Some −2 vezes a primeira equação à segunda para obter esquerda

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Some −2 vezes a primeira linha à segunda para obter direita

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Some −3 vezes a primeira equação à terceira para obter

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

Some −3 vezes a primeira linha à terceira para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Multiplique a segunda equação por $\frac{1}{2}$ para obter

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

Multiplique a segunda linha por $\frac{1}{2}$ para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Some −3 vezes a segunda equação à terceira para obter

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Some −3 vezes a segunda linha à terceira para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Multiplique a terceira equação por −2 para obter

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Multiplique a terceira linha por −2 para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Some −1 vez a segunda equação à primeira para obter

$$\begin{aligned} x \quad + \tfrac{11}{2}z &= \tfrac{35}{2} \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Some −1 vez a segunda linha à primeira para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Some $-\frac{11}{2}$ vezes a terceira equação à primeira e $\frac{7}{2}$ vezes a terceira equação à segunda para obter

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Some $-\frac{11}{2}$ vezes a terceira linha à primeira e $\frac{7}{2}$ vezes a terceira equação à segunda para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A solução $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ pode, agora, ser visualizada. ♦

Conjunto de Exercícios 1.1

1. Quais das seguintes equações são lineares em x_1, x_2 e x_3?

(a) $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}x_3 = 1$ (b) $x_1 + 3x_2 + x_1x_3 = 2$ (c) $x_1 = -7x_2 + 3x_3$

(d) $x_1^{-2} + x_2 + 8x_3 = 5$ (e) $x_1^{3/5} - 2x_2 + x_3 = 4$ (f) $\pi x_1 - \sqrt{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 7^{1/3}$

2. Sabendo que k é uma constante, quais das seguintes equações são lineares?

(a) $x_1 - x_2 + x_3 = \operatorname{sen} k$ (b) $kx_1 - \dfrac{1}{k}x_2 = 9$ (c) $2^k x_1 + 7x_2 - x_3 = 0$

3. Encontre o conjunto-solução de cada uma das seguintes equações lineares.

(a) $7x - 5y = 3$ (b) $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$

(c) $-8x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1$ (d) $3v - 8w + 2x - y + 4z = 0$

4. Encontre a matriz aumentada de cada um dos seguintes sistemas de equações lineares.

(a) $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x_1 \quad + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad - x_4 + x_5 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 \quad - x_5 &= 2 \\ x_3 + 7x_4 &= 1 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$

5. Encontre o sistema de equações lineares correspondendo à matriz aumentada.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

6. (a) Encontre uma equação linear nas variáveis x e y que tem $x = 5 + 2t$, $y = t$ como solução geral.

(b) Mostre que $x = t$, $y = \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}$ também é a solução geral da equação da parte (a).

7. A curva $y = ax^2 + bx + c$ mostrada na figura passa pelos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3). Mostre que os coeficientes a, b e c são uma solução do sistema de equações lineares cuja matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{bmatrix}$$

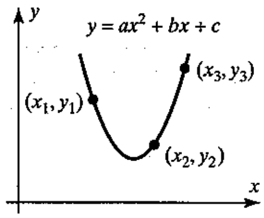

Figura Ex-7

8. Considere o sistema de equações

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= a \\ x \quad\;\; + z &= b \\ 2x + y + 3z &= c \end{aligned}$$

Mostre que para este sistema ser consistente, as constantes a, b e c devem satisfazer $c = a + b$.

9. Mostre que se as equações lineares $x_1 + kx_2 = c$ e $x_1 + lx_2 = d$ têm o mesmo conjunto-solução, então as equações são idênticas.

Discussão e Descoberta

10. Para quais valores da constante k o sistema

$$\begin{aligned} x - \;\; y &= 3 \\ 2x - 2y &= k \end{aligned}$$

não tem solução? Exatamente uma solução? Infinitas soluções? Explique seu raciocínio.

11. Considere o sistema de equações

$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ cx + dy &= l \\ ex + fy &= m \end{aligned}$$

O que você pode dizer sobre a posição relativa das retas $ax + by = k$, $cx + dy = l$ e $ex + fy = m$, quando

(a) o sistema não tem solução;
(b) o sistema tem exatamente uma solução;
(c) o sistema tem infinitas soluções?

