

Lista de Exercícios 9 - Transformações Lineares

1- Mostre que as funções abaixo são transformações lineares.

a) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2x + y, x + 3y)$

b) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y) = (x + y, x - y, x)$

c) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x + y - z, x + 2y)$

2 - Considere a função $\text{Tr}: M(n,n) \rightarrow \mathbb{R}$ (traço) definida por $\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$. Mostre que Tr é uma transformação linear.

3- Determine a transformação linear tal que $T(-1,1) = (3,2,1)$ e $T(0,1) = (1,1,0)$. Encontre v pertencente a \mathbb{R}^2 tal que $T(v) = (5,3,2)$.

4- Uma editora publica um livro de Álgebra Linear em três edições diferentes: brochura, especial e de luxo. Cada livro precisa de uma determinada quantidade de papel e tela (para a capa). As quantidades necessárias (em gramas) são dadas pela matriz

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Broch.} & \text{Espec.} & \text{Luxo} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{papel} \\ \text{tela} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 300 & 500 & 800 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Seja $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ o vetor produção, onde x_1 é o número de livros brochuras, x_2 é o número de livros especiais e x_3 é o número de livros de luxo.

a) Encontre a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x) = Ax$ que descreve o quanto de papel e tela foram gastos para produzir o livro.

b) O vetor $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \text{Im}(T)$ informa em y_1 o total de papel gasto pela editora para publicar o livro e em y_2 o total de tela necessários. De acordo com o item a) Qual a expressão do total de papel gasto (expressão de y_1 em função de x_1, x_2, x_3)? Qual a expressão do total de tela necessária (expressão de y_2 em função de x_1, x_2, x_3)?

5- Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear, chama-se núcleo da transformação linear ao conjunto $N(T) = \{v \in V; T(v) = 0\}$

a) Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(x,y) = y - x$, temos que

$$N(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; T(x,y) = y - x = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = x\}.$$

Responda: $(2,1) \in N(T)$? $(3,3) \in N(T)$?

6- Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear, chama-se imagem da transformação linear ao conjunto $\text{Im}(T) = \{w \in W; w = T(v) \text{ para algum } v \in V\}$

a) Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (x+y, 2x+2y)$, temos que

$$\text{Im}(T) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2; (a,b) = T(x,y) = (x+y, 2x+2y)\} \Rightarrow \begin{cases} x + y = a \\ 2x + 2y = b \end{cases}$$

para que este sistema tenha solução devemos ter $2a-b=0$. Logo
 $\text{Im}(T)=\{(a,b) \in \mathbb{R}^2; 2a-b=0\}$
 Responda: $(1,2) \in \text{Im}(T)$? $(6,3) \in \text{Im}(T)$?

7- Seja $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por
 $T(ax^2+bx+c)=(a+2b)x+(b+c)$

- a) $-4x^2+2x-2$ pertence a $N(T)$?
- b) x^2+2x+1 pertence a $\text{Im}(T)$?
- c) Encontre uma base para $N(T)$? Qual a dimensão de $N(T)$?
- d) T é injetora?
- e) Encontre uma base para $\text{Im}(T)$? Qual a dimensão de $\text{Im}(T)$?
- f) T é sobrejetora?

8 - Seja $T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ a+d & b+d \end{bmatrix}$$

- a) Encontre uma base para $N(T)$? Qual a dimensão de $N(T)$?
- b) T é injetora?
- c) Encontre uma base para $\text{Im}(T)$? Qual a dimensão de $\text{Im}(T)$?
- d) T é sobrejetora?

9- Dada a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x,y,z)=(x+y,y-z),$$

E considere as bases $A=\{(1,1,1), (0,0,1), (-1,1,1)\}$ e $B=\{(3,0), (1,1)\}$ para o \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 respectivamente. Determine:

- a) $[T]_B^A$
- b) Sendo $v=(5,1,-2)$ (coordenadas em relação à base canônica do \mathbb{R}^3), calcular $[T(v)]_B$ utilizando a matriz encontrada em a) e lembrando que $[T(v)]_B=[T]_B^A [v]_A$.

10- Seja a transformação $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida pela matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- a) Escreva a lei que define a transformação linear.
- b) Sejam $A=\{e_1, e_2, e_3\}$ e $B=\{e_1, e_2\}$ as bases canônicas respectivamente do \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 . Encontre a matriz de T em relação a A e B ($[T]_B^A$).

11- Sejam $T_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $T_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformações lineares definidas por:

$$T_1(x,y)=(x+2y, 2x-y, x) \text{ e } T_2(x,y)=(-x, y, x+y)$$

Sejam $A=\{e_1, e_2\}$ e $B=\{e_1, e_2, e_3\}$ as bases canônicas respectivamente do \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Encontre:

- a) $[T_1]_B^A$ e $[T_2]_B^A$
- b) $[T_1 + T_2]_B^A$
- c) $[3T_1 - 2T_2]_B^A$

12- Sejam $V=\mathbb{R}^2$, $A=\{(1,1),(2,1)\}$ e $B=\{(1,0),(0,1)\}$ bases do \mathbb{R}^2 .

