UFF – Departamento de Análise
GAN00007 – Introdução à Álgebra Linear – B1 – 2014.1 – Profa. Ana Maria Luz

Lista de Exercícios 8 - Resolução

1. Expresse o vetor u = (-1, 4, -4, 6) $\in \Re^4$ como combinação linear dos vetores v_1 = (3, -3, 1, 0), v_2 = (0, 1, -1, 2) e v_3 = (1, -1, 0, 0).
   Solução.
   Temos que encontrar escalares α, β, γ tal que
(-1, 4, -4, 6) = α (3, -3, 1, 0) + β (0, 1, -1, 2) + γ (1, -1, 0, 0).
   O que equivale resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3\alpha + \gamma = -1 \\ -3\alpha + \beta - \gamma = 4 \\ \alpha - \beta = -4 \\ 2\beta = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 3 \\ \alpha = -1 \\ \gamma = 2 \end{cases}.$$

   Logo, u = - v_1 + 3v_2 + 2v_3.
2. Determine os subespaços do $\Re^3$ gerados pelos seguintes conjuntos:
   (a) A = {(2, -1, 3)}
   (b) A = {(-1, 3, 2), (2, -2, 1)}
   (c) A = {(1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 1, 0)}

   Solução.
   (a) Seja (a, b, c) um elemento do subespaço S gerado por A.
   Então, (a, b, c) = x(2, -1, 3)
   Daí,

$$\begin{cases} 2x = a \\ -x = b \\ 3x = c \end{cases}$$

   Logo, S= {(a, b, c)$\in \Re^3$/ a = -2b e c = -3b} = {(-2b, b, -3b)/ b$\in \Re$ }.
   (b) Seja (a, b, c) um elemento do subespaço S gerado por A.
   Então, (a, b, c) = x(-1, 3, 2) + y(2, -2, 1)
   Daí,

$$\begin{cases} -x + 2y = a \\ 3x - 2y = b \\ 2x + y = c \end{cases}.$$

   Escalonando,

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & a \\ 3 & -2 & b \\ 2 & 1 & c \end{bmatrix} L_1 \leftarrow -L_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -a \\ 3 & -2 & b \\ 2 & 1 & c \end{bmatrix} L_2 \leftarrow -3L_1 + L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -a \\ 0 & 4 & 3a+b \\ 2 & 1 & c \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow -2L_1 + L_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -a \\ 0 & 4 & 3a+b \\ 0 & 5 & 2a+c \end{bmatrix}.$$

Obtemos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} y = \frac{3a+b}{4} \\ y = \frac{2a+c}{5} \end{cases} \Rightarrow 7.a + 5b - 4c = 0.$$

Logo, S= {(a, b, c) ∈ $\Re^3$/ 7.a + 5b - 4c = 0}.

c) Seja (a, b, c) um elemento do subespaço S gerado por A.

(d) Então, (a, b, c) = x(1, 0, 1) +y(0, 1, 1) + z(-1, 1, 0)

Daí,

$$\begin{cases} x - z = a \\ y + z = b \\ x + y = c \end{cases}.$$

Escalonando,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \end{array}\right] L_3 \leftarrow -L_1 + L_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & -a+c \end{array}\right] L_3 \leftarrow -L_2 + L_3 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a-b+c \end{array}\right].$$

Logo, S= {(a, b, c) ∈ $\Re^3$/ a + b - c = 0}.

3. Determine o valor de *k* para que o conjunto {(1, 0, -1), (1, 1,0), (k, 1, -1)} seja LI.

Solução.

Considere a equação

x(1, 0, -1) + y(1, 1, 0) + z(k, 1, -1) = (0, 0, 0). Daí, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{cases} x + y + kz = 0 \\ y + z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases}$$ ou $(2-k)x = 0$. Para que os vetores sejam LI, x tem que ser zero, ou $k \neq 2$.

4. Determine uma base para cada um dos seguintes espaços vetoriais:

(a) $S = \{(x, y, z) \in \Re^3 / y = 2x\}$

(b) $S = \{(x, y) \in \Re^3 / x + y = 0\}$

(c) $S = \{(x, y, z) \in \Re^3 / 2x - y + 3z = 0\}$

(d) $S = \{(x, y, x); x, y \in \Re\}$

(e) $S = \{(x, y, z, w); x - 3y + z = 0\}$

(f) $S = \{(x, y, z) \in \Re^3 / x = 3y \text{ e } z = -y\}$

Solução

(a) Se (x, y, z) ∈ S ⇒ (x, y, z) = (x, 2x, z) = x(1, 2, 0) + z (0, 0, 1). Então, todo vetor de S é combinação linear dos vetores (1, 2, 0) e (0, 0, 1). Como estes vetores são LI, o conjunto {(1, 2, 0) e (0, 0, 1)} é uma base de S.

(b) Se (x, y) ∈ S ⇒ (x, y) = (x, -x) = x(1, -1). Então, todo vetor de S é combinação linear do vetor (1, -1). Como este vetor é LI, o conjunto {(1, -1)} é uma base de S.

(c) Se (x, y, z) $\in$ S $\Rightarrow$ (x, y, $\frac{y-2x}{3}$) = x(1, 0, -$\frac{2}{3}$) + y(0, 1, $\frac{1}{3}$). Então, todo vetor de S é combinação linear dos vetores (1, 0, -$\frac{2}{3}$) e (0, 1, $\frac{1}{3}$). Como estes vetores são LI, o conjunto {(1, 0, -$\frac{2}{3}$), (0, 1, $\frac{1}{3}$)} é uma base de S.