12. Se o sistema do Exercício 11 for consistente, explique por que pelo menos uma das equações poderá ser descartada do sistema sem alterar o conjunto-solução.

13. Se $k = l = m$ no Exercício 11, explique por que o sistema deve ser consistente. O que pode ser dito sobre o ponto de corte das três retas se o sistema tem exatamente uma solução?

1.2 ELIMINAÇÃO GAUSSIANA

Nesta seção nós vamos desenvolver um procedimento sistemático para resolver sistemas de equações lineares. O procedimento é baseado na idéia de reduzir a matriz aumentada de um sistema a uma outra matriz aumentada que seja suficientemente simples a ponto de permitir visualizar a solução.

Forma Escalonada No Exemplo 3 da última seção nós resolvemos um sistema linear nas incógnitas x, y e z reduzindo a matriz aumentada à forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a partir da qual a solução $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ ficou evidente. Isto é um exemplo de uma matriz que está em ***forma escalonada reduzida por linhas***. Para ser desta forma, uma matriz deve ter as seguintes propriedades:

1. Se uma linha não consistir só de zeros, então o primeiro número não-nulo da linha é um 1. Chamamos este número 1 de ***líder*** ou ***pivô***.
2. Se existirem linhas constituídas somente de zeros, elas estão agrupadas juntas nas linhas inferiores da matriz.
3. Em quaisquer duas linhas sucessivas que não consistem só de zeros, o líder da linha inferior ocorre mais à direita que o líder da linha superior.
4. Cada coluna que contém um líder tem zeros nas demais entradas.

Dizemos que uma matriz que tem as três primeiras propriedades está em ***forma escalonada por linhas***, ou simplesmente, em ***forma escalonada***. (Assim, uma matriz em forma escalonada reduzida por linhas necessariamente está em forma escalonada, mas não reciprocamente.)

3. Em cada parte, determine se a matriz está em forma escalonada, escalonada reduzida por linhas, ambas ou nenhuma das duas.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares foi reduzida por operações sobre linhas à forma escalonada reduzida por linhas dada. Resolva o sistema.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares foi reduzida por operações sobre linhas à forma escalonada dada. Resolva o sistema.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Resolva cada um dos seguintes sistemas por eliminação de Gauss-Jordan.

(a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x \qquad\quad - 3w &= -3 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} -2b + 3c &= 1 \\ 3a + 6b - 3c &= -2 \\ 6a + 6b + 3c &= 5 \end{aligned}$

7. Resolva cada um dos sistemas do Exercício 6 por eliminação gaussiana.

8. Resolva cada um dos seguintes sistemas por eliminação de Gauss-Jordan.

(a) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 30 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 &= 12 \\ 3x_1 - 6x_2 &= 9 \\ -2x_1 + 4x_2 &= -6 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} 10y - 4z + w &= 1 \\ x + 4y - z + w &= 2 \\ 3x + 2y + z + 2w &= 5 \\ -2x - 8y + 2z - 2w &= -4 \\ x - 6y + 3z \qquad &= 1 \end{aligned}$

9. Resolva cada um dos sistemas do Exercício 8 por eliminação gaussiana.

10. Resolva cada um dos seguintes sistemas por eliminação de Gauss-Jordan.

(a) $\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 &= 5 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} w + 2x - y &= 4 \\ x - y &= 3 \\ w + 3x - 2y &= 7 \\ 2u + 4v + w + 7x \qquad &= 7 \end{aligned}$

EXEMPLO 11 Traço de uma Matriz

A seguir, exemplos de matrizes e seus traços.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} \qquad \operatorname{tr}(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11$$ ♦

Conjunto de Exercícios 1.3

1. Suponha que A, B, C, D e E sejam matrizes dos seguintes tamanhos:

A	B	C	D	E
(4×5)	(4×5)	(5×2)	(4×2)	(5×4)

Determine quais das seguintes expressões matriciais estão definidas. Para as que estão definidas, dê o tamanho da matriz resultante.

