

Gabarito da Lista 5– Determinantes

1. Solução. a) 270; b) 8/10; c) 1/80; d) -10

$$\begin{aligned}
 2. \text{ Solução. } & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1}{=} 2x \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} 2x \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1}{=} \\
 & 2x \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{27}{2} \end{vmatrix} \stackrel{L_2 \leftarrow \frac{2}{5}L_2}{=} 2x \frac{5}{2}x \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{6}{10} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{27}{2} \end{vmatrix} \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2}{=} 2x \frac{5}{2}x \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{6}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{132}{10} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

O termo principal é $1x1x\left(-\frac{132}{10}\right) = -\frac{132}{10}$. Logo,

$$\det A = 2x \frac{5}{2}x \left(-\frac{132}{10}\right) = \frac{10}{2}x \left(-\frac{132}{10}\right) = -\frac{132}{2} = -66.$$

3. Solução. $\sqrt{x} = 2$.

4. Solução. $f(\det A) = -(\det A)^2 + 3(\det A) + 2 = -8$.

$$\begin{aligned}
 5. \text{ Solução. a) } & \begin{vmatrix} 4 & 6 & x \\ 5 & 2 & -x \\ 7 & 4 & 2x \end{vmatrix} = 4(4x + 4x) - 6(10x + 7x) + x(20 - 14) = 32x - 102x + 6x = -64x \\
 & -64x = -128 \Rightarrow x = 2.
 \end{aligned}$$

$$(b) \begin{vmatrix} x+3 & x+1 & x+4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 9 & 10 & 7 \end{vmatrix} = -7$$

$$\begin{vmatrix} x+3 & x+1 & x+4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 9 & 10 & 7 \end{vmatrix} = (x+3)(35-30) - (x+1)(28-27) + (x+4)(40-45) =$$

Solução. $5x + 15 - x - 1 - 5x - 20 = -x - 6$

$$-x - 6 = -7 \Rightarrow x = 1.$$

$$6. \text{ Solução. } A - 2A + I^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

7. Solução. $\det B = \det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \cdot \det A \cdot \det P = \det(P^{-1} \cdot P) \cdot \det A = \det I \cdot \det A = \det A$.

$$8. \text{ Solução. } A^4 = \begin{bmatrix} x^4 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A^4 = 64x^4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

9. Solução. Falso. Contra-exemplo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Solução. $AA^t = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}$ e seu determinante é igual a 56.

11. Solução. $x = 67/9$.

12 Solução. $\det A = 1(45-48) -2(36-42) +3(32-35) = 0$.

13 a) Temos que $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é autovetor e o autovalor correspondente é $\lambda = 3$.

13 b) Temos que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é autovetor e o autovalor correspondente é $\lambda = 4$.

14 a) $\lambda = 2$ é um autovalor e os autovetores correspondente são da forma $(x, 0)$.

14 b). Os autovalores de A são 4 e 3.

Para o autovalor 4 os autovetores são da forma (x, x) e para o autovalor 3 a base do autoespaço é $(3x, 2x)$.

15 a) Os autovalores são 1, -2 e 3. Para o autovalor 1 os autovetores são da forma $(x, 0, 0)$, para o autovalor -2 da forma $(x, -3x, 0)$ e para o autovalor 3 da forma é $(x, 2x, 10x)$.

15 b) Os autovalores são 2, 3 e 6. Para o autovalor 2 os autovetores são da forma $(-x, 0, x)$, para o autovalor -2 da forma (x, x, x) e para o autovalor 3 da forma é $(x, -2x, x)$.

- Álgebra Linear com Aplicações, H. Anton e C. Rorres, Bookman, 2001.

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 2.1 [página 81]

- (a) 5 (b) 9 (c) 6 (d) 10 (e) 0 (f) 2
- (a) Ímpar (b) Ímpar (c) Par (d) Par (e) Par (f) Par
- 22 4. 0 5. 52 6. $-3\sqrt{6}$ 7. $a^2 - 5a + 21$ 8. 0
- 65 10. -4 11. -123 12. $-c^4 + c^3 - 16c^2 + 8c - 2$
- (a) $\lambda = 1, \lambda = -3$ (b) $\lambda = -2, \lambda = 3, \lambda = 4$ 16. 275
- (a) = -120 (b) = -120 18. $x = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$ 22. É igual a 0 se $n > 1$.
- O determinante é igual ao produto das entradas da diagonal.
- O determinante é igual ao produto das entradas da diagonal.