- a) Determine a matriz de mudança de base de A para a base B (representada por $[I]_B^A$).
- b) Que relação pode ser estabelecida entre $[v]_B$ e $[v]_A$ usando a matriz de I em relação às bases A e B ?

GABARITO - Lista 9

1- a) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2x + y, x + 3y)$

Prova. Sejam (x, y) e (z, w) vetores do \mathfrak{R}^2 .

$$\begin{aligned} T((x, y) + (z, w)) &= T(x + z, y + w) = (2(x + z) + (y + w), (x + z) + 3(y + w)) = \\ &= ((2x + y) + (2z + w), (x + 3y) + (z + 3w)) = \\ &= ((2x + y), (x + 3y)) + ((2z + w), (z + 3w)) = T(x, y) + T(z, w). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\alpha(x, y)) &= T(\alpha x, \alpha y) = (2\alpha x + \alpha y, \alpha x + 3\alpha y) = (\alpha(2x + y), \alpha(x + 3y)) = \\ &= \alpha(2x + y, x + 3y) = \alpha T(x, y). \end{aligned}$$

b) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y) = (x + y, x - y, x)$

Prova. Sejam (x, y) e (z, w) vetores do \mathfrak{R}^2 .

$$\begin{aligned} T((x, y) + (z, w)) &= T(x + z, y + w) = ((x + z) + (y + w), (x + z) - (y + w), x + z) = \\ &= ((x + y) + (z + w), (x - y) + (z - w), x + z) = \\ &= ((x + y), (x - y), x) + ((z + w), (z - w), z) = T(x, y) + T(z, w). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\alpha(x, y)) &= T(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x + \alpha y, \alpha x - \alpha y, \alpha x) = (\alpha(x + y), \alpha(x - y), \alpha x) = \\ &= \alpha(x + y, x - y, x) = \alpha T(x, y). \end{aligned}$$

c) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x + y - z, x + 2y)$

Prova. Sejam (x, y, z) e (a, b, c) vetores do \mathfrak{R}^3 .

$$\begin{aligned} T((x, y, z) + (a, b, c)) &= \\ T(x + a, y + b, z + c) &= (2(x + a) + (y + b) - (z + c), (x + a) + 2(y + b)) = \\ &= ((2x + y - z) + (2a + b - c), (x + 2y) + (a + 2b)) = \\ &= ((2x + y - z), (x + 2y)) + ((2a + b - c), (a + 2b)) = T(x, y, z) + T(a, b, c). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\alpha(x, y, z)) &= T(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (2\alpha x + \alpha y - \alpha z, \alpha x + 2\alpha y) = (\alpha(2x + y - z), \alpha(x + 2y)) = \\ &= \alpha(2x + y - z, x + 2y) = \alpha T(x, y, z). \end{aligned}$$

3- Se $(x, y) \in \mathfrak{R}^2$, $(x, y) = a(-1, 1) + b(0, 1)$

$$\begin{cases} a = -x \\ a + b = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -x \\ b = x + y \end{cases} \Rightarrow (x, y) = -x(-1, 1) + (x + y)(0, 1)$$

$$T(x, y) = -xT(-1, 1) + (x + y)T(0, 1) = (-x(3, 2, 1) + (x + y)(1, 1, 0)) = (-2x + y, -x + y, -x)$$

Logo, fazendo $(-2x + y, -x + y, -x) = (5, 3, 2)$

$$\begin{cases} -2x + y = 5 \\ -x + y = 3 \\ -x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Daí, } v = (-2, 1).$$

4- a) $T(x_1, x_2, x_3) = (300x_1 + 500x_2 + 800x_3, 40x_1 + 50x_2 + 60x_3)$

b) $y_1 = 300x_1 + 500x_2 + 800x_3$ gramas de papel e $y_2 = 40x_1 + 50x_2 + 60x_3$ gramas de tela

5- a) $(2, 1) \in N(T)$? NÃO $(3, 3) \in N(T)$? SIM

6- a) $(1, 2) \in \text{Im}(T)$? SIM $(6, 3) \in \text{Im}(T)$? NÃO

7) a) sim, verifique que $T(-4x^2 + 2x - 2) = 0$ b) não c) $\{2x^2 - x + 1\}$ é uma base de $N(T)$, $\dim N(T) = 1$

d) não é injetora e) $\{x, 1\}$ é uma base de $\text{Im}(T)$, $\dim N(T) = 2$ f) não é sobrejetora

8) a) $N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, de modo que $N(T)$ não tem base, $\dim N(T)=0$.

b) T é injetora pois $N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, c) $\text{Im}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim \text{Im}(T)=4$

d) T é sobrejetora

9- a) $[T]_B^A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $[v]_A = (3, -3, -2)$ então $[T(v)]_B = (1, 3)$

10- a) $T(x, y, z) = (x+y+z, x+2y+3z)$

b) $[T]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, é claro que $[T]_B^A = M$ usada na definição de T pois A e B são as bases canônicas de \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 .

11- a) $[T_1]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $[T_2]_B^A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) use que $[T_1 + T_2]_B^A = [T_1]_B^A + [T_2]_B^A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

c) use que $[3T_1 - 2T_2]_B^A = 3[T_1]_B^A - 2[T_2]_B^A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

12- a) $[I]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) a) $[v]_B = [I]_B^A [v]_A$