(a) BA (b) $AC + D$ (c) $AE + B$ (d) $AB + B$
(e) $E(A + B)$ (f) $E(AC)$ (g) E^TA (h) $(A^T + E)D$

2. Resolva a seguinte equação matricial em termos de a, b, c e d.

$$\begin{bmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcule os seguintes (quando possível).

(a) $D + E$ (b) $D - E$ (c) $5A$ (d) $-7C$
(e) $2B - C$ (f) $4E - 2D$ (g) $-3(D + 2E)$ (h) $A - A$
(i) $\operatorname{tr}(D)$ (j) $\operatorname{tr}(D - 3E)$ (k) $4\operatorname{tr}(7B)$ (l) $\operatorname{tr}(A)$

4. Usando as matrizes do Exercício 3, calcule os seguintes (quando possível).

(a) $2A^T + C$ (b) $D^T - E^T$ (c) $(D - E)^T$ (d) $B^T + 5C^T$
(e) $\frac{1}{2}C^T - \frac{1}{4}A$ (f) $B - B^T$ (g) $2E^T - 3D^T$ (h) $(2E^T - 3D^T)^T$

5. Usando as matrizes do Exercício 3, calcule os seguintes (quando possível).

(a) AB (b) BA (c) $(3E)D$
(e) $A(BC)$ (f) CC^T (g) $(DA)^T$
(i) $\operatorname{tr}(DD^T)$ (j) $\operatorname{tr}(4E^T - D)$ (k) $\operatorname{tr}(C^TA^T + 2E^T)$

6. Usando as matrizes do Exercício 3, calcule os seguintes (quando possível).

(a) $(2D^T - E)A$ (b) $(4B)C + 2B$ (c) $(-AC)^T + 5D^T$
(d) $(BA^T - 2C)^T$ (e) $B^T(CC^T - A^TA)$ (f) $D^TE^T - (ED)^T$

7. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Use o método do Exemplo 7 para encontrar

(a) a primeira linha de AB (b) a terceira linha de AB (c) a segunda coluna de AB
(d) a primeira coluna de BA (e) a terceira linha de AA (f) a terceira coluna de AA

8. Sejam A e B as matrizes do Exercício 7.

(a) Expresse cada matriz-coluna de AB como uma combinação linear das matrizes-coluna de A.

(b) Expresse cada matriz-coluna de BA como uma combinação linear das matrizes-coluna de B.

9. Sejam

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m] \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Mostre que o produto $\mathbf{y}A$ pode ser expressso como uma combinação linear das matrizes-linha de A com coeficientes escalares vindo de $\mathbf{y}$.

10. Sejam A e B as matrizes do Exercício 7.

(a) Use o resultado do Exercício 9 para expressar cada matriz-linha de $A\,B$ como uma combinação linear das matrizes-linha de B.

(b) Use o resultado do Exercício 9 para expressar cada matriz-linha de $B\,A$ como uma combinação linear das matrizes-linha de A.

11. Sejam C, D e E as matrizes do Exercício 3. Usando o mínimo possível de contas, determine a entrada na linha 2 e coluna 3 de $C\,(D\,E)$.

12. (a) Mostre que se $A\,B$ e $B\,A$ estão ambas definidas, então $A\,B$ e $B\,A$ são matrizes quadradas.

(b) Mostre que se A é uma matriz $m \times n$ e $A\,(B\,A)$ está definida, então B é uma matriz $n \times m$.

13. Em cada parte, encontre matrizes A, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ que expressem o sistema de equações lineares dado como uma única equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 9x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 4x_1 \phantom{{}+5x_2} - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 \phantom{{}+9x_3} - 8x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 + 7x_4 &= 2 \end{aligned}$$

14. Em cada parte, expresse a equação matricial como um sistema de equações lineares.

(a) $$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(b) $$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

15. Se A e B são particionadas em submatrizes, por exemplo,

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \quad \text{e} \quad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

então $A\,B$ pode ser expresso como

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right]$$

sempre que os tamanhos das submatrizes de A e B são tais que as operações indicadas podem ser efetuadas. Este método de multiplicar matrizes particionadas é chamado ***multiplicação em bloco***. Em cada parte, calcule o produto usando multiplicação em bloco. Confira seus resultados multiplicando diretamente.