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 2.2 [página 84]

- (a) -30 (b) -2 (c) 0 (d) 0 3. (a) -5 (b) -1 (c) 1
- 30 5. 5 6. -17 7. 33 8. 39 9. 6 10. $-\frac{1}{6}$
- 2 12. (a) -6 (b) 72 (c) -6 (d) 18
- (a) $\det(A) = -1$ (b) $\det(A) = 1$ 17. $x = 0, -1, \frac{1}{2}$ 18. $x = 1, -3$

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 2.3 [página 89]

- (a) $\det(2A) = -40 = 2^2 \det(A)$ (b) $\det(-2A) = -448 = (-2)^3 \det(A)$
- $\det AB = -170 = (\det A)(\det B)$
- (a) Invertível (b) Não-invertível (c) Não-invertível (d) Não-invertível
- (a) -189 (b) $-\frac{1}{7}$ (c) $-\frac{8}{7}$ (d) $-\frac{1}{56}$ (e) 7
- Se $x = 0$, a primeira e terceira linhas são proporcionais.
Se $x = 2$, a primeira e segunda linhas são proporcionais.
- (a) $k = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ (b) $k \neq -1$

14. (a) $\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -4 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ 5 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

15. (i) $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ (ii) $\lambda = -1, \lambda = 3$ (iii) $\begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$

(i) $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$ (ii) $\lambda = -1, \lambda = 6$ (iii) $\begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{4}t \\ t \end{bmatrix}$

(i) $\lambda^2 - 4 = 0$ (ii) $\lambda = -2, \lambda = 2$ (iii) $\begin{bmatrix} -\frac{t}{5} \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}$

20. Não

21. AB é singular.

22. (a) Falsa (b) Verdadeira (c) Falsa (d) Verdadeira

23. (a) Verdadeira (b) Verdadeira (c) Falsa (d) Verdadeira

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 2.4 [página 95]

1. (a) $M_{11} = 29, M_{12} = 21, M_{13} = 27, M_{21} = -11, M_{22} = 13, M_{23} = -5, M_{31} = -19, M_{32} = -19, M_{33} = 19$
 (b) $C_{11} = 29, C_{12} = -21, C_{13} = 27, C_{21} = 11, C_{22} = 13, C_{23} = 5, C_{31} = -19, C_{32} = 19, C_{33} = 19$

2. (a) $M_{13} = 0, C_{13} = 0$ (b) $M_{23} = -96, C_{23} = 96$ 3. 152

(c) $M_{22} = -48, C_{22} = -48$ (d) $M_{21} = 72, C_{21} = -72$

4. (a) $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 29 & 11 & -19 \\ -21 & 13 & 19 \\ 27 & 5 & 19 \end{bmatrix}$ (b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{29}{152} & \frac{11}{152} & -\frac{19}{152} \\ -\frac{21}{152} & \frac{13}{152} & \frac{19}{152} \\ \frac{27}{152} & \frac{5}{152} & \frac{19}{152} \end{bmatrix}$

5. -40 6. -66 7. 0 8. $k^3 - 8k^2 - 10k + 95$ 9. -240 10. 0

11. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ 12. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 13. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

14. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ \frac{29}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ 15. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

16. $x_1 = 1, x_2 = 2$ 17. $x = \frac{3}{11}, y = \frac{2}{11}, z = -\frac{1}{11}$

18. $x = -\frac{144}{55}, y = -\frac{61}{55}, z = \frac{46}{11}$ 19. $x_1 = -\frac{30}{11}, x_2 = -\frac{38}{11}, x_3 = -\frac{40}{11}$

20. $x_1 = 5, x_2 = 8, x_3 = 3, x_4 = -1$

21. A regra de Cramer não é aplicável.

22. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 23. $y = 0$ 24. $x = 1, y = 0, z = 2, w = 0$

31. $\det(A) = 10 \times (-108) = -1080$

33. 12

34. Um

35. (a) Verdadeira (b) Falsa (c) Verdadeira (d) Falsa