

Gabarito - Lista 4

1) $A = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$.

2) $A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$. $A^{-2} = \begin{bmatrix} 11/2 & -5/2 \\ -15/4 & 7/4 \end{bmatrix}$

3) $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

4) Encontre a inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Resolução.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ para } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ para } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{para } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ para } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ para } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

5) Calcule o valor de k para que a matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ não tenha inversa.

Solução.

A condição para que A não tenha inversa é que seu determinante seja igual à zero.

Ou seja, $5k - 8 = 0 \Rightarrow k = \frac{8}{5}$.

6) Solução. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

7) Solução. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

8) Quando os elementos da diagonal principal são todos não nulos e sua inversa é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_n^{-1} \end{bmatrix}.$$

$$9) D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}, D^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}, D^{-2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/16 \end{bmatrix}$$

10) Ver demonstração do Teorema 1.6.4 do Anton.

11) a) quando escalonamos a matriz aumentada obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix}$$

Ou seja, o sistema tem solução (é consistente), se e somente se, $b_3 - b_2 - b_1 = 0$, isto é, $b_3 = b_2 + b_1$.

b) quando escalonamos a matriz aumentada obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40b_1 + 16b_2 + 9b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 13b_1 - 5b_2 - 3b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 5b_1 - 2b_2 - b_3 \end{bmatrix}$$

Neste caso não há restrições sobre b_1, b_2, b_3 , ou seja o sistema $Ax=b$ tem uma única solução para qualquer b

$$x_1 = -40b_1 + 16b_2 + 9b_3, x_2 = 13b_1 - 5b_2 - 3b_3, x_3 = 5b_1 - 2b_2 - b_3.$$

Observe que a partir da matriz acima é possível identificar A^{-1} .

• **Álgebra Linear com Aplicações, H. Anton e C. Rorres, Bookman, 2001.**

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 1.6 [página 64]

1. $x_1 = 3, x_2 = -1$ 2. $x_1 = -3, x_2 = -3$ 3. $x_1 = -1, x_2 = 4, x_3 = -7$

4. $x_1 = 1, x_2 = -11, x_3 = 16$ 5. $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = -1$

6. $w = -6, x = 1, y = 10, z = -7$ 7. $x_1 = 2b_1 - 5b_2, x_2 = -b_1 + 3b_2$

8. $x_1 = -\frac{15}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{5}{2}b_3, x_2 = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_3, x_3 = \frac{5}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_3$

9. (a) $x_1 = \frac{16}{3}, x_2 = -\frac{4}{3}, x_3 = -\frac{11}{3}$ (b) $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = \frac{5}{3}, x_3 = \frac{10}{3}$

(c) $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -4$

11. (a) $x_1 = \frac{22}{17}, x_2 = \frac{1}{17}$ (b) $x_1 = \frac{21}{17}, x_2 = \frac{11}{17}$

12. (a) $x_1 = -18, x_2 = -1, x_3 = -14$ (b) $x_1 = -\frac{421}{2}, x_2 = -\frac{25}{2}, x_3 = -\frac{327}{2}$

13. (a) $x_1 = \frac{7}{15}, x_2 = \frac{4}{15}$ (b) $x_1 = \frac{34}{15}, x_2 = \frac{28}{15}$ (c) $x_1 = \frac{19}{15}, x_2 = \frac{13}{15}$ (d) $x_1 = -\frac{1}{5}, x_2 = \frac{3}{5}$

14. (a) $x_1 = 18, x_2 = -9, x_3 = 2$ (b) $x_1 = -23, x_2 = 11, x_3 = -2$

(c) $x_1 = 5, x_2 = -2, x_3 = 0$

15. (a) $x_1 = -12 - 3t, x_2 = -5 - t, x_3 = t$ (b) $x_1 = 7 - 3t, x_2 = 3 - t, x_3 = t$

16. $b_1 = 2b_2$ 17. $b_1 = b_2 + b_3$ 18. Nenhuma restrição 19. $b_1 = b_3 + b_4, b_2 = 2b_3 + b_4$

21. $X = \begin{bmatrix} 11 & 12 & -3 & 27 & 26 \\ -6 & -8 & 1 & -18 & -17 \\ -15 & -21 & 9 & -38 & -35 \end{bmatrix}$

22. (a) Somente a solução trivial $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$; invertível.

(b) Infinitas soluções; não invertível.