(a) $$A = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ \hline 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

(b) $$A = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 5 \\ \hline 0 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \\ \hline 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

16. Adapte o método do Exercício 15 para calcular os seguintes produtos usando multiplicação em bloco.

(a) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ \hline 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

(b) $$\left[\begin{array}{cc} 2 & -5 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ \hline 1 & 4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right]$$

(c) $\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ -1 & 4 \\ 1 & 5 \\ \hline 2 & -2 \\ 1 & 6 \end{array}\right]$

17. Em cada parte, determine se pode ser usada multiplicação em bloco para calcular $A\,B$ a partir das partições dadas. Se puder, calcule o produto usando multiplicação em bloco.

(a) $A = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ \hline 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$

(b) $A = \left[\begin{array}{cccc} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$

18. (a) Mostre que se A tem uma linha de zeros e B é uma matriz qualquer para a qual o produto $A\,B$ está definido, então $A\,B$ também tem uma linha de zeros.

(b) Encontre um resultado similar valendo para uma coluna de zeros.

19. Seja A uma matriz $m \times n$ qualquer e seja 0 a matriz $m \times n$ com todas as entradas nulas. Mostre que se $k\,A = 0$, então $k = 0$ ou $A = 0$.

20. Seja I a matriz $n \times n$ cuja entrada na linha i e coluna j é

$$\begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

Mostre que $A\,I = I\,A = A$ para qualquer matriz $n \times n$ A.

21. Em cada parte, encontre uma matriz $[\,a_{ij}\,]$ de tamanho 6×6 que satisfaz a condição dada. Dê respostas tão gerais quanto possível, usando letras e não números para entradas não-nulas específicas.

(a) $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ (b) $a_{ij} = 0$ se $i > j$ (c) $a_{ij} = 0$ se $i < j$ (d) $a_{ij} = 0$ se $|\,i - j\,| > 1$

22. Encontre a matriz $[a_{ij}]$ de tamanho 4×4 cujas entradas satisfazem a condição dada.

(a) $a_{ij} = i + j$ (b) $a_{ij} = i^{j-1}$ (c) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } |i - j| > 1 \\ -1 & \text{se } |i - j| \leq 1 \end{cases}$

23. Prove: Se A e B são matrizes $n \times n$, então $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.

Discussão e Descoberta

24. Descreva três métodos distintos para calcular um produto de matrizes e ilustre os métodos calculando algum produto $A\,B$ destas três maneiras.

25. Quantas matrizes A de tamanho 3×3 você consegue encontrar tais que

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \\ 0 \end{bmatrix}$$

para todas as escolhas de x, y e z?

26. Quantas matrizes A de tamanho 3×3 você consegue encontrar tais que

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para todas as escolhas de x, y e z?

27. Dizemos que uma matriz B é uma ***raiz quadrada*** de uma matriz A se $B\,B = A$.

(a) Encontre duas raízes quadradas de $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Quantas raízes quadradas distintas você consegue encontrar de $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$?

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -11 \\ -2 & 4 & -8 \\ -11 & -8 & 41 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -17 \\ -17 & 34 \end{bmatrix}$$

Observe que A^TA e AA^T são simétricas, como se esperava. ♦

Adiante neste texto, nós obteremos condições gerais sobre A sob as quais AA^T e A^TA são invertíveis. Contudo, no caso especial em que A é *quadrada*, nós temos o seguinte resultado.

Teorema 1.7.4

Se A é uma matriz invertível, então AA^T e A^TA são também invertíveis.