(d) Se (x, y, x) $\in$ H $\Rightarrow$ (x, y, x) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0). Então, todo vetor de H é combinação linear dos vetores (1, 0, 1) e (0, 1, 0) Como estes vetores são LI, o conjunto {(1, 0, 1), (0, 1, 0)} é uma base de H e dim H = 2.

(e) Se (x, y, z, w) $\in$ H $\Rightarrow$ (x, y, z, w) = (x, y, 3y –x, w) = x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 3, 0) + w(0, 0, 0, 1). Então, todo vetor de H é combinação linear dos vetores (1, 0, -1, 0), (0, 1, 3, 0) e (0, 0, 0, 1). Como estes vetores são LI, o conjunto {(1, 0, -1, 0), (0, 1, 3, 0) e (0, 0, 0, 1)} é uma base de H e dim H = 3.

(f) Se (x, y, z) $\in$ H $\Rightarrow$ (x, y, z) = (3y, y, -y) = y(3, 1, -1). Então, todo vetor de H é combinação linear do vetor (3, 1, -1). Como estes vetores são LI, o conjunto {(3, 1, -1)} é uma base de H e dim H = 1.

5. Encontre a dimensão e o espaço gerado por:

   (i) (1, -2, 3, -1) e (1, 1, -2, 3)

   (ii) 3 e -3

   (iii) t^3 -2t^2 + 5 e t^2 + 3t – 4

   Solução.

   Dois vetores não nulos geram um espaço de dimensão 2 se eles são independentes e de dimensão 1 se são dependentes. Lembre que dois vetores são dependentes se, e somente se, um é múltiplo do outro. Portanto,

   (a) 2

   (b) 1

   (c) 2

6. Seja o conjunto $A = \{w_1, w_2\}$, sendo $w_1 = (-1,3,-1)$ $w_2 = (1,-2,4)$. Determine:

   (a) O subespaço *S* gerado pelo conjunto *A*.

   (b) O valor de *k* para que o vetor $w = (5, k, 11)$ pertença à S.

Solução.

(a) Para todo vetor (x,y,z)$\in$ S, tem-se:

(x,y,z) = a(-1,3,-1) + b(1,-2,4). Daí,

$$\begin{cases} -a & + & b & = & x \\ 3a & - & 2b & = & y \\ -a & + & 4b & = & z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & x \\ 3 & -2 & y \\ -1 & 4 & z \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow -L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -x \\ 3 & -2 & y \\ -1 & 4 & z \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 3x+y \\ -1 & 4 & z \end{bmatrix}_{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -x \\ 0 & 1 & 3x+y \\ 0 & 3 & z-x \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2x+y \\ 0 & 1 & 3x+y \\ 0 & 3 & z-x \end{bmatrix}_{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2x+y \\ 0 & 1 & 3x+y \\ 0 & 0 & -10x-3y+z \end{bmatrix}$$

O vetor (x,y,z) $\in$ S se, e somente se, o sistema tem solução, e isto ocorre quando 10x+3y-z=0.

Logo, $S = \{(x, y, z) \in \Re^3; z = 10x + 3y\}$.

(b) $(5,k,11)\in S \Leftrightarrow 11 = 10.5 + 3.k \Leftrightarrow k = -13$.

7. Considere S = [(2,1,0), (1,-1,2), (0,3,-4)], o subespaço do $\Re^3$ gerado pelos vetores (2,1,0), (1,-1,2) e (0,3,-4). Determine sua equação.

Solução. Seja (a, b, c) um elemento de S.

Então, (a, b, c) = x(2, 1, 0) + y(1, -1, 2) + z(0, 3, -4) .

Daí,

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ x - y + 3z = b \\ 2y - 4z = c \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x + y = a \\ 3y - 6z = a - 2b \\ 0 = 2a - 4b - 3c \end{cases}.$$

Logo, W = {(a, b, c)/ 2a – 4b – 3c = 0} = {(a, b, $\frac{2a-4b}{3}$)/a,b $\in \Re$ }.

8. Para qual valor de k será o vetor u = (1, -2, k) em $\Re^3$ uma combinação linear dos vetores v = (3, 0, -2) e w = (2, -1, -5)?

Solução. Faça u = a(3, 0, -2) + b(2, -1, -5) = (3.a + 2b, -b, -2.a -5b)

Forme o sistema:

$$\begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ -b = -2 \\ -2a - 5b = k \end{cases}$$

Pelas duas primeiras equações, a = -1 e b = 2. Substitua na última equação para obter k = -8.

9. Determine m para que o conjunto {(2, -3, 2m), (1, 0, m + 4), (-1, 3, m – 2)} seja L.I.

Solução1.

Considere a equação

x(2, -3, 2m) + y(1, 0, m + 4) + z(-1, 3, m - 2) = (0, 0, 0). Daí, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -3x + 3z = 0 \\ 2mx + (m+4)y + (m-2)z = 0 \end{cases}$$

Pelas duas primeiras equações, z = x e y = -x.

Substitua na última equação: x[2m – (m+4) + m -2]= 0. Para que o conjunto seja L.I, 2m – (m+4) + m -2 =2m – 6 tem que ser diferente de zero, ou seja $m \neq 3$.

Solução 2.

Para que o conjunto dado seja L.I, o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2m & m+4 & m-2 \end{bmatrix}$$ tem que ser não nulo.

Mas o det A = 6m -18. Logo, m $\neq$ 3.