarrow IV$; Através de uma terceira: $I \rightarrow V \rightarrow IV$, $I \rightarrow II \rightarrow IV$ e $I \rightarrow III \rightarrow IV$.

Cada elemento de A^3 representa o número de modos que uma estação transmite para uma outra através de uma quarta estação.

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Veja:

O elemento a_{25} indica que há 2 maneiras de se transmitir da estação I para a estação II através de uma quarta estação: $II \rightarrow III \rightarrow IV \rightarrow V$ e $II \rightarrow I \rightarrow IV \rightarrow V$.

Cada elemento de $A + A^2 + A^3$ representa a soma do número de modos que uma estação transmite para outra estação, diretamente, através de uma terceira e de uma quarta.

$$A + A^2 + A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 9 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Veja:

Experimente listar as maneiras de se transmitir da estação III para a estação V considerando transmissões diretas, através de uma terceira e através de uma quarta.

e) Se A fosse simétrica, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$, isso significaria que a estação i transmite para estação j sempre que a estação j transmite para a i .

Lista elaborada pela Prof^a Marina Tebet
GAN/IME/UFF