Prova. Como A é invertível, também A^T é invertível, pelo Teorema 1.4.10. Assim, AA^T e A^TA são invertíveis, pois são produtos de matrizes invertíveis. ■

Conjunto de Exercícios 1.7

1. Determine se a matriz dada é invertível; se for, encontre a inversa por inspeção.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

2. Calcule, por inspeção, o produto das matrizes dadas.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. Encontre A^2, A^{-2} e A^{-k} por inspeção.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

4. Quais das seguintes matrizes são simétricas?

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. Determine, por inspeção, se a dada matriz triangular é invertível.

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

6. Encontre todos os valores de a, b e c para os quais A é simétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 3 & 5 & a+c \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

7. Encontre todos os valores de a e b para os quais A e B são ambas não-invertíveis.

$$A = \begin{bmatrix} a+b-1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2a-3b-7 \end{bmatrix}$$

8. Use a equação dada para determinar, por inspeção, se as matrizes do lado esquerdo comutam.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

9. Mostre que A e B comutam se $a - d = 7b$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

10. Encontre uma matriz diagonal A tal que

(a) $A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $A^{-2} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. (a) Fatore A na forma $A = B\,D$, onde D é uma matriz diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} 3a_{11} & 5a_{12} & 7a_{13} \\ 3a_{21} & 5a_{22} & 7a_{23} \\ 3a_{31} & 5a_{32} & 7a_{33} \end{bmatrix}$$

(b) A fatoração encontrada é a única possível? Explique.

12. Verifique o Teorema 1.7.1*b* para o produto $A\,B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

13. Verifique o Teorema 1.7.1*d* para as matrizes do Exercício 12.

14. Verifique o Teorema 1.7.3 para a matriz A dada.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

15. Seja A uma matriz simétrica.
(a) Mostre que A^2 é simétrica. (b) Mostre que $2A^2 - 3A + I$ é simétrica.

16. Seja A uma matriz simétrica.
(a) Mostre que A^k é simétrica se k é qualquer inteiro não-negativo.
(b) Se $p(x)$ é um polinômio, é $p(A)$ necessariamente simétrica? Explique.

17. Sejam A uma matriz triangular superior e $p(x)$ um polinômio. É $p(A)$ necessariamente triangular superior? Explique.

18. Prove: Se $A^TA = A$ então A é simétrica e $A = A^2$.

19. Encontre todas as matrizes diagonais 3×3 que satisfazem $A^2 - 3A - 4I = 0$.

20. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$. Determine se A é simétrica.
(a) $a_{ij} = i^2 + j^2$ (b) $a_{ij} = i^2 - j^2$ (c) $a_{ij} = 2i + 2j$ (d) $a_{ij} = 2i^2 + 2j^3$

21. Usando sua experiência com o Exercício 20, projete um teste geral que pode ser aplicado a uma fórmula para a_{ij} para determinar se $A = [a_{ij}]$ é simétrica.

22. Uma matriz quadrada A é chamada ***anti-simétrica*** se $A^T = -A$. Prove:
(a) Se A é uma matriz anti-simétrica invertível, então A^{-1} é anti-simétrica.
(b) Se A e B são anti-simétricas, então também o são A^T, $A + B$, $A - B$ e kA, para qualquer escalar k.
(c) Toda matriz quadrada A pode ser expressa como a soma de uma matriz simétrica e uma matriz anti-simétrica. [***Sugestão.*** Observe a identidade $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.]

23. Nós mostramos no texto que o produto de matrizes simétricas é uma matriz simétrica se, e somente se, as matrizes comutam. É o produto de matrizes anti-simétricas que comutam uma matriz anti-simétrica? Explique. [***Observação.*** Veja o Exercício 22 para a terminologia.]

24. Se a matriz A de tamanho $n \times n$ pode ser expressa como $A = LU$, onde L é uma matriz triangular inferior e U é uma matriz triangular superior, então o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser expresso como $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e portanto pode ser resolvido em dois passos:
Passo 1. Seja $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, de modo que $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser escrito como $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Resolva este sistema.
Passo 2. Resolva o sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ em $\mathbf{x}$.
Em cada parte, use este método de dois passos para resolver o sistema dado.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

Respostas dos Exercícios

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 1.1 [página 30]

1. (a), (c), (f) **2.** (a), (b), (c)

3. **(a)** $x = \frac{3}{7} + \frac{5}{7}t$, $y = t$ **(b)** $x_1 = \frac{5}{3}s - \frac{4}{3}t + \frac{7}{3}$, $x_2 = s$, $x_3 = t$ $x_1 = \frac{1}{4}r - \frac{5}{8}s + \frac{3}{4}t - \frac{1}{8}$, $x_2 = r$, $x_3 = s$, $x_4 = t$ $v = \frac{8}{3}q - \frac{2}{3}r + \frac{1}{3}s - \frac{4}{3}t$, $w = q$, $x = r$, $y = s$, $z = t$

4. **(a)** $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

5. **(a)** $\begin{aligned} 2x_1 \qquad &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 &= 0 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$ **(b)** $\begin{aligned} 3x_1 \qquad - 2x_3 &= 5 \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 &= -3 \\ -2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$ **(c)** $\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \qquad &= 1 \end{aligned}$ **(d)** $\begin{aligned} x_1 &= 7 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= 3 \\ x_4 &= 4 \end{aligned}$

6. **(a)** $x - 2y = 5$ **(b)** Tome $x = t$; então $t - 2y = 5$. Resolvendo em y dá $y = \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}$.

10. $k = 6$: infinitas soluções
$k \neq 6$: nenhuma solução
Nenhum valor de k dá solução única

11. **(a)** As retas não têm ponto de interseção.
(b) As retas cortam-se em exatamente um ponto.
(c) As três retas coincidem.

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 1.2 [página 37]

1. (a), (b), (c), (d), (h), (i), (j) **2.** (a), (b), (d), (e)

3. **(a)** Ambas **(b)** Nenhuma **(c)** Ambas
(d) Escalonada por linhas **(e)** Nenhuma **(f)** Ambas

4. **(a)** $x_1 = -3, x_2 = 0, x_3 = 7$
(b) $x_1 = 7t + 8, x_2 = -3t + 2, x_3 = -t - 5, x_4 = t$
(c) $x_1 = 6s - 3t - 2, x_2 = s, x_3 = -4t + 7, x_4 = -5t + 8, x_5 = t$
(d) Inconsistente

5. **(a)** $x_1 = -37, x_2 = -8, x_3 = 5$
(b) $x_1 = 13t - 10, x_2 = 13t - 5, x_3 = -t + 2, x_4 = t$
(c) $x_1 = -7s + 2t - 11, x_2 = s, x_3 = -3t - 4, x_4 = -3t + 9, x_5 = t$
(d) Inconsistente

6. **(a)** $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2$
(b) $x_1 = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}t, x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}t, x_3 = t$
(c) $x = t - 1, y = 2s, z = s, w = t$
(d) Inconsistente

8. **(a)** Inconsistente
(b) $x_1 = -4, x_2 = 2, x_3 = 7$
(c) $x_1 = 3 + 2t, x_2 = t$
(d) $x = \frac{8}{5} - \frac{3}{5}t - \frac{3}{5}s, y = \frac{1}{10} + \frac{2}{5}t - \frac{1}{10}s, z = t, w = s$

10. **(a)** $x_1 = 2 - 12t, x_2 = 5 - 27t, x_3 = t$
(b) Inconsistente
(c) $u = -2s - 3t - 6, v = s, w = -t - 2, x = t + 3, y = t$

12. (a), (c), (d)

13. **(a)** $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$
(b) $x_1 = -s, x_2 = -t - s, x_3 = 4s, x_4 = t$
(c) $w = t, x = -t, y = t, z = 0$

14. **(a)** Somente a solução trivial
(b) $u = 7s - 5t, v = -6s + 4t, w = 2s, x = 2t$
(c) Somente a solução trivial

15. **(a)** $I_1 = -1, I_2 = 0, I_3 = 1, I_4 = 2,$
(b) $Z_1 = -s - t, Z_2 = s, Z_3 = -t, Z_4 = 0, Z_5 = t$

16. **(a)** $x = \frac{2}{3}a - \frac{1}{9}b, y = -\frac{1}{3}a + \frac{2}{9}b$ **(b)** $x_1 = a - \frac{1}{3}c, x_2 = a - \frac{1}{2}b, x_3 = -a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c$

17. $a = -4$, nenhuma; $a \neq \pm 4$, exatamente uma; $a = 4$, infinitas

19. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são respostas possíveis.

20. $\alpha = \pi/2, \beta = \pi, \gamma = 0$

22. $\lambda = 4, \lambda = 2$

23. Se $\lambda = 1$, então $x_1 = x_2 = s, x_3 = 0$
Se $\lambda = 2$, então $x_1 = -\frac{1}{2}s, x_2 = 0, x_3 = s$

24. $x = -13/7, y = 91/54, z = -91/8$

25. $a = 1,\ b = -6,\ c = 2,\ d = 10$

26. $a = 1, b = -2, c = -4, d = -29$

30. **(a)** Pelo menos duas das três retas são distintas. **(b)** As três retas são idênticas.

31. **(a)** Falsa **(b)** Verdadeira **(c)** Falsa **(d)** Falsa

32. **(a)** Falsa **(b)** Falsa **(c)** Falsa **(d)** Falsa

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 1.3 [página 46]

1. **(a)** Não-definida **(b)** 4×2 **(c)** Não-definida **(d)** Não-definida
(e) 5×5 **(f)** 5×2 **(g)** Não-definida **(h)** 5×2

2. $a = 5,\ b = -3,\ c = 4,\ d = 1$

3. **(a)** $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ -5 & 10 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} -7 & -28 & -14 \\ -21 & -7 & -35 \end{bmatrix}$ **(e)** Não-definida

(f) $\begin{bmatrix} 22 & -6 & 8 \\ -2 & 4 & 6 \\ 10 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **(g)** $\begin{bmatrix} -39 & -21 & -24 \\ 9 & -6 & -15 \\ -33 & -12 & -30 \end{bmatrix}$ **(h)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(i)** 5 **(j)** -25 **(k)** 168 **(l)** Não-definida

4. **(a)** $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **(d)** Não-definida

(e) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \end{bmatrix}$ **(f)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(g)** $\begin{bmatrix} 9 & 1 & -1 \\ -13 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$ **(h)** $\begin{bmatrix} 9 & -13 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

5. **(a)** $\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** Não-definida **c)** $\begin{bmatrix} 42 & 108 & 75 \\ 12 & -3 & 21 \\ 36 & 78 & 63 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{bmatrix}$ **(e)** $\begin{bmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 21 & 17 \\ 17 & 35 \end{bmatrix}$ **(g)** $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 11 \\ 12 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ **(h)** $\begin{bmatrix} 12 & 6 & 9 \\ 48 & -20 & 14 \\ 24 & 8 & 16 \end{bmatrix}$ **(i)** 61 **(j)** 35 **(k)** (28)

6. **(a)** $\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 36 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ **(b)** Não definida **(c)** $\begin{bmatrix} 2 & -10 & 11 \\ 13 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 13 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -14 & 2 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$ **(e)** $\begin{bmatrix} 40 & 72 \\ 26 & 42 \end{bmatrix}$ **(f)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. **(a)** $[67 \;\; 41 \;\; 41]$ **(b)** $[63 \;\; 67 \;\; 57]$ **(c)** $\begin{bmatrix} 41 \\ 21 \\ 67 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 63 \end{bmatrix}$ **(e)** $[24 \;\; 56 \;\; 97]$ **(f)** $\begin{bmatrix} 76 \\ 98 \\ 97 \end{bmatrix}$

8. **(a)** $\begin{bmatrix} 67 \\ 64 \\ 63 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 41 \\ 21 \\ 67 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 41 \\ 59 \\ 57 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 63 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -6 \\ 17 \\ 41 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 70 \\ 31 \\ 122 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

10. **(a)** $[67 \;\; 41 \;\; 41] = 3[6 \;\; -2 \;\; 4] - 2[0 \;\; 1 \;\; 3] + 7[7 \;\; 7 \;\; 5]$
$[64 \;\; 21 \;\; 59] = 6[6 \;\; -2 \;\; 4] + 5[0 \;\; 1 \;\; 3] + 4[7 \;\; 7 \;\; 5]$
$[63 \;\; 67 \;\; 57] = 0[6 \;\; -2 \;\; 4] + 4[0 \;\; 1 \;\; 3] + 9[7 \;\; 7 \;\; 5]$

(b) $[6 \;\; -6 \;\; 70] = 6[3 \;\; -2 \;\; 7] - 2[6 \;\; 5 \;\; 4] + 4[0 \;\; 4 \;\; 9]$
$[6 \;\; 17 \;\; 31] = 0[3 \;\; -2 \;\; 7] + 1[6 \;\; 5 \;\; 4] + 3[0 \;\; 4 \;\; 9]$
$[63 \;\; 41 \;\; 122] = 7[3 \;\; -2 \;\; 7] + 7[6 \;\; 5 \;\; 4] + 5[0 \;\; 4 \;\; 9]$

11. 182

13. **(a)** $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 9 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & -8 \\ 2 & -5 & 9 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

14. **(a)**
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= -1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3w - 2x \qquad + z &= 0 \\ 5w \qquad + 2y - 2z &= 0 \\ 3w + x + 4y + 7z &= 0 \\ -2w + 5x + y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

15. $\begin{bmatrix} -1 & 23 & -10 \\ 37 & -13 & 8 \\ 29 & 23 & 41 \end{bmatrix}$ (ambas partes **(a)** e **(b)**) **16.** **(a)** $\begin{bmatrix} -3 & -15 & -11 \\ 21 & -15 & 44 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 4 & -7 & -19 & -43 \\ 2 & 2 & 18 & 17 \\ 0 & 5 & 25 & 35 \\ 2 & 3 & 23 & 24 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 4 & -4 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$

17. **(a)** A_{11} é uma matriz 2×3 e B_{11} é uma matriz 2×2. $A_{11} B_{11}$ não existe. **(b)** $\begin{bmatrix} -1 & 23 & -10 \\ 37 & -13 & 8 \\ 29 & 23 & 41 \end{bmatrix}$

22. **(a)** Somente a solução trivial $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$; invertível.
(b) Infinitas soluções; não invertível.

27. **(a)** $I - A$ é invertível. **(b)** $\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{b}$ **28.** Não. Tente $A = I$. **29.** Sim, para matrizes não-quadradas.

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 1.7 [página 69]

1. **(a)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ **(b)** Não invertível **(c)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

2. **(a)** $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} -24 & -10 & 12 \\ 3 & -10 & 0 \\ 60 & 20 & -16 \end{bmatrix}$

3. **(a)** $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^{-2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad A^{-k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(-2)^k \end{bmatrix}$

(b) $A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix}, \quad A^{-2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}, \quad A^{-k} = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{bmatrix}$

4. (b), (c) **5.** (a) **6.** $a = 11, b = -9, c = -13$ **7.** $a = 2, b = -1$

8. **(a)** Não comutam **(b)** Comutam **10.** **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} \pm\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$

11. **(a)** $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ **(b)** Não **16.** **(b)** Sim **17.** Sim

19. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

20. **(a)** Sim **(b)** Não (exceto se $n = 1$) **(c)** Sim **(d)** Não (exceto se $n = 1$) **23.** Não

24. **(a)** $x_1 = \frac{7}{4}, x_2 = 1, x_3 = -\frac{1}{2}$ **(b)** $x_1 = -8, x_2 = -4, x_3 = 3$

25. $A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ **26.** $\frac{n}{2}(1 + n)$ **27.** Multiplique entradas diagonais correspondentes

28. A é diagonal **30.** **(a)** Verdadeira **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Falsa

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES [página 71]

1. $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$ **2.** $x' = x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta, y' = -x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta$

3. Uma resposta possível é

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

4. Três moedas de 1 centavo, quatro de 5 e seis de 10.

5. $x = 4, y = 2, z = 3$ **6.** Infinitas se $a = 2$ ou $a = -\frac{3}{2}$; caso contrário, nenhuma.